Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL z ★ 2017 – Kolokwium I (1)

Zadanie 1. (10pt = 5 × 2pt)

Proste pytania, odpowiedzi na które należy krótko uzasadnić:

A. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa V nad ciaem $\mathbb{C}$ i endomorfizm $\varphi : V \to V$. Wiadomo, że φ ma tylko dwie wartości własne 0 i 1,

$$\dim(ker(\varphi^2)) < \dim(ker(\varphi^3)) = \dim(ker(\varphi^4))$$

oraz

$$\dim(ker(\varphi - Id)) < \dim(ker((\varphi - Id)^2)) = \dim(ker((\varphi - Id)^3)).$$

Jaki jest wielomian minimalny φ?

Odpowiedź: Największa klatka Jordana z wartoćią własną 0 ma rozmiar 3.
Największa klatka Jordana z wartoćią własną 1 ma rozmiar 2.
Zatem $\mu(t) = t^3(t-1)^2$.

B. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem spełniającym $\varphi^3 = Id$, $\varphi \neq Id$. Jaki jest wielomian charakterystyczny φ?

Odpowiedź:
Wielomian $f(t) = (t^3 - 1)$ rozkąda się nad $\mathbb{R}$ na czynniki $(t-1)(t^2+t+1)$. Wielomian minimalny dzieli $f(t)$. Zatem $\mu(t) = t - 1$ lub $\mu(t) = t^2 + t + 1$. W pierwszym przypadku $\phi = Id$, co jest wykluczone z założenia. W drugim przypadku $\mu(t) = t^2 + t + 1$ jest wielomianem charakterystycznym bo $\deg(\mu) = \dim V$.

C. Znależć część półprostą z rozkładu Jordana-Chevalleya endomorfizmu $\varphi \in End(\mathbb{C}^7)$,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = (z_7, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6).$$

Odpowiedź:
Mamy $\varphi^7 = Id$, zatem endomorfizm φ jest diagonalizowalny. Oznacza to, że φ jest równy swojej części półprostej.

D. Dana jest prosta afiniczna $L \subset \mathbb{Z}_3^4$. Ile jest płaszczyzn afinicznych w $\mathbb{Z}_3^4$ niezawierających L?

Odpowiedź: Wszystkich płaszczyzn jest

$$\frac{\#\{3 \text{ punkty afinicznie niezależne w } \mathbb{Z}_3^4\}}{\#\{3 \text{ punkty afinicznie niezależne na płaszczyźnie}\}} = \frac{3^4(3^4-1)(3^4-3)}{3^2(3^2-1)(3^2-3)}$$

Płaszczyzn zawierających prostą L jest tyle, ile kierunków w TE/TL tzn. $(3^3-1)/(3-1)$.
Odpowiedź 1170–13=1157.

E. Czy złożenie dwóch rzutowań w przestrzeni afinicznej może nie mieć punktu stałego?

Odpowiedź: Tak, wystarczy wziąć złożenie rzutowań na proste równoległe. Rzutowania powinny mieć różne kierunki rzutowania.

Zadanie 2. (10pt)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Dany jest endomorfizm $\varphi : V \to V$. Udowodnić, że jeśli $\dim V \geq 3$ to V zawiera podprzestrzeń φ – niezmienniczą W taką, że $0 < \dim W < \dim V$.

Odpowiedź: Zakładamy, że $V = \mathbb{R}^n$. Jeśli wielomian charakterystyczny ma rzeczywistą wartość własną, to szukaną przestrzenią niezmienniczą jest podprzestrzeń rozpięta przez wektor własny.

Jeśli wielomian charakterystyczny ma zespoloną, nierzeczywistą wartość własną λ, to rozpatrujemy rozszerzenie φ na $\mathbb{C}^n$ i tam znajdujemy wektor własny v. Wektor o sprzężonych współrzędnych $\overline{v}$ jest wektorem własnym dla $\overline{\lambda}$. Szukaną przestrzenią niezmienniczą jest podprzestrzeń rozpięta przez wektory

$$\mathrm{re}(v) = \tfrac{1}{2}(v + \overline{v}), \quad \mathrm{im}(v) = \tfrac{1}{2i}(v - \overline{v}).$$

Inne rozwiązanie (ładniejsze): Przypadek gdy φ nie ma rzeczywistej wartości własnej. Niech $\mu(t)$ będzie wielomianem minimalnym. Gdy $\mu(t)$ jest rozkładalny, np $\mu(t) = f(t)g(t)$, to $f(\varphi)$ nie jest izomorfizmem (gdyby był, to $g(\varphi) = 0$, co przeczy minimalności $\mu(t)$). Wtedy $ker(f(\varphi)$ jest szukaną podprzestrzenią niezmienniczą. Zostaje przypadek gdy $mu(t) = (t-a)^2 + b^2$. Wtedy przestrzeń rozpęta przez dowolny wektor v i $\varphi(v)$ jest φ–niezmiennicza.

