GAL Kolokwium 4, 29 maja 2017, **Temat A**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest płaszczyzna

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$$

oraz proste $K = (2.0, 1) + \mathrm{lin}((0, -2, 1))$ i L opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

(a) Znaleźć rzut prostopadły prostej K na płaszczyznę M.

(b) Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L.

Zadanie 2. [18 pt]

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3, 2x_1 + 2x_2 + sx_3, tx_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3)$$

jest izometrią afiniczną (w $\mathbb{R}^3$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny)?

b) Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ i $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((1, 0, 1))$ będą odpowiednio płaszczyzną i prostą w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć wszystkie punkty $g(q)$, gdzie $q = (3, 0, -1)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest taką izometrią, że $g(M) = M$ oraz $g(p) = p$ dla każdego $p \in L$.

Zadanie 3. [10 pt]

(a) Pokazać, że jeżeli $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ jest układem prostopadłym niezerowych wektorów liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, <\ ,\ >)$, to układ ten jest liniowo niezależny.

(a) Pokazać, że jeżeli $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ jest bazą prostopadłą podprzestrzeni W liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, <\ ,\ >)$, to wektor

$$\frac{<\alpha_1, \alpha>}{<\alpha_1, \alpha_1>}\alpha_1 + \frac{<\alpha_2, \alpha>}{<\alpha_2, \alpha_2>}\alpha_2 + ... + \frac{<\alpha_k, \alpha>}{<\alpha_k, \alpha_k>}\alpha_k$$

jest rzutem prostopadłym wektora $\alpha \in V$ na W.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 4, 29 maja 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. [18 pt] Niech $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie taką forma dwuliniową, że jej macierz w bazie stardardowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ma postać:

$$G(h; \mathrm{st}) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^4, h)$ jest euklidesowa?

b) Niech $W = \mathrm{lin}((1,0,0,0),(1,0,0,1))$. W zależności od $s, t \in \mathbb{R}$ znaleźć macierz diagonalną $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, gdzie $a, b \in \{-1, 0, 1\}$, która (w odpowiedniej bazie przestrzeni W) jest macierzą formy $h|_{W \times W} : W \times W \to \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Niech $(H, < \, , \, >)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru $n > 2$ i niech $P \subset H$ będzie płaszczyzną. Czy jest prawdą, że dla każdego punktu $p \in P$ istnieje dokładnie jedna podprzestrzeń afiniczna $M \subset H$ wymiaru $n-2$ prostopadła do P taka, że $M \cap P = \{p\}$?

2. Niech $(V, < \, , \, >)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową wymiaru n. Dla jakich k złożenie k symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni $W_1, W_2, ..., W_k$ wymiaru $n-1$ zmienia orientację przestrzeni V?

3. Niech $(V, < \, , \, >)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą prostopadłą (niekoniecznie ortonormalną) przestrzeni V. Czy jest prawdą, że jeżeli macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ endomorfizmu $\phi : V \to V$ w bazie $\mathcal{A}$ jest symetryczna, to ϕ jest endomorfizmem samosprzężonym?

4. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową wymiaru 4. Czy może istnieć baza przestrzeni liniowej V złożona wyłącznie z wektorów izotropowych?

5. Załóżmy, że macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są podobne. Czy jest prawdą, że A, B są kongruentne?

6. Załóżmy, że $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ są takimi wektorami liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, <, >)$ wymiaru n, że wyznacznik Grama $W(\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ jest równy 0. Czy wyznacznik Grama $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ może być różny od zera?

Zadanie 6. [18 pt]
Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n \geqslant 3$ nad $\mathbb{R}$ i niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie nieosobliwą dwuliniową formą symetryczną.

a) Niech V_+, V_- będą takimi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V, że $h(\alpha, \alpha) > 0$, $h(\beta, \beta) < 0$, oraz $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych niezerowych wektorów $\alpha \in V_+$, $\beta \in V_-$. Pokazać, że istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ wymiaru $\min(\dim V_+, \dim V_-)$ taka, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych $\alpha, \beta \in W$.

b) Załóżmy, że W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V wymiaru 2 oraz, że istnieją $\alpha, \beta \in W$ takie, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$. Udowodnić, że istnieje podprzestrzeń $U \supset W$ wymiaru 3 przestrzeni V taka, że $h|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{R}$ jest nieosobliwą formą dwuliniową.

