GAL Kolokwium 3, 10 kwietnia 2017, **Temat A, Rozwiązania zadań**

Zadanie 1. [18 pt]

Niech $A_t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & t \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć postać Jordana macierzy A_t dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

(b) Wyznaczyć bazę Jordana dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A_0$.

Rozwiązanie (a). Macierze A_t są w postaci blokowo-trójkątnej. Zatem ich wielomian charakterystyczny $w_{A_t}(\lambda)$ jest postaci $\det(A_t - \lambda I_4) = ((3-\lambda)(5-\lambda)+1)(4-\lambda)^2 = (4-\lambda)^4$. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu liczba klatek Jordana w postaci Jordana J_t macierzy A_t odpowiadających wartości własnej λ_0 wielkości nie mniejszej niż $k \times k$ równa jest $q_k = r(A_t - \lambda_0 I_4)^{k-1} - r(A_t - \lambda_0 I_4)^k$, dla $k \geqslant 1$. W naszym przypadku jedyną wartością własną wielomianu charakterystycznego $w_{A_t}(\lambda)$ jest liczba 4. Mamy też:

$$A_t - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & t \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_t - 4I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4+t & -t+1 \\ 0 & 0 & 5 & -t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem, w zależności od t, mamy:

$$r(A_t - 4I_4) = \begin{cases} 3, & \text{dla } t \neq 1 \\ 2, & \text{dla } t = 1 \end{cases}, \quad r((A_t - 4I_4)^2) = \begin{cases} 2, & \text{dla } t \neq 1 \\ 1, & \text{dla } t = 1 \end{cases}.$$

Oczywiście $r(A_t - 4I_4)^0 = 4$, dla każdego t. A zatem:

- dla $t \neq 1$ mamy $q_1 = 1$, a więc istnieje dokładnie jedna klatka Jordana w macierzy J_t i ma ona postać:

$$J_t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

- dla $t - 1$ mamy $q_1 = 2$ oraz $q_2 = 1$, a zatem macierz J_1 składa się z dwóch klatek, z których tylko jedna ma rozmiar przynajmniej 2×2. Biorąc pod uwagę rozmiar macierzy J_1 widzimy, że musi mieć ona postać (z dokładnością do kolejności bloków):

$$J_t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Uwaga, która może się przydać na egzaminie ustnym. Macierze A_t mają współczynniki rzeczywiste, a nie zespolone. Macierze endomorfizmów przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nie muszą mieć postaci Jordana. Student powinien znać przykłady takich endomorfizmów i umieć wyjaśnić na egzaminie ustnym kiedy wolno stosować twierdzenie Jordana w przypadku, gdy mamy do czynienia z endomorfizmami przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$, gdzie $\mathbb{K}$ nie jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Rozwiązanie (b). Postać Jordana J_0 macierzy A_0 to, zgodnie z rozwiązaniem punktu (a), macierz postaci:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Niech $\mathcal{J} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie bazą Jordana endomorfizmu $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takiego, że $A_0 = M(f)_{st}^{st}$, a więc taką bazą, że $M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = J_0$. Mamy zatem:

(1)
$$\begin{cases} f(\beta_1) & = 4\beta_1 \\ f(\beta_2) & = \beta_1 + 4\beta_2 \\ f(\beta_3) & = \beta_2 + 4\beta_3 \\ f(\beta_4) & = \beta_3 + 4\beta_4 \end{cases}$$

a więc równoważnie:

(2)
$$\begin{cases} (A_0 - 4I_4)\beta_1 & = 0 \\ (A_0 - 4I_4)\beta_2 & = \beta_1 \\ (A_0 - 4I_4)\beta_3 & = \beta_2 \\ (A_0 - 4I_4)\beta_4 & = \beta_3 \end{cases}.$$

Stąd z łatwością wyznaczamy na przykład:

$$\beta_1 = (1, 1, 0, 0), \beta_2 = (1, 2, 0, 0), \beta_3 = (1, 2, 0, 1), \beta_4 = (1, 4, 1, -3).$$

Uwaga. Kolejność wektorów w bazie Jordana ma znaczenie! Inna kolejność wektorów prowadzi do innej macierzy, która może nie być macierzą Jordana. W tym zadaniu nie było konieczne korzystanie z ogólnych algorytmów związanych z wyznaczaniem bazy Jordana. Uczenie się tych (i jakichkolwiek innych) algorytmów bez zrozumienia istoty ich działania jest zresztą szkodliwe. Niezależnie od ich znajomości student powinien rozumieć skąd biorą się zależności (1), (2).

Zadanie 2. [18 pt]
Niech $H = \mathrm{af}((1,1,0),(2,1,1),(1,2,0))$ i $L = (1,1,1) + \mathrm{lin}((-1,1,1))$ będą podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^3$.
(a) Znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej punkt $(-1,2,-3)$.
(b) Wyznaczyć obrazy punktu $(4,-2,-1)$ przy rzucie na H wzdłuż L i przy symetrii względem H wzdłuż L.

