IMIĘ i NAZWISKO GRUPA

Zadanie 5 (6 x 20pt)

1. Proszę opisać wszystkie izometrie przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$, które mają dokładnie jeden punkt stały.

2. Proszę opisać wszystkie symetryczne, ortogonalne i dodatnio określone macierze o współczynnikach rzeczywistych.

3. Wykazać, że jeśli endomorfizm samosprzężony przestrzeni $\mathbb{C}^n$ jest nilpotentny, to jest zerowy.

4. Podać dowód, że jeśli endomorfizm przestrzeni unitarnej jest idempotentny (tzn $A^2 = A$) i normalny (tzn $AA^* = A^*A$) to jest samosprzężony.

5. Ile jest elementów z $SU(2)$, które są przemienne ze wszystkimi innymi elementami $SU(2)$?

6. Czy każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni $V \otimes W$ jest postaci $V_1 \otimes W_1$, gdzie V_1 to podprzestrzeń V, a W_1 to podprzestrzeń W? Odpowiedź uzasadnić.

DRUGIE KOLOKWIUM Z GALU z ★

Zadanie 1. (60pt)

W $\mathbb{R}^3$ jest zadana kwadryka równaniem:

$$x^2 + 5y^2 - 8xz + 8yz + 3z^2 + 10y + 8z = 1$$

(a) Znaleźć środek symetrii kwadryki.

(b) Znaleźć kierunki osi głównych kwadryki.

(c) Jaka jest postać kanoniczna formy ze względu na izometrie?

Wskazówka: macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

ma wielomian charakterystyczny równy $-t^3 + 9t^2 + 9t - 81$. *Wielomian ten ma całkowite pierwiastki.*

Zadanie 2. (50pt)

Definiujemy odwzorowanie $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ wzorem

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - d^*b\ ,\ da + bc^*).$$

Niech $(a, b)^\# = (a^*, -b)$.
Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{H}^2$ produkt $v \star v^\# \in \mathbb{H}^2$ jest postaci $(r, 0)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.
Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $v \in \mathbb{H}^2$ istnieje w taki, że $v \star w = w \star v = (1, 0)$.

Zadanie 3. (60pt)

Niech $f : V \to V'$ i $g : W \to W'$ będą przekształceniami liniowymi.

a) Udowodnić, że

$$ker(f \otimes g) = ker(f) \otimes W + V \otimes ker(g)\,.$$

b) Czy istnieje tensor prosty $v \otimes w \in ker(f \otimes g)$ taki, że $v \notin ker(f)$ i $w \notin ker(g)$?

Zadanie 4. Teoretyczne. (60pt)

Sformułować i udowodnić nierówność Schwarza w przestrzeni unitarnej.