GAL II*, rozwiązania wybranych zadań z egzaminu, 14 czerwca 2021

Zadanie 1. (30p) Rozważmy macierz $A \in M_4(\mathbb{C})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(15p) Wyznacz postać Jordana macierzy A i bazę, w której endomorfizm ϕ przestrzeni $\mathbb{C}^4$ dany w bazie standardowej macierzą A ma postać Jordana.

(5p) Wyznacz wielomian minimalny endomorfizmu ϕ.

(10p) Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech $W_1, \ldots, W_k$ będą ϕ-niezmienniczymi podprzestrzeniami V takimi, że $V = W_1 + \ldots + W_k$. Niech m_i będą wielomianami minimalnymi endomorfizmów $\phi|_{W_i}$ przestrzeni W_i, dla $i = 1, \ldots, k$. Pokaż, że wielomian minimalny ϕ równy jest najmniejszej wspólnej wielokrotności $m_1, \ldots, m_k$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy A, czyli liczymy wyznacznik:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & -2 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2(4-\lambda) + 4 + 6 - 4\lambda - 3\lambda - 2(4-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)^3.$$

Zauważmy też, że $r(A - I) = 2$, więc postać Jordana macierzy A ma 2 klatki odpowiadające wartości własnej 1: jedną rozmiaru 2×2 i drugą rozmiaru 1×1 oraz jedną klatkę rozmiaru 1×1 odpowiadającą wartości własnej 2.

Aby wyznaczyć bazę Jordana v_1, v_2, v_3, v_4 endomorfizmu ϕ danego warunkiem $A = M(\phi)_{st}^{st}$ wyznaczmy najpierw wektor własny v_4 rozpinający podprzestrzeń $V_{(2)}$, czyli niezerowy element $\ker(\phi - 2\,\mathrm{id})$. Jest to na przykład

$$v_4 = (1, 1, 0, 1).$$

Teraz wyznaczamy bazę v_1, v_2, v_3 podprzestrzeni pierwiastkowej $V_{[1]}$, w której $\phi|_{V_{[1]}}$ ma postać Jordana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli mamy $v_1, v_3 \in \ker(\phi - \mathrm{id})$, $v_2 \in \ker(\phi - \mathrm{id})^2$ oraz $(\phi - \mathrm{id})(v_2) = v_1$. Mamy:

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

W szczególności widzimy, że można przyjąć $v_2 = (2, 1, 0, 0)$. Wówczas $(\phi - \mathrm{id})(v_2) = (2, 1, 0, 1)$. Teraz możemy dopełnić v_1 do bazy podprzestrzeni własnej $V_{(1)}$ wektorem $v_3 = (-3, -1, 1, 0)$. Ostatecznie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{J} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Innymi słowy szukana baza Jordana to np. $((-3, -1, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 0), (1, 1, 0, -1))$.

(b) Wielomian minimalny jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego i z dokładnością do krotności ma takie same pierwiastki. A zatem szukany przez nas wielomian minimalny jest w jednej z postaci $(\lambda-1)^k(\lambda-2)$, gdzie k jest jedną z liczb $1, 2, 3$. Wielomian minimalny musi być spełniony przez macierz Jordana J rozważanego endomorfizmu. Nietrudno jednak widać, że:

$$(J-I)(J-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Mamy jednak

$$(J-I)(J-I)(J-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Zatem wielomian minimalny ϕ to $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

(c) Niech m będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością wielomianów minimalnych $m_1, \ldots, m_n$ endomorfizmów ϕ_i. A zatem m jest wielokrotnością każdego z tych wielomianów. Zapiszmy więc $m = g_i m_i$, dla każdego i, dla pewnych $g_i \in K[\lambda]$. Dla każdego $v \in W_i$ mamy:

$$m(\phi)(v) = g_i(\phi)(m_i(\phi))v = g_i(\phi)(0) = 0,$$

a zatem $m(\phi)$ jest endomorfizmem zerowym na każdym z W_i. Skoro V jest sumą W_i, to $m(\phi) = 0$ na całym V. A zatem wielomian minimalny ϕ jest dzielnikiem m.

