GAL* - Egzamin (25 VI)

1. (30 pkt.) Przedstawić macierz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
w postaci iloczynu BC, gdzie B jest macierzą unitarną, a C macierzą górnotrójkątną.

2. (20+20 pkt.) W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ z naturalnym iloczynem hermitowskim dana jest podprzestrzeń
$$V = \{(z_1, z_2, z_3) : \ z_1 + (1+i)z_2 + (2-i)z_3 = 0\}.$$
(a) Znaleźć bazę ortonormalną $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ taką, że $\mathrm{lin}(\beta_1, \beta_2) = V$.
(b) Niech M będzie zbiorem izometrii $\mathbb{C}^3$, które są stałe na V i niech
$$S = \{f(1,0,0) : \ f \in M\}.$$
Znaleźć hiperpowierzchnię H w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ ze standardowym iloczynem skalarnym, która jest izometryczna z S.

3. (15+15 pkt.) Niech K będzie dowolnym ciałem, A przestrzenią afiniczną nad K wymiaru $n > 1$, a $f : A \to A$ endomorfizmem afinicznym o następującej własności: dla każdych dwóch punktów $p, q \in A$ istnieją liczby naturalne k, l takie, że $f^k(p) = f^l(q)$.
(a) Udowodnić, że jeśli $K = \mathbb{R}$, to dla pewnego $m \leqslant n$ przekształcenie f^m jest stałe.
(b) Rozstrzygnąć, czy tak musi być dla dowolnego ciała.

GAL* - Egzamin (25 VI)

4. (20+20 pkt.) Dla ustalonego $n > 1$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dana jest forma kwadratowa

$$q_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j.$$

(a) Znaleźć bazę ortogonalną $\mathbb{R}^4$ formy q_4.
(b) Dla dowolnego n znaleźć sygnaturę formy q_n.

5. (15+15 pkt.) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dany jest podzbiór

$$B = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + 2xy + 4yz + 2x + 4y - 2z + 1 = 0\}.$$

(a) Znaleźć środek symetrii B.
(b) Obliczyć odległość zbioru B od jego środka symetrii.

6. (30 pkt.) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ skończonego wymiaru z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Udowodnić, że na przestrzeni sprzężonej V^* istnieje iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ taki, że dla każdego $f \in V^*$ zachodzi

$$\langle f, f \rangle^* = \sup_{\alpha \in V \setminus \{0\}} \left(\frac{f(\alpha)}{\|\alpha\|} \right)^2 .$$