

GAL* – zadania przygotowawcze do kolokwium II

1. Dana jest kwadryka Q opisana równaniem

$$7x_1^2 + 48x_1x_3 + 70x_1 - x_2^2 + 4x_2 - 7x_3^2 - 10x_3 + 21 = 0$$

a) Czy istnieją współrzędne afiniczne, w których Q jest opisana równaniem

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1 ?$$

Jeśli istnieją, to znaleźć te współrzędne.

b) Czy istnieje rzutowa zamiana współrzędnych taka, że Q w nowych współrzędnych jest opisana równaniem $z_1^2 - z_2^2 - 2z_3 = 0$? Jeśli istnieje, to znaleźć tę zamianę zmiennych.

c) Znaleźć środek symetrii (jeśli istnieje) oraz kierunki i długości osi głównych kwadryki.

2. Dany operator $A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ jest zadany macierzą

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \\ 2 & \frac{11}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Przedstawić A jako złożenie QP operatora izometrii Q i samosprężonego nieujemnie określonego P .

3. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową skończonego wymiaru. Niech G będzie skończoną podgrupą $GL(V)$.

a) Udowodnić, że istnieje iloczyn skalarny w V taki, że dla każdego $g \in G$ mamy $(v, w) = (g(v), g(w))$.

b) Wykazać, że dla każdej G -niezmienniczej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje jej G -niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej.

4. Opisać wszystkie przekształcenia \mathbb{R} -liniowe z liczb zespolonych do kwaternionów, które zachowują działania dodawania i mnożenia.

5. Dane przekształcenie afiniczne $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wiemy, że $D\phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

oraz $\phi(0, 0, 0) = (1, 2, 3)$. Co to za przekształcenie?

6. Potęgi zewnętrzne $\Lambda^k V$ będą omówione na najbliższym wykładzie.

a) Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi. Skonstruować naturalny izomorfizm

$$\Lambda^k(V \oplus W) = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i V \otimes \Lambda^j W.$$

b) Niech $\dim V = n$. Wskazać naturalny izomorfizm

$$\Lambda^k V \rightarrow \Lambda^{n-k} V^* \otimes \Lambda^n V$$