Rozwiązanie (a). Niech $A = (1,1,0)$, $B = (2,1,1)$, $C = (1,2,0)$. Wówczas $\overrightarrow{AB} = [1,0,1]$ oraz $\overrightarrow{AC} = [0,1,0]$, a więc $T(H) = \mathrm{lin}([1,0,1],[0,1,0]) \subseteq \mathbb{R}^3$. Skoro P jest równoległa do H, to ich przestrzenie styczne $T(P)$ oraz $T(H)$ są równe. Zatem układ równań jednorodnych opisujących $T(P)$ to $x_1 - x_3 = 0$. Skoro $P = (-1,2,-3) + T(P)$, to równanie opisujące P ma (na przykład) postać $x_1 - x_3 = 2$.

Rozwiązanie (b). Korzystając z poprzedniego punktu widzimy natychmiast, że płaszczyzna H opisana jest równaniem $x_1 - x_3 = 1$. A zatem obraz punktu $X := (4,-2,-1)$ przy rzucie na H wzdłuż L to pewien punkt X' postaci $X + \lambda(-1,1,1)$ spełniający, dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$, równanie opisujące H. A zatem $X' = (4-\lambda, -2+\lambda, -1+\lambda)$ i $(4-\lambda) - (-1+\lambda) = 1$. Zatem $\lambda = 2$ i $X' = (2,0,1)$. Wiadomo też, że jeśli X' jest obrazem X przy rzucie na H wzdłuż L, to punkt X'' będący obrazem X przy symetrii względem H wzdłuż L spełnia warunek:

$$X'' = X + 2\overrightarrow{XX'} \tag{3}$$

Zatem $X'' = (0,2,3)$.

Uwaga. Wyznaczanie ogólnych wzorów rzutu i symetrii jest rachunkowo bardziej skomplikowane niż wyznaczanie obrazów pojedynczych punktów. Kluczową sprawą jest także rozumienie zależności (3).

Zadanie 3. [10 pt]
Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i niech α_i będzie wektorem własnym φ o wartości własnej λ_i dla $= 1,2,...,k$. Udowodnić, że układ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Rozwiązanie. Patrz wykład.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 3, 6 kwietnia 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:
(a) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest diagonalizowalny. Czy jest prawdą, że $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi^3$?

Odpowiedź. TAK. Zauważmy, że jeśli $v \in \operatorname{im}(\varphi^3)$, to $v = \varphi(w)$, gdzie $w = \varphi^2(z)$, dla pewnego $z \in \mathbb{R}^n$. Zatem $\operatorname{im}(\varphi^3) \subseteq \operatorname{im}(\varphi)$. Niech $0 \neq v \in \operatorname{im}(\varphi)$. Skoro φ jest diagonalizowalny, to v należy do podprzestrzeni własnej $V_{(\lambda)}$, dla pewnej wartości własnej $\lambda \neq 0$. W szczególności $v = \lambda v'$, dla pewnego $v' \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście także v' oraz $\lambda^{-1}v', \lambda^{-2}v', \ldots$ należą do $V_{(\lambda)}$. Zatem $v = \varphi^3(\lambda^{-2}v') \in \operatorname{im}(\varphi^3)$. A zatem obrazy φ oraz φ^3 są równe, co pociąga równość ich wymiarów.

(b) Załóżmy, że $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ są takimi macierzami, że dla pewnego $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $A = B + \lambda_0 I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową. Czy jest prawdą, że istnieje macierz odwracalna $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka, że $R^{-1}AR$ i $R^{-1}BR$ są odpowiednio postaciami Jordana macierzy A i B?

Odpowiedź. TAK. Wiadomo, że B jako macierz kwadratowa o wspólczynnikach z ciała $\mathbb{C}$ posiada postać Jordana $J_B = R^{-1}BR$, dla pewnej macierzy odwracalnej $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Skoro $A = B + \lambda_0 I$, to

$$R^{-1}AR = R^{-1}(B + \lambda_0 I)R = R^{-1}BR + R^{-1}\lambda_0 IR = J_B + \lambda_0 I.$$

Macierz $J_B + \lambda_0 I$ jest oczywiście macierzą Jordana, a więc $R^{-1}AR$ jest postacią Jordana macierzy A.

(c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru 2 oraz, że $\lambda^2 + \lambda + 1$ jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\phi : V \to V$. Czy jest prawdą, że $\phi^3 = id_V$?

Odpowiedź. TAK. Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona wynika, że jeśli $A = M(f)_{st}^{st}$, to mamy równanie macierzowe $A^2 + A + I = 0$. Mnożąc tę równość stronami przez $A - I$ dostajemy $A^3 - I = 0$, co oznacza, ze $\phi^3 = id_V$.

