Zadania przygotowawcze do I kolokwium GAL II*

1 Endomorfizmy

1.1 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadane wzorem $\phi(x, y) = (x + 2y, x + y)$. Znaleźć wzór na $\phi^n(1, 0)$.

1.2 O przekształcenu $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$ wiemy:
– wielomian charakterystyczny jest równy $(x-1)^3(x-2)^4$,
– wymiar obrazu $(\phi - 2\,Id)^2$ jest większy od 3,
– wymiary przestrzeni własnych $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$.
Jaką postać Jordana ma ϕ?

1.3 Niech $\phi : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ. Odpowiedź uzależnić od charakterystyki ciała.

1.4 Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 3$. Niech $\phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla ϕ.

1.5 Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Dany jest endomorfizm $\varphi : V \to V$. Udowodnić, że jeśli $\dim V \geq 3$ to V zawiera podprzestrzeń φ – niezmienniczą W taką, że $0 < \dim W < \dim V$.

1.6 Niech V będzie przestrzenią liniową (nad dowolnym ciałem), $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Niech
μ_V będzie wielomianem minimalnym φ,
μ_W będzie wielomianem minimalnym $\varphi_{|W} : W \to W$,
$\mu_{V/W}$ będzie wielomianem minimalnym przekształcenia indukowanego $\overline{\varphi} : V/W \to V/W$.
a) Udowodnić, że μ_V dzieli iloczyn $\mu_W \mu_{V/W}$.
b) Udowodnić, że jeśli μ_W i $\mu_{V/W}$ nie mają wspólnych czynników, to $\mu_V = \mu_W \mu_{V/W}$.
c) Podać przykład dla którego $\mu_V \neq \mu_W \mu_{V/W}$.

1.7 Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^7$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1) \quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$2) \quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz ϕ?

1.8 Załóżmy, że $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. (Wersja łatwiejsza $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem spełniającym $\phi^k = Id$ dla pewnego k niepodzielnego przez $char(\mathbb{K})$. Udowodnić, że w pewnej bazie macierz ϕ jest diagonalizowalna.

1.9 Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $B \in M_m(\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli $spec_{\mathbb{C}}(A) \cap spec_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$, to jedynym rozwiązaniem równania macierzowego $AX = XB$ jest macierz zerowa rozmiarów $n \times m$.

1.10 Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli $AB + BA = 0$ oraz równanie $AX + XA = B$ ma rozwiązanie, dla pewnej macierzy $X \in M_n(\mathbb{C})$, to macierz B jest nilpotentna.

1.11 Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ oraz $A \neq 0$. Określamy przekształcenie liniowe $T_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ wzorem

$$T_A(X) = AX - XA, \text{ dla } X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Pokazać, że:

(a) dla macierzy $B \neq 0$ mamy $AB = BA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_A T_B = T_B T_A$,

(b)* jeśli macierz A jest diagonalizowalna, to także endomorfizm T_A jest diagonalizowalny,

1.12 Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, ze $A^3 = A + I$ oraz że dla każdej takiej macierzy, $\det A > 0$.

Wskazówka: rzeczywista wartość własna jest dodatnia, a nierzeczywiste wystąpią w tej samej krotności.

1.13 Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Dane przekształcenia liniowe $f, g : V \to V$ takie, że $fg = gf$. Ponadto V jest cykliczna ze wzgledu na f (to znaczy istnieje taki wektor $v \in V$, że zbiór $\{v, f(v), f^2(v), \dots\}$ rozpina przestrzeń V . Wykaż, że $g = W(f)$ dla pewnego wielomianu W.

2 Przestrzenie afiniczne

2.1 Niech $char(\mathbb{K}) = 0$. Dane proste afiniczne w $\mathbb{K}^3$:

$$P_1 = [0, 0, 0] + lin\{(1, 1, 1)\}, \quad P_2 = [4, 2, 0] + lin\{(0, 0, 1)\},$$

$$L_1 = [-1, 0, 0] + lin\{(0, 0, 1)\}, \quad L_2 = [1, 0, 0] + lin\{(0, 1, 0)\}$$

oraz punkty $q = (5, 4, 5)$ i $r_s = [s, 0, 0]$ (zależny od parametru $s \in \mathbb{K}$). Dla jakiego s istnieje izomorfizm afiniczny przekształcający P_i na L_i $(i = 1, 2)$ oraz q na r_s?

