GAL II* Egzamin, 14 czerwca 2021

Uwaga: tekst ma dwie strony. Rozwiązania składają Państwo tylko na Moodle.

Zadanie 1. (30p) Rozważmy macierz $A \in M_4(\mathbb{C})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(15p) Wyznacz postać Jordana macierzy A i bazę, w której endomorfizm ϕ przestrzeni $\mathbb{C}^4$ dany w bazie standardowej macierzą A ma postać Jordana.

(5p) Wyznacz wielomian minimalny endomorfizmu ϕ.

(10p) Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech $W_1, \ldots, W_k$ będą ϕ-niezmienniczymi podprzestrzeniami V takimi, że $V = W_1 + \ldots + W_k$. Niech m_i będą wielomianami minimalnymi endomorfizmów $\phi|_{W_i}$ przestrzeni W_i, dla $i = 1, \ldots, k$. Pokaż, że wielomian minimalny ϕ równy jest najmniejszej wspólnej wielokrotności $m_1, \ldots, m_k$.

Zadanie 2. (30p) Rozważmy przestrzeń euklidesową $V = (M_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$, gdzie $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$, dla dowolnych $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Rozważmy przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ zadane wzorem

$$\phi(A) = A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} I.$$

(10p) Pokaż, że ϕ jest rzutem i wyznacz obraz ϕ.

(5p) Pokaż, że ϕ jest endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni V.

(5p) Znajdź bazę prostopadłą V, w której ϕ ma macierz diagonalną.

(10p) Niech ψ będzie rzutem w przestrzeni euklidesowej (W, h). Wykaż, że ψ jest rzutem prostopadłym (na swój obraz) wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest endomorfizmem samosprzężonym.

Zadanie 3. (30p) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są dwie płaszczyzny:

$$P_1 = (3,7,2,4,-3) + \operatorname{lin}((2,5,4,5,3),(4,5,6,3,3)), \quad P_2 : \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = -14 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 & = 16 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 & = 26 \end{cases}.$$

(10p) Znajdź równanie dowolnej prostej prostopadłej jednocześnie do P_1 oraz do P_2, przecinającej te płaszczyzny.

(10p) Opisz układem równań podprzestrzeń afiniczną $X \subset \mathbb{R}^5$ złożoną z punktów, przez które przechodzi prosta prostopadła jednocześnie do P_1 oraz do P_2, przecinająca te płaszczyzny.

(10p) Wyznacz wymiar podprzestrzeni afinicznej Y określonej w sposób analogiczny do X dla dowolnych płaszczyzn afinicznych P, L zawartych w $\mathbb{R}^5$. Odpowiedź uzasadnij,

Zadanie 4. (30p) Rozważmy krzywą H w $\mathbb{R}^3$ zadaną w standardowym układzie bazowym równaniami

$$x^2 - 14xy + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0, \quad z = 0.$$

(15p) Znajdź typ afiniczny krzywej H i taki układ bazowy w $\mathbb{R}^3$, w którym krzywa H opisana jest równaniem w postaci kanonicznej. Czy istnieje takie $t \in \mathbb{R}$ oraz taka płaszczyzna $\pi \subset \mathbb{R}^3$, dla których H byłaby tego samego typu afinicznego, co krzywa $S_t \cap \pi$, gdzie powierzchnia $S_t \subset \mathbb{R}^3$ dana jest w standardowym układzie bazowym równaniem $4xy - txz + 2tyz - x - 2y + t + 1 = 0$?

(15p) Rozważ ciąg zadany rekurencją $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz wszystkie pary (x_k, x_l) wyrazów tego ciągu takie, że $(x_k, x_l, 0) \in H$. Wywnioskuj stąd, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 5a. (10p)
Dla $n \geqslant 2$ macierz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy dobrą, jeśli A jest symetryczna i jej wyrazy spełniają warunki

$$|a_{ij} - n| \leqslant 1,$$

dla wszystkich $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Pokaż, że największa wartość własna macierzy A jest w przedziale

$$[n(n-1), n(n+1)].$$

Dla każdego $t \in [n(n-1), n(n+1)]$ wskaż taką dobrą macierz w $M_n(\mathbb{R})$, której największa wartość własna równa jest t.

Zadanie 5b. (10p) Znajdź macierz unitarną U taką, że U^*AU jest diagonalna, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4i \\ 0 & 1 & -4i \\ -4i & 4i & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Zadanie 5c. (10p) Niech $(H, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. Pokaż, że dla dowolnego układu punktów $q, p_1, p_2, \ldots, p_k, r_1, r_2, \ldots, r_l$ przestrzeni H, gdzie $k, l \geqslant 1$ zachodzi nierówność:

$$\binom{k+l}{l} \Delta_{k+l}(q, p_1, p_2, \ldots, p_k, r_1, r_2, \ldots, r_l) \leqslant \Delta_k(q, p_1, p_2, \ldots, p_k) \cdot \Delta_l(q, r_1, r_2, \ldots, r_l),$$

gdzie $\Delta_s(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ jest s-wymiarową miarą sympleksu rozpiętego na punktach $x_0, x_1, \ldots, x_s$. Kiedy w powyższej nierówności zachodzi równość?

Zadanie 5d. (10p) Wykaż, że sygnatura macierzy $A_n = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ równa jest 0, gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & |i-j| \neq 1, \\ \min(i,j), & |i-j| = 1. \end{cases}$$

Zadanie 6. (40p) Dla formy kwadratowej q na $\mathbb{R}^n$ wprowadzamy oznaczenie:

$$Z_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}.$$

Mówimy też, że formy kwadratowe q_1, q_2 na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są wspólnie diagonalizowalne, jeśli istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taka, że $G(q_1; \mathcal{A})$ oraz $G(q_2; \mathcal{A})$ są diagonalne.

(15p) Niech q, r będą nieujemnie określonymi formami kwadratowymi na $\mathbb{R}^n$ takimi, że $Z_q \subseteq Z_r$. Pokaż, że r, q są wspólnie diagonalizowalne.

(20p) Niech q, r będą formami kwadratowymi na $\mathbb{R}^n$ przy czym q jest formą nieokreśloną oraz $Z_q \subseteq Z_r$. Pokaż, że istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $\lambda q = r$.

(5p) Wskaż przykład pary form kwadratowych q, r na $\mathbb{R}^n$ takich, że q jest nieujemnie określona, $Z_q \subseteq Z_r$, ale q, r nie są wspólnie diagonalizowalne.