Teraz pokażemy, że wielomian minimalny ϕ jest podzielny przez m. Skoro wielomian minimalny m_ϕ zeruje się na ϕ, to w szczególności jądro $m_\phi(\phi)$ zawiera każdą z W_i. A zatem ograniczając $m_\phi(\phi)$ do W_i widzimy, że również tu jest to przekształcenie zerowe. W szczególności $m_i(\phi)$ są dzielnikami m_ϕ, dla każdego i, czyli ich najmniejsza wspólna wielokrotność – wielomian m, również dzieli m_ϕ.

* * *

Do problemu wyznaczania wielomianu minimalnego można podejść w następujący sposób, imitujący rozumowania dotyczące formy kanonicznej Frobeniusa. Po prostu dla $\phi \in \mathrm{End}(V)$ wybieramy $v \neq 0$ i rozważamy podprzestrzeń cykliczną V_v. Wówczas za m_1 można wziąć wielomian charakterystyczny ϕ obciętej do tej podprzestrzeni. Następnie kładziemy $v_1 = v$, $W_1 = V_v$ i wybieramy $v_2 \notin W_1$. Za W_2 bierzemy podprzestrzeń cykliczną rozpiętą przez v_2. I wielomian charakterystyczny ϕ obciętego do W_2 to jest, jak się okazuje, m_2. Kontynuując w ten sposób i korzystając z faktu, że V jest skończenie wymiarowa dostajemy zbiór podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych W_i, których sumą jest całe V (i nie wnikamy czy to jest suma prosta). Wielomian minimalny ϕ jest natomiast najmniejszą wspólną wielokrotnością m_i. Oczywiście stosowanie takiego algorytmu może być uciążliwe, więc wygodnie jest mieć do dyspozycji teorię Jordana.

Warto również odnotować, że kwestia rozkładalności wielomianu minimalnego ma związek z pojęciem półprostoty endomorfizmu.

Twierdzenie. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest przestrzenią skończenie wymiarową. Wówczas ϕ jest endomorfizmem półprostym wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny ϕ nie ma wielokrotnych dzielników pierwszych (jest bezkwadratowy).

I jeszcze jedno ćwiczenie z teorii przestrzeni euklidesowych w podobnym kontekście.

Zadanie. Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej (skończonego wymiaru). Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny ϕ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

■

Zadanie 2. (30p) Rozważmy przestrzeń euklidesową $V = (M_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, gdzie $\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$, dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważmy przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ zadane wzorem

$$\phi(A) = A - \frac{tr(A)}{n} I.$$

(10p) Pokaż, że ϕ jest rzutem i wyznacz obraz ϕ.

(5p) Pokaż, że ϕ jest endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni V.

(5p) Znajdź bazę prostopadłą V, w której ϕ ma macierz diagonalną.

(10p) Niech ψ będzie rzutem w przestrzeni euklidesowej (W, h). Wykaż, że ψ jest rzutem prostopadłym (na swój obraz) wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest endomorfizmem samosprzężonym.

Rozwiązanie. Endomorfizm ϕ przestrzeni liniowej V jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^2 = \phi$. Zauważmy, że dla każdej $A \in M_n(\mathbb{R})$ mamy:

$$\mathrm{tr}(\phi(A)) = \mathrm{tr}(A) - \frac{\mathrm{tr}(A)}{n}\,\mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(A) = 0. \quad (*)$$

A zatem

$$\phi(\phi(A)) = \phi(A) - \frac{\phi(A)}{n} I = \phi(A).$$

Twierdzimy, że obraz ϕ składa się ze zbioru $\mathcal{R}$ wszystkich macierzy w $M_n(\mathbb{R})$ o śladzie równym 0. Z $(*)$ wynika, że w obrazie ϕ są jedynie macierze o zerowym śladzie. Z drugiej strony, biorąc macierz $B \in M_n(\mathbb{R})$ o śladzie 0, mamy $\phi(B) = B - \frac{\mathrm{tr}(B)}{n} I = B$. A zatem $B \in \mathrm{im}(\phi)$. Pokazaliśmy więc, że $\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{R}$.