Zadanie 3. (10pt)

Niech V będzie przestrzenią liniową (nad dowolnym ciałem), $\varphi \in End(V)$. Załóżmy, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą. Niech
μ_V będzie wielomianem minimalnym φ,
μ_W będzie wielomianem minimalnym $\varphi_{|W} : W \to W$,
$\mu_{V/W}$ będzie wielomianem minimalnym przekształcenia indukowanego $\overline{\varphi} : V/W \to V/W$.
a) Udowodnić, że μ_V dzieli iloczyn $\mu_W \mu_{V/W}$.
b) Udowodnić, że jeśli μ_W i $\mu_{V/W}$ nie mają wspólnych czynników, to $\mu_V = \mu_W \mu_{V/W}$.
c) Podać przykład dla którego $\mu_V \neq \mu_W \mu_{V/W}$.

Odpowiedź: a) Mamy

$$\mu_{V/W}(\varphi)(V) \subset W, \qquad \mu_W(\varphi)(W) = \{0\}.$$

Stąd

$$\mu_W(\varphi)(\mu_{V/W}(\varphi)(V)) = \{0\}.$$

Zatem $\mu_V(t)$ dzieli iloczyn $\mu_W(t)\mu_{V/W}(t)$.

b) Mamy $\mu_V(\phi_{|W}) = \mu_V(\phi)_{|W} = 0$, więc $\mu_W(t)|\mu_V(t)$.
Podobnie $\mu_V(\overline{\varphi}) = 0 \in End(V/W)$, więc $\mu_{V/W}(t)|\mu_V(t)$.
Skoro oba dzielniki są względnie pierwsze, to ich iloczyn dzieli $\mu_V(t)$. Z a) mamy równość.

c) Np $V = \mathbb{K}^2$, $W = \mathrm{lin}\{(1,0)\}$, $\varphi = Id$.

Zadanie 4. (10pt)

Dane jest przekształcenie afiniczne $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające:
$f([2,2,3]) = [3,0,4]$,
$f([1,2,4]) = [3,3,5]$,
$f([1,2,3]) = [0,2,2]$,
$f([1,3,3]) = [2,5,3]$.
Podać wzór analityczny. Znaleźć punkty, proste i płaszczyzny niezmiennicze.

Df ma dwie całkowite wartoći własne.

Odpowiedź:
Macierzą $D\varphi$ w bazie stadardowej jest

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jej wielomianem charakterstycznym jest $-(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ a postacią Jordana w bazie $\alpha_1=(-1,-2,2)$, $\alpha_2=(5,-5,5)$, $\alpha_3=(1,3,0)$ jest

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&1\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

Postać analityczna φ to

$$\varphi([x,y,z])=[-16+3x+2y+3z,-5-2x+3y+z,-11+2x+y+3z].$$

Podprzestrzeń $H=p+T(H)$ jest φ niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $\omega(p,\varphi(p))\in T(H)$
2. $T(H)$ jest $D\varphi$ liniową podprzestrzenią niezmienniczą.

W naszym przypadku liniowe właściwe podprzestrzenie niezmiennicze, to $E_0=\{0\}$, $E_1=\text{lin}\{\alpha_1\}$, $E_2=\text{lin}\{\alpha_2\}$, $E_3=\text{lin}\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $E_4=\text{lin}\{\alpha_2,\alpha_3\}$.
Wygodnie będzie przeprowadzać obliczenia w układzie bazowym $[0,0,0]$, α_1, α_2, α_3. Niech $p=[0,0,0]+\beta$ i niech Warunek 1) oznacza: $\omega(p,\varphi(p))=(-16,-5,-11)+D\varphi(\beta)-\beta\in E_i$. Niech $(-16,-5,-11)=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3$. Pozostawiając czytelnikowi znalezienie tych współczynników, zauważmy tylko, że $a\neq 0$. Jeżeli $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$, to warunek 1) przyjmuje postać:

$$(a,b,c)+(0,3x_2+x_3,3x_3)\in E_i,\quad i=0,1,2,3,4.$$

Mamy więc:

