Kolokwium GAL II*, 30.04.2020

Zadanie 1.
Znaleźć bazę Jordana macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ i postać Jordana w tej bazie, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2.
Dana jest macierz $B \in M_{6\times 6}(\mathbb{R})$ taka, że $\mathrm{rk}(B) = 4$, $\mathrm{rk}(B^2) = 2$ i $\mathrm{rk}(B^3) = 1$.

(a) Załóżmy, że macierz $B - I$ jest osobliwa. Podać postać Jordana macierzy B.
(b) Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ macierz (zespolona) $B + zI$ ma niezerowy wyznacznik.

Zadanie 3.
Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K, a $f, g : V \to W$ przeształceniami liniowymi. Ekwalizatorem $\mathrm{eq}(f, g)$ nazywamy granicę odwrotną, a koekwalizatorem $\mathrm{coeq}(f, g)$ granicę prostą diagramu

$$V \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} W$$

(a) Załóżmy, że $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, y, x+y)$, $g(x, y) = (y, x, -x-y)$. Obliczyć $\dim(\mathrm{eq}(f, g))$ i $\dim(\mathrm{coeq}(f, g))$.
(b) Wykazać, że dla dowolnych skończenie wymiarowych V i W zachodzi równość

$$\dim(\mathrm{eq}(f, g)) + \dim(W) = \dim(V) + \dim(\mathrm{coeq}(f, g)).$$

Zadanie 4.
Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ i $B \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$. Załóżmy, że nie istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{C}$, która jest wartością własną jednocześnie dla A i dla B. Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania $AX = XB$ jest macierz zerowa rozmiaru $n \times m$.