GAL Kolokwium 4, 29 maja 2017, **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest płaszczyzna

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

oraz proste $K = (1.0, 2) + \mathrm{lin}((1, -2, 0))$ i L opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

(a) Znaleźć rzut prostopadły prostej K na płaszczyznę M.

(b) Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L.

Zadanie 2. [18 pt]

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(sx_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3, -2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + tx_3 - 3)$$

jest izometrią afiniczną (w $\mathbb{R}^3$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny)?

b) Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ i $L = (0, 0, 1) + \mathrm{lin}((1, 1, 0))$ będą odpowiednio płaszczyzną i prostą w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć wszystkie punkty $g(q)$, gdzie $q = (-1, 3, 2)$ i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest taką izometrią, że $g(M) = M$ oraz $g(p) = p$ dla każdego $p \in L$.

Zadanie 3. [10 pt]

(a) Pokazać, że jeżeli $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ jest układem prostopadłym niezerowych wektorów liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, < , >)$, to układ ten jest liniowo niezależny.

(a) Pokazać, że jeżeli $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ jest bazą prostopadłą podprzestrzeni W liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, < , >)$, to wektor

$$\frac{< \alpha_1, \alpha >}{< \alpha_1, \alpha_1 >}\alpha_1 + \frac{< \alpha_2, \alpha >}{< \alpha_2, \alpha_2 >}\alpha_2 + ... + \frac{< \alpha_k, \alpha >}{< \alpha_k, \alpha_k >}\alpha_k$$

jest rzutem prostopadłym wektora $\alpha \in V$ na W.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 4, 29 maja 2017, **Temat B**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. [18 pt] Niech $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie taką forma dwuliniową, że jej macierz w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ma postać:

$$G(h;\mathrm{st}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^4, h)$ jest euklidesowa?

b) Niech $W = \mathrm{lin}((1,0,0,0),(1,0,0,1)$. W zależności od $s, t \in \mathbb{R}$ znaleźć macierz diagonalną $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, gdzie $a, b \in \{-1, 0, 1\}$, która (w odpowiedniej bazie przestrzeni W) jest macierzą formy $h|_{W\times W} : W \times W \to \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:

1. Niech $(H, < \ , \ >)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru $n > 2$ i niech $P \subset H$ będzie płaszczyzną. Czy jest prawdą, że dla każdego punktu $p \in P$ istnieje dokładnie jedna podprzestrzeń afiniczna $M \subset H$ wymiaru $n-2$ prostopadła do P taka, że $M \cap P = \{p\}$?

2. Niech $(V, <,>)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową wymiaru n. Dla jakich k złożenie k symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni $W_1, W_2, ..., W_k$ wymiaru $n-1$ zmienia orientację przestrzeni V?

3. Niech $(V, < \ , \ >)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą prostopadłą (niekoniecznie ortonormalną) przestrzeni V. Czy jest prawdą, że jeżeli macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ endomorfizmu $\phi : V \to V$ w bazie $\mathcal{A}$ jest symetryczna, to ϕ jest endomorfizmem samosprzężonym?

4. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową wymiaru 4. Czy może istnieć baza przestrzeni liniowej V złożona wyłącznie z wektorów izotropowych?

5. Załóżmy, że macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są podobne. Czy jest prawdą, że A, B są kongruentne?

6. Załóżmy, że $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ są takimi wektorami liniowej przestrzeni euklidesowej $(V, < \, , \, >)$ wymiaru n, że wyznacznik Grama $W(\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ jest równy 0. Czy wyznacznik Grama $W(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$ może być różny od zera?

Zadanie 6. [18 pt]
Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n \geqslant 3$ nad $\mathbb{R}$ i niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie nieosobliwą dwuliniową formą symetryczną.

a) Niech V_+, V_- będą takimi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V, że $h(\alpha, \alpha) > 0$, $h(\beta, \beta) < 0$, oraz $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych niezerowych wektorów $\alpha \in V_+$, $\beta \in V_-$. Pokazać, że istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ wymiaru $\min(\dim V_+, \dim V_-)$ taka, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych $\alpha, \beta \in W$.

b) Załóżmy, że W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V wymiaru 2 oraz, że istnieją $\alpha, \beta \in W$ takie, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$. Udowodnić, że istnieje podprzestrzeń $U \supset W$ wymiaru 3 przestrzeni V taka, że $h|_{U\times U} : U \times U \to \mathbb{R}$ jest nieosobliwą formą dwuliniową.