- $(a,3x_2+x_3+b,3x_3+c)\in\{0\}$, co jest sprzeczne - nie ma więc punktów stalych.
- $(a,3x_2+x_3+b,3x_3+c)\in\text{lin}\{(1,0,0)\}$ daje prostą niezmienniczą $t\alpha_1+\frac{3c+b}{9}\alpha_2-\frac{c}{3}\alpha_3$.
- $(a,3x_2+x_3+b,3x_3+c)\in\text{lin}\{(0,1,0)\}$ co jest sprzeczne - nie ma więc prostej niezmienniczej o przestrzeni stycznej E_2.
- $(a,3x_2+x_3+b,3x_3+c)\in\text{lin}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, co oznacza zerowanie się wyznacznika

$$det\begin{bmatrix}a&3x_2+x_3+b&3x_3+c\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=3x_3+c=0$$

  co daje niezmienniczą płaszczyznę $H=[s,t,-\frac{c}{3}]$ o przestrzeni stycznej E_3. Wracając do współrzędnych początkowych $H=\{s\alpha_1+t\alpha_2-\frac{c}{3}\alpha_3\mid s,t\in\mathbb{R}\}=\{(\frac{16}{9}-s+5t,\frac{16}{3}-2s-5t,2s+5t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$
- $(a,3x_2+x_3+b,3x_3+c)\in\text{lin}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ co oznacza zerowanie się wyznacznika

$$det\begin{bmatrix}a&3x_2+x_3+b&3x_3+c\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=a=0$$

  i jest to sprzeczne. Nie ma więc niezmienniczej płaszczyzny o przestrzeni stycznej E_4.

Szukanie płaszczyzn za pomocą sprzężonej przestrzeni rzutowej.
Współczynniki równań niezmienniczych hipepłaszczyzn w $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, to wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix}1&-16&-5&-11\\0&&&\\0&&A^T&\\0&&&\end{bmatrix},$$

czyli $(-16, 0, 3, 3)$ (dla wartości własnej 4), $(1, 0, 0, 0)$ (dla wartości własnej 1). Pierwszy wektor daje równanie $-16 + 3y + 3z = 0$, drugi płaszczyznę w nieskończoności.

Zadanie 5. (10pt)

Niech E będzie przestrzenią afiniczną. Wykazać, że dwie pary rozłącznych podprzestrzeni afinicznych (H_1, H_2) i (H_1', H_2') są afinicznie równoważne (to znaczy istnieje izomorfizma afiniczny $E \to E$ dla którego $f(H_i) = H_i'$, $i = 1, 2$) wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\dim H_1 = \dim H_1', \quad \dim H_2 = \dim H_2' \quad \text{oraz} \quad \dim af(H_1 \cup H_2) = \dim af(H_1' \cup H_2').$$

Odpowiedź: $\Rightarrow$ oczywiste.
Dowód $\Leftarrow$: Niech $H_i = p_i + V_i$, $H_i' = p_i' + V_i'$ dla $i = 1, 2$. Niech:
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą $V_1 \cap V_2$,
$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ będzie dopełnieniem do bazy V_1,
$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ będzie dopełnieniem do bazy V_2.
Wszystkie te wektory tworzą bazę $V_1 \oplus V_2$. Wraz z wektorem $\omega(p_1, p_2)$ dostajemy bazę $T(af(H_1 \cup H_2))$. (Z zadnia domowego wiemy, że $\dim af(H_1 \cup H_2) = \dim(V_1 + V_2) + 1$.) Całość dopełniamy do bazy E wektorami $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$. Podobnie postępujemy z przestrzeniami V_1' i V_2'. Szukane przekształcenie zdefiniowane jest przez warunki $\varphi(p_1) = p_1'$, oraz $D\varphi(\alpha_i) = \alpha_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, $D\varphi(\beta_j) = \beta_j'$ $(j = 1, \ldots, m)$, $D\varphi(\gamma_k) = \gamma_k'$ $(k = 1, \ldots, r)$, $D\varphi(\delta_\ell) = \delta_\ell'$ $(\ell = 1, \ldots, s)$, $D\varphi(\omega(p_1, p_2)) = \omega(p_1', p_2')$.