GAL*, Egzamin 2015-06-26

Zadanie 1
Udowodnić, że każda macierz odwracalna nad $\mathbb{C}$ jest kwadratem pewnej macierzy. Podać przykład pokazujący, że dla macierzy nieodwracalnych nie jest to prawdą.

Zadanie 2
Przedstawić macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

w postaci iloczynu $A = BC$, gdzie B jest macierzą unitarną, a C macierzą górnotrójkątną.

Zadanie 3
Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ podać przykład afinicznego automorfizmu $\mathbb{R}^n$, który nie ma prostych niezmienniczych, ani punktów niezmienniczych.

Zadanie 4
W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ dany jest zbiór $A = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sklasyfikować (z dokładnością do izomorfizmu afinicznego) wszystkie zbiory postaci $f^{-1}(A)$, gdzie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym.

Zadanie 5
Niech q będzie formą dwuliniową o macierzy Grama

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Znaleźć wymiar maksymalnej podprzestrzeni izotropowej dla q jako formy nad a) $\mathbb{F}_5$, b) $\mathbb{F}_7$.

Zadanie 6
Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech dane będą homomorfizmy $I : V^* \otimes V \to \mathrm{End}(V)$, $I(f \otimes \alpha)(\beta) = f(\alpha)\beta$ oraz $E : V^* \otimes V \to K$, $E(f \otimes \alpha) = f(\alpha)$. Sprawdzić, że I jest izomorfizmem. Następnie wykazać, że odwzorowanie $F : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to K$ zadane wzorem $F(f, g) = E(I^{-1}(f \circ g))$ jest symetryczną formą dwuliniową.

Za każde zadanie można zdobyć maksymalnie 25 punktów.