Kolokwium GAL II*, 10.06.2020

Zadanie 1.
Dane są punkty

$$p_0 = [1:0:0], \quad p_1 = [0:1:0], \quad p_2 = [0:1:1], \quad p_3 = [1:1:1], \quad p_4 = [1:2:3],$$

na płaszczyźnie rzutowej $\mathbb{R}P^2$ oraz automorfizm rzutowy $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ taki, że $f(p_0) = p_1$, $f(p_1) = p_2$, $f(p_2) = p_3$, $f(p_3) = p_4$. Obliczyć współrzędne jednorodne punktu $f(p_4)$.

Zadanie 2.
W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dane są proste $L = (0,7,1,2) + t(0,1,-1,0)$ oraz $K = (1,1,1,1) + t(1,0,0,-1)$, $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez punkt $(4,1,3,1)$, która jest prostopadła do L i nie przecina K.

Zadanie 3.
Niech $ABCDEFGH$ będzie równoległościanem w $\mathbb{R}^3$ ($ABCD$ i $EFGH$ są ścianami, na których wierzchołki są nazwane w podanej kolejności, AE, BF, CG i DH są krawędziami).

1. Niech f będzie przekształceniem afinicznym $\mathbb{R}^3$, które przeprowadza punkty A, B, D, E odpowiednio na G, F, C, H. Zapisz f w postaci macierzowej w bazie wektorowej $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2. Znajdź współrzędne punktów stałych f i przedstawienia parametryczne prostych niezmienniczych f w bazie punktowej (A, B, C, F).

Zadanie 4.
Niech A będzie przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$ wymiaru 5 i niech $P, Q \subseteq A$ będą dwuwymiarowymi podprzestrzeniami afinicznymi. Załóżmy, że $P \cap Q = \emptyset$ oraz $T_P \cap T_Q = 0$.

(a) Rozstrzygnąć, czy każdy punkt $r \in A$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji afinicznej $r = sp + tq$, gdzie $p \in P$, $q \in Q$, $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Niech $F = \{f : A \to A \;:\; f(P) = P,\; f(Q) = Q\}$. Wykazać, że istnieje punkt $r \notin P \cup Q$ taki, że $\{f(r) \;:\; f \in F\}$ jest podprzestrzenią afiniczną A.