Przekonajmy się teraz, że $\langle \phi(A), B\rangle = \langle A, \phi(B)\rangle$, dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Mamy:

$$\begin{aligned}\langle \phi(A), B\rangle &= \langle A - \frac{\mathrm{tr}\,A}{n} I, B\rangle = \langle A, B\rangle - \frac{\mathrm{tr}\,A}{n}\langle I, B\rangle = \langle A, B\rangle - \frac{\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(IB^T)}{n} = \\ &= \langle A, B\rangle - \frac{\mathrm{tr}(AI^T)\,\mathrm{tr}(B)}{n} = \langle A, B\rangle - \langle A, \frac{\mathrm{tr}\,B}{n} I\rangle = \langle A, B - \frac{\mathrm{tr}\,B}{n} I\rangle = \langle A, \phi(B)\rangle.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że ϕ jest endomorfizmem samosprzężonym.

Zauważmy, że $\mathcal{R}$ jest podprzestrzenią wymiaru $n^2 - 1$ oraz $\langle I, \mathcal{R}\rangle = 0$. Nietrudno natomiast widzieć, że przykładem bazy ortonormalnej w $\mathcal{R}$ jest następujący zbiór:

$$\{E_{ij}, \mid i \neq j\} \cup \{\frac{E_{ii} - E_{i+1,i+1}}{\sqrt{2}} \mid i = 1, \ldots, n-1\}, \qquad (\dagger)$$

gdzie E_{ij} są jedynkami macierzowymi. Wynika to natychmiast z równości $\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = \mathrm{tr}(E_{ij}E_{lk}) = \delta_{jl}\delta_{ik}$. Szukaną bazą ortonormalną $M_n(\mathbb{R})$ złożoną z wektorów własnych ϕ jest zatem zbiór $(\dagger)$ poszerzony o I.

Pozostaje pokazać, że jeśli ψ jest rzutem na podprzestrzeń W_1 wzdłuż W_2 w przestrzeni euklidesowej (W, h), to ψ jest rzutem prostopadłym wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest endomorfizmem samosprzężonym. Niech $x, y \in W$ oraz niech $x = x_1 + x_2, y = y_1, y_2$, gdzie $x_1, y_1 \in W_1$, $x_2, y_2 \in W_2$. Wówczas

$$\begin{aligned}\langle \psi(x), y\rangle = \langle x, \psi(y)\rangle &\iff \langle \psi(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, \psi(y_1 + y_2)\rangle \\ &\iff \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle \\ &\iff \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_1\rangle \\ &\iff \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle\end{aligned}$$

Zatem jeśli rzut ψ jest ortogonalny, to wyrażenia występujące po obydwu stronach ostatniej równości są zerami i ψ jest samosprzężone. Z drugiej jeśli ϕ jest samosprzężona, to równość zachodzi dla dowolnych $x_1, x_2 \in W_1$ oraz $y_1, y_2 \in W_2$. Zatem kładąc $y_1 = -x_1, y_2 = x_2$ mamy $\langle x_1, y_1\rangle = 0$, czyli ψ jest rzutem ortogonalnym. ■

Zadanie 3. (30p) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są dwie płaszczyzny:

$$P_1 = (3,7,2,4,-3) + \mathrm{lin}((2,5,4,5,3),(4,5,6,3,3)), \quad P_2 : \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = -14 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 & = 16 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 & = 26 \end{cases}.$$

Układ ten ma następujące rozwiązania:

(10p) Znajdź równanie dowolnej prostej prostopadłej jednocześnie do P_1 oraz do P_2, przecinającej te płaszczyzny.

