

GAL z * 2014: Pierwsze kolokwium

Rowiązania kaźdego zadania proszę napisać na oddzielnej kartce.

1. Wykaź, że dla kaźdej liczby naturalnej n istnieje macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ taka, że $A^3 = A + I$ oraz że dla kaźdej takiej macierzy, $\det A > 0$.

2. Niech V będie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbf{K} , $\dim V < \infty$. Dane przekształcenia liniowe $f, g : V \rightarrow V$ takie, że $fg = gf$. Ponadto V jest cykliczna ze względu na f (to znaczy istnieje taki wektor $v \in V$, że zbiór $\{v, f(v), f^2(v), \dots\}$ rozpiną przestrzeń V). Wykaź, że $g = W(f)$ dla pewnego wielomianu W .

3) Dane są proste $E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3$ w \mathbf{K}^3 takie, że

$$T(E_1) + T(E_2) + T(E_3) = T(F_1) + T(F_2) + T(F_3) = T(\mathbf{K}^3)$$

oraz

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \emptyset.$$

Zbadaj, czy istnieje izomorfizm afiniczny $f : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$ taki, że $f(E_i) = F_i$ dla $i = 1, 2, 3$.

4) Dane cztery proste w \mathbf{K}^2 . Załóźmy, że żadne trzy z tych prostych nie przecinają się w jednym punkcie, oraz żadne trzy nie są równoległe. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające te proste na układ

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 : x_1 = 0\}, & L_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 : x_1 = 1\}, \\ L_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 : x_2 = 0\}, & L_4 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2 : x_2 = 1\}. \end{aligned}$$

5) Dane macierze $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Które pary

tych macierzy są kongruentne nad ciałem: a) \mathbf{Q} , b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, c) \mathbf{R} , d) \mathbf{C} ?

6) TEORETYCZNE. Podać dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona (przy założeniu, że przekształcenie ma macierz górnotrójkątną w pewnej bazie, lecz nie stosując twierdzenia Jordana).