2.2 Niech E będzie przestrzenią afiniczną, a F_1 i F_2 podprzestrzeniami. Załóżmy, że $TE = TF_1 + TF_2$. Udowodnić, że $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Wyrazić wymiar $F_1 \cap F_2$ za pomocą $\dim(F_1)$, $\dim(F_2)$ i $\dim(E)$.

2.3 Dane dwie podprzestrzenie afiniczne E i F wymiaru n w $\mathbb{K}^{2n+1}$. Załóżmy, że są one położone skośnie (tzn. $TE \cap TF = \{0\}$ i $E \cap F = \emptyset$). Ponadto dany punkt p nie należący do żadnej z tych podprzestrzeni.
a) Ile jest prostych afinicznych przechodzących przez p i przecinających E oraz F?
b) Czy każdą taką konfigurację (para przestrzeni i punkt) można przekształcić afinicznie na dowolną inną?

2.4 Niech $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ będzie przekształceniem afinicznym. Załóżmy, że dla każdej pary punktów $p, q \in \mathbb{K}^n$ takich, że $p \neq \phi(p)$ oraz $q \neq \phi(q)$ proste $L(p, \phi(p))$ oraz $L(q, \phi(q))$ są równoległe. Pokazać, że:

(a) jeśli $\phi \neq id$ oraz ϕ ma punkt stały, to wszystkie punkty stałe ϕ tworzą hiperpłaszczyznę w $\mathbb{K}^n$,

(b) jeśli ϕ nie ma punktów stałych to musi byc translacją tj. $T\phi = id$.

2.5 Dane jest przekształcenie afiniczne $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające:
$f([2, 2, 3]) = [3, 0, 4]$,
$f([1, 2, 4]) = [3, 3, 5]$,
$f([1, 2, 3]) = [0, 2, 2]$,
$f([1, 3, 3]) = [2, 5, 3]$.
Podać wzór analityczny. Znaleźć punkty, proste i płaszczyzny niezmiennicze.
Df ma dwie całkowite wartoći własne.

2.6 Niech E będzie przestrzenią afiniczną. Wykazać, że dwie pary rozłącznych podprzestrzeni afinicznych (H_1, H_2) i (H_1', H_2') są afinicznie równoważne (to znaczy istnieje izomorfizma afiniczny $E \to E$ dla którego $f(H_i) = H_i'$, $i = 1, 2$) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\dim H_1 = \dim H_1', \quad \dim H_2 = \dim H_2' \quad \text{oraz} \quad \dim af(H_1 \cup H_2) = \dim af(H_1' \cup H_2')\,.$$

2.7 Niech $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem afinicznym bez punktów stałych danym wzorem $\phi(x) = Ax+a$, dla pewnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dla $v \neq 0$ rozważamy zbiór $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + a = x + v\}$ (ma to sens, bo punkty przestrzeni afinicznej traktujemy jak wektory z $\mathbb{R}^n$). Pokazać, że H_v to podprzestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że $\phi(H_v) \subseteq H_v$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = v + u$, gdzie $v \in \ker(g), u \in \mathrm{im}(g)$, oraz $g(x) = (A - I)x$.

3 Przestrzenie rzutowe

3.1 Odwzorowanie $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ dane jest wzorem:

$$\phi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2].$$

Pokazać, że $\phi(\mathbb{P}^2) = V_{2,2}$, gdzie $V_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ jest wspólnym zbiorem zer wielomianów:

$$x_0x_1 - x_3^2, z_0z_5 - z_4z_3, z_0z_2 - z_4^2, z_3z_5 - z_4z_1, z_3z_2 - z_4z_5, z_1z_2 - z_5^2.$$

3.2 Odwzorowanie $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ dane jest wzorem:

$$\phi([x_0; x_1]) = [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \ldots : x_1^d].$$

Pokazać, że krzywa $V_{1,d} = \phi(\mathbb{P}^1)$ nie jest zawarta w żadnej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{P}^d$.

Uwaga. Odwzorowania występujące w dwóch powyższych zadaniach są szczegolnymi przypadkami tzw. odwzorowania Veronese. Powierzchnia $V_{2,2}$ i krzywe $V_{1,d}$ to szczególne przypadki tzw. rozmaitości Veronese.