(10p) Opisz układem równań podprzestrzeń afiniczną $X \subset \mathbb{R}^5$ złożoną z punktów, przez które przechodzi prosta prostopadła jednocześnie do P_1 oraz do P_2, przecinająca te płaszczyzny.

(10p) Wyznacz wymiar podprzestrzeni afinicznej Y określonej w sposób analogiczny do X dla dowolnych płaszczyzn afinicznych P, L zawartych w $\mathbb{R}^5$. Odpowiedź uzasadnij,

Rozwiążmy układ równań opisujący P_2. Macierz tego układu ma następującą postać zredukowaną:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} & \frac{71}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{4} & \frac{81}{4} \end{array}\right]. \qquad (\diamondsuit)$$

A zatem $T(P_2)$ jest rozpięta przez wektory $(1,0,1,-1,0), (9,6,11,0,4)$. Układ równań opisujący $T(P_1)^\perp \cap T(P_2)^\perp$ to:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązania tego układu rozpięte są przez wektory

$$(-1,-4,3,2,0), (-1,-1,1,0,1).$$

A zatem jest to przestrzeń styczna do płaszczyzny zawierającej prostą szukaną w punkcie drugim. na której leżą proste szukane w punkcie pierwszym. Trzeba jeszcze pokazać, że jest jakaś warstwa tej podprzestrzeni, która przecina obydwie płaszczyzny. Wyznaczamy ją korzystając z nastepującego lematu.

Lemat. Niech $P_1 = c_1 + L_1$ oraz $P_2 = c_2 + L_2$ będą dwiema rozłącznymi płaszczyznami w przestrzeni euklidesowej oraz niech

$$\overrightarrow{c_1c_2} = y_1 + y_2 + z,$$

gdzie

- $y_1 + y_2$ jest rzutem prostopadłym $\overrightarrow{c_1c_2}$ na $L_1 + L_2$,
- $z \perp y$,
- $y_1 \in L_1$ oraz $y_2 \in L_2$

Wówczas prosta

$$c_1 + y_1 + \mathrm{lin}(z).$$

przecina P_1 w punkcie $c_1 + y_1$ oraz P_2 w punkcie $c_2 - y_2$.

Wymiar, o którym mowa w punkcie trzecim wynosi $\dim(P \cap L) + 1$.

Zadanie 4. (30p) Rozważmy krzywą H w $\mathbb{R}^3$ zadaną w standardowym układzie bazowym równaniami

$$x^2 - 14xy + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0, \quad z = 0.$$

(15p) Znajdź typ afiniczny krzywej H i taki układ bazowy w $\mathbb{R}^3$, w którym krzywa H opisana jest równaniem w postaci kanonicznej. Czy istnieje takie $t \in \mathbb{R}$ oraz taka płaszczyzna $\pi \subset \mathbb{R}^3$, dla których H byłaby tego samego typu afinicznego, co krzywa $S_t \cap \pi$, gdzie powierzchnia $S_t \subset \mathbb{R}^3$ dana jest w standardowym układzie bazowym równaniem $4xy - txz + 2tyz - x - 2y + t + 1 = 0$?

(15p) Rozważ ciąg zadany rekurencją $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz wszystkie pary (x_k, x_l) wyrazów tego ciągu takie, że $(x_k, x_l, 0) \in H$. Wywnioskuj stąd, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie. Zauważmy, że:

$$x^2 - 14xy + y^2 + 4x + 4y + 4 = (x - 7y + 2)^2 - 48y^2 + 32y = (x - 7y + 2)^2 - \left(4\sqrt{3}y - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{16}{3} = 0.$$

A zatem dzieląc stronami przez 16/3 mamy:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{7\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (3y - 1)^2 + 1 = 0.$$

A zatem rozważana krzywa jest hiperbolą.

