GAL*, Kolokwium 3 2015-05-26

Zadanie 1
Niech $t \in \mathbb{R}$ i niech $f_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (2x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + 2x_2y_2 + 2(x_2y_3 + x_3y_2) + tx_3y_3).$$

(a) Dla jakich wartości parametru t funkcja f_t zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^3$?

(b) Znaleźć wzór na rzut prostopadły na płaszczyznę $x_3 = 0$ z iloczynem skalarnym f_3.

Zadanie 2
Dana jest forma kwadratowa na $\mathbb{R}^3$

$$q(x, y, z) = y^2 + xy - xz + yz.$$

(a) Znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$ w której q jest zadana macierzą diagonalną.

(b) Znaleźć wymiar podprzestrzeni rozpiętej przez wektory izotropowe.

Zadanie 3
Czy istnieje rodzina funkcji ciągłych $a_{ij}(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2\}$ taka, że $A_0 = I$, $A_1 = -I$, gdzie

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

oraz dla każdego $t \in [0, 1]$ macierz A_t jest

(a) symetryczna,

(b) ortogonalna.

Zadanie 4
W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dany jest zbiór

$$W = \mathrm{conv}\{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, -2), (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})\}$$

(a) Obliczyć $d = \dim(\mathrm{af}(W))$,

(b) Znaleźć d-wymiarową miarę zbioru W.

Zadanie 5
Dane są wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^k$. Załóżmy, że dla $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ dla $i \neq j$. Udowodnić, że układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ jest liniowo niezależny.

Za każde zadanie można zdobyć 6 punktów.