Egzamin GAL II*, 23 czerwca 2020

Zadanie 1.
Dana jest macierz zespolona
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$$

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A.
(b) Znaleźć bazę Jordana macierzy A.

Zadanie 2.
W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dana kwadryka
$$X_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 5x^2 + txy + 5y^2 + 2z^2 + 10x + 6y - 2z + 2 = 0\}$$
gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

(a) Dla każdego t podać typ afiniczny kwadryki X_t.
(b) Znaleźć osie symetrii X_6 oraz opisać jej typ izometrii.

Zadanie 3.
Dana jest macierz
$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 1 \\ 1-i & 2 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$
Znaleźć macierze $B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ takie, że
— $A = BC$,
— macierz B jest unitarna,
— macierz C jest górnotrójkątna i jej wszystkie współczynniki na przekątnej są rzeczywiste i dodatnie.

Zadanie 4.
Dana jest przestrzeń afiniczna A nad $\mathbb{R}$.

(a) Wykazać, że dla dowolnej rodziny $B_1, \ldots, B_k$ podprzestrzeni A zbiór
$$Inv(B_1, \ldots, B_k) := \{f : A \to A :\ f(B_i) \subseteq B_i \text{ dla każdego } i = 1, \ldots, k\}$$
jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni wszystkich endomorfizmów A.
(b) Załóżmy, że $P, Q, R \subseteq A$ są parami rozłącznymi prostymi takimi, że $T_A = T_P \oplus T_Q \oplus T_R$. Znaleźć wymiar przestrzeni $Inv(P, Q, R)$.

Zadanie 5.
Niech K będzie skończonym ciałem charakterystyki 7, a $X \subseteq K^2$ kwadryką zawierającą co najmniej dwa punkty. Wykazać, że

(a) W pewnym układzie współrzędnych X zapisuje się równaniem $ax^2 + bxy + cy^2 - ax + dy = 0$.
(b) X ma przynajmniej $|K| - 1$ punktów.
(c) Jeśli X jest podzbiorem sumy dwóch prostych, to X zawiera prostą.