Zauważmy dalej, że:

$$4xy - txz + 2tyz - x - 2y + t + 1 = (4x + 4y + 2tz - 3)^2 - (4x - 4y + 2tz - 1)^2 - 16tz + 8 = 0.$$

A zatem dla $t \neq 0$ powierzchnia S_t jest paraboloidą hiperboliczną. Dla $t = 0$ jest natomiast walcem hiperbolicznym. Oczywiście obydwie te krzywe mają przekroje hiperboliczne: dla powierzchni S opisanej równaniem $y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0$ jest to np. przekrój powstały po przecięciu S z płaszczyzną $y_3 = 0$, zaś dla powierzchni S' opisanej równaniem $z_1^2 - z_2^2 + z_3 = 0$ przekrój hiperboliczny powstaje po przecięciu z płaszczyzną $z_3 = 1$. Oczywiście dowolne dwie hiperbole leżące na dwóch płaszczyznach zanurzonych dowolnie w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ są afinicznie równoważne.

Rozwiązanie drugiej części jest w zasadzie natychmiastowe, ale sztuczkowe (ta część pochodzi z Olimpiady w Bułgarii w 1987 r.). Zauważmy, że kładąc $Q(x, y) = x^2 - 14xy + y^2 + 4x + 4y + 4$ mamy:

$$Q(x_{n+2}, x_{n+1}) = Q(14x_{n+1} - x_n - 4, x_{n+1}) = Q(x_{n+1}, x_n).$$

Skoro zaś $Q(x_2, x_1) = Q(1, 1) = 0$, to mamy $Q(x_{n+1}, x_n) = 0$. Z symetrii mamy też $Q(x_n, x_{n+1}) = 0$. A zatem $y = x_n$ oraz $y = x_{n+2}$ są jedynymi rozwiązaniami równania kwadratowego:

$$0 = Q(x_{n+1}, y) = y^2 + (4 - 14x_{n+1})y + (x_{n+1} + 2)^2.$$

W wzorów Viete'a mamy:

$$x_n \cdot x_{n+2} = (x_{n+1} + 2)^2.$$

A zatem x_{n+2} jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy x_n nim jest. Skoro jednak x_1, x_2 są kwadratami, to także pozostałe wyrazy tego ciągu są kwadratami. ∎

Zadanie 5a. (10p)
Dla $n \geqslant 2$ macierz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy dobrą, jeśli A jest symetryczna i jej wyrazy spełniają warunki

$$|a_{ij} - n| \leqslant 1,$$

dla wszystkich $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pokaż, że największa wartość własna macierzy A jest w przedziale

$$[n(n-1), n(n+1)].$$

Dla każdego $t \in [n(n-1), n(n+1)]$ wskaż taką dobrą macierz w $M_n(\mathbb{R})$, której największa wartość własna równa jest t.

Rozwiązanie. Niech $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)^T$. Wówczas $\|x\| = 1$ oraz

$$xAx^T = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \geqslant \frac{1}{n} \cdot (n-1) \cdot n^2 = (n-1)n.$$

Wiemy natomiast, że największa wartość własna to maksimum z wartości xAx^T, dla $\|x\| = 1$. Z drugiej strony, weźmy wektor własny $v = (v_1, \ldots, v_n)$ odpowiadający największej wartości własnej $\lambda(A)$ i niech $M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |v_i| > 0$. Wówczas:

$$|\lambda(A)|M = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j| \leqslant n(n+1)M \Rightarrow \lambda(A) \leqslant n(n+1).$$

Biorąc $A_t = (a_{ij}) = t/n$, dla każdego i, j, dostajemy wielokrotność dobrze znanej macierzy J o największej wartości własnej równej n, czyli $\lambda(A_t) = t$. ■