3.3 Dane cztery proste w $\mathbb{K}^2$. Załóżmy, że żadne trzy z tych prostych nie przecinają się w jednym punkcie, oraz żadne trzy nie są równoległe. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające te proste na układ

$$L_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \,:\, x_1 = 0\}, \quad L_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \,:\, x_1 = 1\},$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \,:\, x_2 = 0\}, \quad L_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \,:\, x_2 = 1\}.$$

3.4 Dana kwadryka w $\mathbb{R}^2$ opisana równaniem: $3 + 8x - 8y + 2xy - 5y^2 = 0$? Znaleźć współrzędne rzutowe $\big(u, v\big) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, w których kawdryka ma postać $u^2 + v^2 = 1$, lub uzasadnić, że nie istnieją takie współrzędne.

4 Formy dwuliniowe

4.1 Dane macierze:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? (*Mówimy, że A i B są kongruentne nad $\mathbb{Q}$ jeśli istnieje macierz odwracalna C o współczynnikach wymiernych taka, że $A = C^TBC$.)*

4.2 Dane są macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Nad którymi z następujących ciał powyższe macierze są kongruentne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$?

4.3 Niech ϕ będzie dwuliniową formą na przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^4$ zadaną w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje baza, w której forma ϕ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Jeśli tak, to znaleźć taką bazę. Odpowiedź uzależnić od własności ciała $\mathbb{K}$.

4.4 Niech (V, ξ) będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, $\dim V = 6$, z dwuliniową formą nieosobliwą, a $W \subset V$ jej trójwymiarową podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną. Czy wynika z tego, że $W = W^{\perp}$?

4.5 Czy poniższe dwie macierze symetryczne $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ mogą być macierzami tej samej formy dwuliniowej ξ, tylko w różnych bazach przestrzeni $\mathbb{Z}_5^3$? Odpowiedź uzasadnić.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6 Dana jest symetryczna forma kwadratowa w $\mathbb{R}^6$. Wyznaczniki kolejnych kwadratowych podmacierzy umieszczonych w lewym górnym rogu są następujące: $-\ +\ 0\ 0\ 0\ +$. Jakiego typu może być ta forma?

4.7 Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna 4×4, której znaki minorów są następujące?
a) $-\,,\ +\,,\ 0\,,\ -$
b) $-\,,\ +\,,\ 0\,,\ +$
Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

4.8 Niech ϕ będzie niezdegenerowaną dwuliniową formą symetryczną na przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ o własności $W = W^{\perp}$. Udowodnić, że wtedy V jest parzystego wymiaru i w pewnej bazie ϕ ma macierz o postaci klatkowej $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, gdzie I jest macierzą jednostkową rozmiaru $\frac{\dim(V)}{2}$.

4.9 Niech A będzie symetryczną niezdegenerowaną macierzą kwadratową o wyrazach wymiernych. Udowodnić, że macierze

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$. (Powyżej macierz I oznacza macierz jednowtkową rozmiaru A.)

5 Proste pytania, odpowiedzi na które należy krótko uzasadnić

A. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa V nad ciaem $\mathbb{C}$ i endomorfizm $\varphi : V \to V$. Wiadomo, że φ ma tylko dwie wartości własne 0 i 1,

$$\dim(ker(\varphi^2)) < \dim(ker(\varphi^3)) = \dim(ker(\varphi^4))$$

oraz

$$\dim(ker(\varphi - Id)) < \dim(ker((\varphi - Id)^2)) = \dim(ker((\varphi - Id)^3)).$$

Jaki jest wielomian minimalny φ?

B. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem spełniającym $\varphi^3 = Id$, $\varphi \neq Id$. Jaki jest wielomian charakterystyczny φ?

C. Znaleźć część półprostą z rozkładu Jordana-Chevalleya endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{C}^7)$,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (z_7, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

D. Dana jest prosta afiniczna $L \subset \mathbb{Z}_3^4$. Ile jest płaszczyzn afinicznych w $\mathbb{Z}_3^4$ niezawierających L?

E. Czy złożenie dwóch rzutowań w przestrzeni afinicznej może nie mieć punktu stałego?