GAL*, Kolokwium II

1. Dana przestrzeń liniowa zespolona z iloczynem hermitowskim (lub rzeczywista z iloczynem skalarnym). Zakładamy, że wymiar przestrzeni jest skończony. Niech A będzie operatorem samosprzężonym, dodatno określonym. Udowodnić, że $A = exp(B)$ dla pewnego operatora samosprzężonego B. Ponadto taki B jest wyznaczony jednoznacznie.

2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że Df ma macierz

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

w bazie standardowej oraz $f(0,0,0) = (2,3,2)$. Wykazać, że f jest izometrią. Jakiego typu jest to izometria (podać oś obrotu lub płaszczyznę symetrii, wektor przesunięcia, kosinus kąta obrotu itp)?

3. Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Ustalona jest liczba $0 < k < \dim V$. Udowodnić, że jeśli przekształcenie afiniczne przestrzeni V zachowuje miarę k-wymiarowych rownóległoboków, to jest izometrią.

4. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozważamy formę dwuliniową ϕ zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Przypuśćmy, że endomorfizm A zachowuje formę ϕ. Niech $A = PQ$ będzie rozkładem polarnym (tzn P samosprzężony, dodatnio określony, $Q^TQ = I$). Wykazać, że P i Q zachowują ϕ.

5. Definiujemy działanie na parach kwaternionów:

$$m((a,b),(c,d)) = (ac - d^*b, da + bc^*)$$

Wskazać, dla każdej pary (a,b) różnej od $(0,0)$ parę (c,d), taką, że $m((a,b),(c,d)) = (1,0)$ oraz $m((c,d),(a,b)) = (1,0)$.

6. Teoretyczne: Niech V, W, Z będą przestrzeniami liniowymi nad ustalonym ciałem. Podać konstrukcję izomorfizmu $L(V \otimes W, Z) \to L(V, L(W,Z))$, która jest niezależna od wyboru baz.