(d) Niech H będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 4 i niech H_1, H_2 będą nierównoległymi podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 3. Czy jest prawdą, że H_1 i H_2 mają punkt wspólny? Jeśli tak, to jakiego wymiaru jest przestrzeń afiniczna $H_1 \cap H_2$?

Odpowiedź. Podprzestrzenie H_1 oraz H_2 mają punkt wspólny. Zauważmy, że jako podprzestrzenie wymiaru 3 przestrzeni czterowymiarowej są one opisane jednym równaniem liniowym (sama przestrzeń H jest izomorficzna z czterowymiarową przestrzenią afiniczną $\mathbb{K}^4$ nad ciałem $\mathbb{K}$). Zatem przecięcie $H_1 \cap H_2$ opisane jest układem równań postaci:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b_1 \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 + a_4'x_4 = b_2 \end{cases} . \tag{4}$$

Układ ten może być sprzeczny jedynie gdy $(a_1, a_2, a_3, a_4) = \lambda(a_1', a_2', a_3', a_4')$, dla pewnego $\lambda \neq 0$. To jednak oznaczałoby, że $T(H_1) = T(H_2)$ (równania jednorodne opisujące H_1 i H_2 byłyby równoważne).

Rozważmy układ jednorodny pochodzący od układu (4), opisujący $T(H_1 \cap H_2)$. Widać jasno, że wymiar przestrzeni rozwiązań tego układu jest nie mniejszy niż 2 (tw. Kroneckera-Capellego). Gdyby jednak wymiar ten był większy, oznaczałoby to, że macierz tego układu ma rząd mniejszy niż 2, co oznaczałoby ponownie, że $T(H_1) = T(H_2)$ (oczywiście macierz ta nie może mieć rzędu 0).

(e) Niech H będzie przestrzenią afiniczną i $p_0, p_1, ..., p_k \in H$. Załóżmy, że $q \in H$ jest takim punktem nienależącym do $\mathrm{af}(p_0, p_1, ..., p_k)$, że układ wektorów $\overrightarrow{qp_0}, \overrightarrow{qp_1}, ..., \overrightarrow{qp_k}$ jest liniowo niezależny. Czy układ punktów $p_0, p_1, ..., p_k$ może być afinicznie zależny?

Odpowiedź. NIE. Załóżmy przeciwnie, że układ punktów $p_0, p_1, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny. Zatem istnieją skalary $r_1, \ldots, r_k$, nie wszystkie równe zeru, że

$$r_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + r_k\overrightarrow{p_0p_k} = 0. \tag{5}$$

Niech $r_0 = -r_1 - r_2 - \ldots - r_k$. Mamy równości:

$$\begin{aligned} r_0\overrightarrow{qp_0} + r_1\overrightarrow{qp_1} + \ldots r_k\overrightarrow{qp_k} &= \\ (-r_1 - \ldots - r_k)\overrightarrow{qp_0} + r_1\overrightarrow{qp_1} + \ldots r_k\overrightarrow{qp_k} &= \\ r_1(\overrightarrow{p_0q} + \overrightarrow{qp_1}) + \ldots + r_k(\overrightarrow{p_0q} + \overrightarrow{qp_k}) &= \\ r_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + r_k\overrightarrow{p_0p_k} &\overset{(5)}{=} 0. \end{aligned}$$

To przeczy założeniu, że układ wektorów $\overrightarrow{qp_0}, \overrightarrow{qp_1}, ..., \overrightarrow{qp_k}$ jest liniowo niezależny.

(f) Niech $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5$ i $g : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$ będą przekształceniami afinicznymi. Czy ich złożenie $gf : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ może byc izomorfizmem afinicznym?

Odpowiedź. NIE. W przeciwnym przypadku złożenie przekształceń liniowych $T(f), T(g)$ pomiędzy przestrzeniami stycznymi do danych przestrzeni afinicznych musiałoby być izomorfizmem liniowym. Jednak $T(f) : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5$ oraz $T(g) : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$. W szczególności złożenie tych przekształceń ma nietrywialne jądro (bo jądro $T(f)$ jest nietrywialne), czyli nie może być izomorfizmem liniowym. A zatem złożenie gf nie może być izomorfizmem afinicznym.

Zadanie 5. [18pt]
Niech $A, B_t \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 4 & -t & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & -t & 0 \end{bmatrix}$$

dla $t \in \mathbb{R}$.
(a) Czy macierz A jest diagonalizowalna?
(b) Dla jakich wartości parametru t macierze A i B_t są podobne?
(c) Podać przykład macierzy C takiej, że $C^2 = A$ (wystarczy określić C jako iloczyn danych macierzy lub macierzy odwrotnych do danych macierzy).

