Kolokwium GAL II*, 21.05.2020

Zadanie 1.
Zapisać macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

w postaci iloczynu $A = BC$, gdzie B jest macierzą ortogonalną, a C jest macierzą górnotrójkątną.

Zadanie 2.
Na przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadany jest iloczyn skalarny przez macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obliczyć iloczyn wektorowy $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ z orientacją zadaną przez bazę standardową $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Zadanie 3.
Niech M, N będą macierzami endomorfizmów skończenie wymiarowej przestrzeni iniowej V nad $\mathbb{C}$. Niech $P_M(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \mu_i)$ i $P_N(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \nu_i)$ będą wielomianami charakterystycznymi M i N odpowiednio. Wyznacz wielomian charakterystyczny ioczynu Kroneckera $M \otimes N$.

Zadanie 4.
Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, a $f : V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $f^{2020} = \mathrm{id}_V$. Wykazać, że istnieje iloczyn skalarny na V taki, że f jest izometrią.