I kolokwium GAL II*

19.04.2018 r. Czas: 180min.

Zadanie 1 (6x10p) Należy udzielić odpowiedzi z krótkim uzasadnieniem.

(a) Dane jest przekształcenie liniowe $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$. Wiadomo przy tym, że $f^3 + f = 0$ i $f^3 \neq 0$. Jaki jest wielomian charakterystyczny tego przekształcenia?

(b) Dane są przekształcenia liniowe $f, g \in \mathrm{End}(V)$, przy czym $\dim(V) < \infty$. Wiemy, że $fg = gf$ oraz f jest diagonalizowalne, zaś g nilpotentne. Wyrazić $spec(f+g)$ za pomocą $spec(f)$ i $spec(g)$.

(c) Niech f będzie przekształceniem przestrzeni afinicznej spełniającym $f^7 = id$. Czy f ma punkt stały?

(d) Ile jest prostych w $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_7)$?

(e) Dana jest macierz symetryczna $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{Q})$. Wyznaczniki kolejnych minorów głównych A są równe 1/2, 4/5, -3, 7/8, 0. Podać przykład macierzy diagonalnej o współczynnikach z $\mathbb{Z}$, która jest kongruentna nad $\mathbb{Q}$ z A.

(f) Dany jest zbiór Q zadany równaniem $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5x_6 = 0$ w $\mathbb{R}^6$ oraz przestrzeń liniowa $W \subset Q$. Jaki może być maksymalnie wymiar W?

Zadanie 2 (40p)
Dane jest przekształcenie $\phi : \mathbb{K}^8 \to \mathbb{K}^8$. Wiemy, że wartości własne ϕ to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$1)\quad \dim(ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(ker((\phi - Id)^3)) \leq 4,$$

$$2)\quad \dim(ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(ker((\phi - 2Id)^3)) = 2.$$

Jak mogą wyglądać macierze ϕ w bazach Jordana tego endomorfizmu?

Zadanie 3 (50p)
Przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przeprowadza punkty

$$p_1 = (3,2,3), \quad p_2 = (4,2,3), \quad p_3 = (3,3,3), \quad p_4 = (3,2,4)$$

na odpowiednio

$$f(p_1) = (-5,2,4), \quad f(p_2) = (-8,2,4), \quad f(p_3) = (-4,-1,4), \quad f(p_4) = (-5,2,5).$$

Znaleźć punkty stałe oraz proste i płaszczyzny niezmiennicze przy przekształceniu f.

Zadanie 4 (50p)
Dane są 4 proste w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, które są parami rozłączne.
a) załóżmy, że trzy z nich są zawarte w kwadryce opisanej równaniem $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$, a czwarta nie jest zawarta w tej kwadryce. Ile jest różnych prostych w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ przecinających te dane cztery proste?
b) Udowodnić, że liczba różnych prostych przecinających cztery dane (parami rozłączne) proste w $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ jest równa conajwyżej dwa, albo jest nieskończona.

Zadanie 5 (50p)
Niech ϕ będzie niezdegenerowaną symetryczną formą 2-liniową w $\mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że istnieje podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^n$, taka że $W^\perp = W$. Dana jest baza $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ przestrzeni W.
1) Wykazać, że $n = 2m$.
2) Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ można dopełnić do bazy $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \qquad \text{gdzie } n = 2m\,,$$

tak, że

$$\phi(\beta_i, \beta_j) = 0, \quad \text{oraz} \quad \phi(\alpha_i, \beta_j) = \delta_i^j.$$