GAL*, Kolokwium 2 2015-04-28

Zadanie 1
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie podobieństwem o środku $(1,1,2)$ i skali 5, a $H \subset \mathbb{R}^3$ płaszczyzną opisaną równaniem $x - y + 3z = 2$.

(a) Opisać f wzorem.

(b) Opisać równaniem $f(H)$.

Zadanie 2
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane wzorem

$$f(x, y, z) = (3x + 2z + 1, -x + 2y + 5z - 1, x + 4z + 3).$$

Podać przykład płaszczyzny niezmienniczej dla f.

Zadanie 3
Niech K będzie dowolnym ciałem. Znaleźć bazę i obliczyć wymiar podprzestrzeni

$$W = \mathrm{lin}\{\alpha \otimes \alpha : \ \alpha \in K^n\} \subseteq K^n \otimes K^n.$$

Zadanie 4
Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ razy}} = id_{\mathbb{C}^n}$ dla pewnej liczby $k > 0$. Udowodnić, że istnieje układ afinicznie niezależny $(p_0, \ldots, p_n)$ taki, że $f(\mathrm{af}(p_0, p_i)) \subseteq \mathrm{af}(p_0, p_i)$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n$.

Zadanie 5
Niech $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ będą wielościanami wypukłymi.

(a) Udowodnić, że zbiór

$$\mathrm{map}(K, L) := \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : f \text{ jest przekształceniem afinicznym oraz } f(K) \subseteq L\}$$

jest wielościanem wypukłym w przestrzeni przekształceń afinicznych z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$.

(b) Znaleźć wszystkie wierzchołki wielościanu $\mathrm{map}(K, L)$ jeśli

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}, \qquad L = \{z \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Za każde zadanie można zdobyć 6 punktów.