IMIĘ i NAZWISKO GRUPA

Zadanie 5 (5 x 3pt). Odpowiedzi należy uzasadnić.

1. Dana jest forma symetryczna w $(\mathbb{Z}_5)^5$ zadana przez macierz B. Wyznaczniki kolejnych minorów B to $1, 2, 3, 4, 0$. Jaka jest postać diagonalna tej formy?

2. Proszę opisać wszystkie izometrie przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$, które mają dokładnie jeden punkt stały.

3. Czy każde przekształcenie przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ musi mieć punkt stały?

4. Zastosować ortogonalizację Grama-Schmidta do wektorw $\alpha_1 = (3,4,0)$, $\alpha_1 = (6,8,1)$, $\alpha_3 = (0,1,1)$ w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

5. Dana jest forma dwuliniowa zadana w $\mathbb{R}^3$ przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Podać przykład wektora v takiego, że rozważana forma na przestrzeni $lin\{v\}^\perp$ jest dodatnio określona.

Zadanie 1. (15pt)

Niech $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ będzie niezdegenerowaną formą symetryczną. Załóżmy, że $W \subset V$ jest podprzestrzenią o wymiarze k taką, że ϕ obcięte do $W \times W$ nie jest formą zerową. Udowodnić, że istnieje podprzestrzeń Z zawierająca W taka, że $\dim Z \leq 2k-1$ oraz forma ϕ obcięta do $Z \times Z$ jest niezdegenerowana.

Zadanie 2. (10pt)

Niech $\mathbb{H}$ oznacza zbiór kwaternionów. Definiujemy odwzorowanie $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ wzorem

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - d^*b \ , \ da + bc^*).$$

Niech $(a,b)^\# = (a^*, -b)$.
Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{H}^2$ produkt $v \star v^\# \in \mathbb{H}^2$ jest postaci $(r, 0)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$.
Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $v \in \mathbb{H}^2$ istnieje w taki, że $v \star w = w \star v = (1, 0)$.

Zadanie 3. (15pt)

Dana jest forma kwadratowa zadana w $\mathbb{R}^3$ przez macierz

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wiadomo, że wielomian charakterystyczny macierzy B jest równy $-t^3 + 3t^2 + t - 3$ (ma on całkowite pierwiastki).

(a) Znaleźć maksymalny wymiar podprzestrzeni izotropowej (tzn takiej, na której forma jest równa zero)

W $\mathbb{R}^3$ kwadryka jest zadana równaniem:

$$26 - 6(2x - y + 2z) + \frac{1}{3}(5x^2 + y^2 + 8xz - 8yz + 3z^2) = 0$$

(b) Znaleźć środek symetrii tej kwadryki

(c) Znaleźć postać kanoniczną równania kwadryki ze względu na izometrie.

(d) Ustalić, czy kwadryka ta jest rzutowo równoważna z parabolidą eliptyczną opisaną rwnaniem $x^2 + y^2 - 2z = 0$

Zadanie 4. (15pt)

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem hermitowskim i niech $A \in End(V)$. Załóżmy, że endomorfizm A^* jest przemienny z A. Udowodnić, że endoomrfizm A jest diagonalizowalny.