GAL* - KOLOKWIUM II (20 V)

1. W przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są wektory $\alpha_1 = (1,1,1,0)$ i $\alpha_2 = (1,-1,0,2)$. Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$.

(a) Podać przykład izometrii $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takiej, że $f(W) = W^\perp$. Należy podać macierz w bazie standardowej.

(b) Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}^4$ niech T_α będzie zbiorem izometrii f takich, że $f(W) = W^\perp$ oraz $f(\alpha) = \alpha$. Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k rozstrzygnąć, czy dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}^4$ zbiór T_α ma dokładnie k elementów. Czy zbiór T_α może być nieskończony?

2. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie podprzestrzenią afiniczną zadaną równaniem

$$2x - y + z = 6,$$

$p_0 = p_4 = (1,0,1)$, $p_1 = (0,1,2)$, $p_2 = (-1,0,0)$, $p_3 = (0,0,1)$ i niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $f(p_i) = p_{i+1}$ dla $i \in \{0,1,2,3\}$.

(a) Znaleźć wzór na f.

(b) Znaleźć równanie $f(A)$.

3. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze przekształcenia afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie

$$f(x,y,z) = (3x + 4y + 10, -4x + 3y, z + 1).$$

4.

(a) Niech $f : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie przekształceniem zadanym przez standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$. Znaleźć bazę $\ker(f)$.

(b) Dane są macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\det(A) = a$, $\det(B) = b$. Obliczyć wyznacznik macierzy $A \otimes B \in M_{n^2\times n^2}(\mathbb{C})$.

5. Dla ciała K niech $KP^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ oznacza n-wymiarową przestrzeń rzutową.

(1) Udowodnić, że każdy automorfizm rzutowy $\mathbb{P}(\mathbb{R}^7) = \mathbb{R}P^6$ ma punkt stały.

(2) Niech $\mathbb{F}_7$ będzie ciałem 7-elementowym. Rozstrzygnąć, czy istnieje automorfizm rzutowy $\mathbb{F}_7P^2$ który nie ma punktów niezmienniczych ani prostych niezmienniczych.