Rozwiązanie (a). Wielomian charakterystyczny dla macierzy A to $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda-4)(\lambda-1)$. Zatem wartości własne macierzy A to $0, 1, 4$. Skoro krotność dwóch ostatnich pierwiastków to 1, to $\dim(V_{(1)}) = \dim(V_{(4)}) = 1$. Łatwo widzieć, że $\dim(V_{(0)}) = 4 - r(A) = 2$, więc mamy $4 = \dim(V_{(0)} + \dim(V_{(1)}) + \dim(V_{(4)})$, a zatem A jest diagonalizowalna.

Rozwiązanie (b). Aby macierze A oraz B_t były podobne potrzeba, aby $\dim(\ker(B_t)) = 2$, a więc aby rząd macierzy B_t wynosił 2. Widać, że ma to miejsce jedynie, gdy $t = 0$. Jednak B_0 jest macierzą górnotrójkątną i jest jasne, że jej wielomian charakterystyczny jest identyczny jak wielomian charakterystyczny macierzy A. Powyżej przekonaliśmy się, że wymiar podprzestrzeni własnej endomorfizmu zadanego (w pewnych bazach) macierzą B_0 odpowiadającej wartości własnej 0 wynosi 2, więc podobnie jak wyżej wnioskujemy, że A jest diagonalizowalna. Postaci Jordana macierzy A oraz B_0 są oczywiście identyczne i mają postać (z dokładnością do kolejności bloków):

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie (c). Bierzemy (na przykład) macierz postaci:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Niech R będzie macierzą odwracalną taką, że $A = R^{-1}J^2R$ (dlaczego taka macierz istnieje?) Szukana macierz to $C := R^{-1}JR$. Istotnie: $C^2 = (R^{-1}JR)^2 = R^{-1}JRR^{-1}JR = R^{-1}J^2R = A$.

Uwaga. Widać, że macierz J można wybrać na różne sposoby. Dla danej macierzy kwadratowej X może istnieć nieskończenie wiele macierzy Y takich, że $Y^2 = X$. Student powinien umieć podać przykład i geometryczną intuicję takiej sytuacji.

Zadanie 6. [18 pt]
Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad $\mathbb{C}$. Pokazać, że:
(a) jeżeli $\varphi : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U, to dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V zachodzi $\dim W = trM(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.
(b) jeżeli dla $i = 1, 2, ..., k$ endomorfizm $\varphi_i : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W_i wzdłuż podprzestrzeni U_i oraz $\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k = id_V$, to $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ oraz $\varphi_i\varphi_j = 0$ dla $i \neq j$.

Rozwiązanie (a). Skoro φ jest rzutem na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U to z definicji rzutu $W \oplus U = V$ oraz $\varphi|_W = id$ i $\varphi|_U = 0$. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ będzie bazą W oraz $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ będzie bazą U. Wówczas $\mathcal{C} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s\}$ jest bazą V i macierz $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ ma postać blokową $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oczywiście $tr(M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}) = s = \dim(W)$. Wiadomo jednak, że ślad macierzy nie zmienia się przy relacji podobieństwa, a zatem niezależnie od wyboru bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V zachodzi $\dim W = tr(M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}) = tr(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$.

Rozwiązanie (b). Weźmy dowolny wektor $v \in V$. Z warunku podanego w zadaniu wiemy, że $v = id(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) + ... + \varphi_k(v)$. Element $\varphi_s(v)$ nalezy do W_s. Zatem $V = W_1 + \ldots + W_k$. Przekonajmy się, że jest to suma prosta. Rozważmy dowolną bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Niech A_s będzie macierzą φ_s w bazie $\mathcal{A}$. Oczywiście $A_1 + \ldots + A_k = I$. Skoro $tr(A_1 + \ldots + A_k) = tr(A_1) + \ldots tr(A_k) = I = \dim(V)$, to z punktu (a) wynika, że $\dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k) = \dim(V)$. A zatem dostaliśmy $\dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k) = \dim(W_1 + W_2 + \ldots W_k)$. To jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $W_1 + \ldots + W_k = W_1 \oplus W_2 \ldots \oplus W_k$ (patrz wzór $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V)$, dla dowolnych podprzestrzeni skończenie wymiarowych).

Pozostaje pokazać, że $\varphi_i\varphi_j = 0$ dla $i \neq j$. Dla każdego $v \in V$ mamy $v = v_1 + v_2 + \ldots v_k$, gdzie v_s pochodzą z W_s. Skoro suma $W_1 + \ldots + W_k$ jest prosta, to $v_j \in W_j$, zaś pozostałe składniki sumy $v_1 + \ldots + v_k$ należą do U_j. W szczególności $\varphi_j(v) = v_j$. A zatem $\varphi_i(\varphi_j(v)) = \varphi_i(v_j) = 0$.