Zadanie 5d. (10p) Wykaż, że sygnatura macierzy $A_n = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ równa jest 0, gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & |i-j| \neq 1, \\ \min(i,j), & |i-j| = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & \\ & 2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 \\ & & & n-1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc nietrudno pokazać, że kładąc $f_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)$ mamy

$$f_{n+1}(\lambda) = \lambda f_n(\lambda) - n^2 f_{n-1}(\lambda), \qquad (\heartsuit)$$

przy czym $f_0 = 1$ oraz (formalnie weźmy) $f_{-1} = 0$. Twierdzimy, że stopień każdego jednomianu w f_n ma taką samą parzystość jak n oraz, że f_n ma niezerowy wyraz stopnia k dla wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n$, że $k \equiv n \pmod 2$, na przykład: $f_4(\lambda) = \lambda^4 - 14\lambda^2 - 9$. Dowód to łatwa indukcja korzystający z formuły $(\heartsuit)$.

Jeśli n jest parzyste, wówczas $f_n(0) \neq 0$ (bo wielomian ma niezerowy wyraz wolny). Co więcej mamy $f_n(\lambda) = 0 \iff f_n(-\lambda) = 0$, więc A_n nie ma wartości własnej 0 oraz ma po $n/2$ dodatnich i ujemnych wartości własnych. Jej sygnatura wynosi więc 0.

Jeśli n jest nieparzyste, wówczas $f_n(0) = 0$ oraz jeśli przyjmiemy

$$f_n(\lambda) = \lambda \cdot g_n(\lambda),$$

to g_n ma stopień parzysty i jedyne jego niezerowe wyrazy są parzystego stopnia. A zatem g_n ma dokładnie $(n-1)/2$ ujemnych i dodatnich wartości własnych (i nie ma zerowej). A zatem macierz A_n ma tyle samo dodatnich i ujemnych wartości własnych. ■

Zadanie 6. (40p) Dla formy kwadratowej q na $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy oznaczenie:

$$Z_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}.$$

Mówimy też, że formy kwadratowe q_1, q_2 na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są wspólnie diagonalizowalne, jeśli istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taka, że $G(q_1; \mathcal{A})$ oraz $G(q_2; \mathcal{A})$ są diagonalne.

(15p) Niech q, r będą nieujemnie określonymi formami kwadratowymi na $\mathbb{R}^n$ takimi, że $Z_q \subseteq Z_r$. Pokaż, że r, q są wspólnie diagonalizowalne.

(20p) Niech q, r będą formami kwadratowymi na $\mathbb{R}^n$ przy czym q jest formą nieokreśloną oraz $Z_q \subseteq Z_r$. Pokaż, że istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $\lambda q = r$.

(5p) Wskaż przykład pary form kwadratowych q, r na $\mathbb{R}^n$ takich, że q jest nieujemnie określona, $Z_q \subseteq Z_r$, ale q, r nie są wspólnie diagonalizowalne.

Pierwsza część zadania zachodzi również bez założenia, że $Z_q \subseteq Z_r$ (jeśli założymy, że choć jedna z form jest dodatnio określona, wówczas rozumowanie nie przedstawia większych trudności). Natomiast dowody przedstawionych tu postulatów można znaleźć w artykule Johna H. Eltona: *Indefinite Quadratic Forms and the Invariance of the Interval in Special Relativity*,The American Mathematical Monthly, Vol. 117, No. 6 (June-July 2010), pp. 540-547. Rezultat ten, jak wskazuje tytuł, ma związek z fizyką i podstawami teorii względności. Zachęcam (po zalogowaniu się za pomocą karty bibliotecznej) do zapoznania się z tym artykułem pod adresem: `https://www.jstor.org/stable/10.4169/000298910x492826`.

Warto w tym kontekście zapoznać się również z artykułem:
https://galileo-unbound.blog/2021/04/24/hermann-minkowskis-spacetime-the-theory-that-einstein-overlooked/.