GAL Kolokwium 3, 10 kwietnia 2017, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 pt]

Niech $A_t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & t \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć postać Jordana macierzy A_t dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

(b) Wyznaczyć bazę Jordana dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A_0$.

Zadanie 2. [18 pt]

Niech $H = \mathrm{af}((1,1,0),(2,1,1),(1,2,0))$ i $L = (1,1,1) + \mathrm{lin}((-1,1,1))$ będą podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej punkt $(-1,2,-3)$.

(b) Wyznaczyć obrazy punktu $(4,-2,-1)$ przy rzucie na H wzdłuż L i przy symetrii względem H wzdłuż L.

Zadanie 3. [10 pt]

Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i niech α_i będzie wektorem własnym φ o wartości własnej λ_i dla $= 1,2,...,k$. Udowodnić, że układ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 3, 10 kwietnia 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:
(a) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest diagonalizowalny. Czy jest prawdą, że $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi^3$?

(b) Załóżmy, że $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ są takimi macierzami, że dla pewnego $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $A = B + \lambda_0 I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową. Czy jest prawdą, że istnieje macierz odwracalna $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka, że $R^{-1}AR$ i $R^{-1}BR$ są odpowiednio postaciami Jordana macierzy A i B?

(c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru 2 oraz, że $\lambda^2 + \lambda + 1$ jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\phi : V \to V$. Czy jest prawdą, że $\phi^3 = id_V$?

(d) Niech H_1, H_2 będą nierównoległymi podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^4$ wymiaru 3. Czy jest prawdą, że H_1 i H_2 mają punkt wspólny? Jeśli tak, to jakiego wymiaru jest przestrzeń afiniczna $H_1 \cap H_2$?

(e) Niech H będzie przestrzenią afiniczną i $p_0, p_1, ..., p_k \in H$. Załóżmy, że $q \in H$ jest takim punktem nienależącym do $\mathrm{af}(p_0, p_1, ..., p_k)$, że układ wektorów $\overrightarrow{qp_0}, \overrightarrow{qp_1}, ..., \overrightarrow{qp_k}$ jest liniowo niezależny. Czy układ punktów $p_0, p_1, ..., p_k$ może być afinicznie zależny?

(f) Niech $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5$ i $g : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$ będą przekształceniami afinicznymi. Czy ich złożenie $gf : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ może byc izomorfizmem afinicznym?

Zadanie 5. [18pt]
Niech $A, B_t \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 4 & -t & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & -t & 0 \end{bmatrix}$$

dla $t \in \mathbb{R}$.
(a) Czy macierz A jest diagonalizowalna?
(b) Dla jakich wartości parametru t macierze A i B_t są podobne?
(c) Podać przykład macierzy C takiej, że $C^2 = A$ (wystarczy określić C jako iloczyn danych macierzy lub macierzy odwrotnych do danych macierzy).

Zadanie 6. [18 pt]
Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad $\mathbb{C}$. Pokazać, że:
(a) jeżeli $\varphi : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U, to dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V zachodzi $\dim W = \mathrm{tr}(M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})$.
(b) jeżeli dla $i = 1, 2, ..., k$ endomorfizm $\varphi_i : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W_i wzdłuż podprzestrzeni U_i oraz $\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k = id_V$, to $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ oraz $\varphi_i \varphi_j = 0$ dla $i \neq j$.

GAL Kolokwium 3, 10 kwietnia 2017, **Temat B**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18 pt]

Niech $A_t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ t & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wyznaczyć postać Jordana macierzy A_t dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
(b) Wyznaczyć bazę Jordana dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A_0$.

Zadanie 2. [18 pt]
Niech $H = \mathrm{af}((0,1,1),(1,1,2),(0,2,1))$ i $L = (1,0,1) + \mathrm{lin}((1,1,-1))$ będą podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^3$.
(a) Znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej punkt $(2,1,3)$.
(b) Wyznaczyć obrazy punktu $(-1,-2,4)$ przy rzucie na H wzdłuż L i przy symetrii względem H wzdłuż L.

Zadanie 3. [10 pt]
Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$ i niech α_i będzie wektorem własnym φ o wartości własnej λ_i dla $= 1, 2, ..., k$. Udowodnić, że układ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL Kolokwium 3, 10 kwietnia 2017, **Temat B**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 4. Rozwiązanie każdego z pozostałych zadań TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:
(a) Endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest diagonalizowalny. Czy jest prawdą, że $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi^3$?

(b) Załóżmy, że $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ są takimi macierzami, że dla pewnego $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $A = B + \lambda_0 I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową. Czy jest prawdą, że istnieje macierz odwracalna $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka, że $R^{-1}AR$ i $R^{-1}BR$ są odpowiednio postaciami Jordana macierzy A i B?

(c) Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową wymiaru 2 oraz, że $\lambda^2 + \lambda + 1$ jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\phi : V \to V$. Czy jest prawdą, że $\phi^3 = id_V$?

(d) Niech H_1, H_2 będą nierównoległymi podprzestrzeniami afinicznymi $\mathbb{R}^4$ wymiaru 3. Czy jest prawdą, że H_1 i H_2 mają punkt wspólny? Jeśli tak, to jakiego wymiaru jest przestrzeń afiniczna $H_1 \cap H_2$?

(e) Niech H będzie przestrzenią afiniczną i $p_0, p_1, ..., p_k \in H$. Załóżmy, że $q \in H$ jest takim punktem nienależącym do $\mathrm{af}(p_0, p_1, ..., p_k)$, że układ wektorów $\overrightarrow{qp_0}, \overrightarrow{qp_1}, ..., \overrightarrow{qp_k}$ jest liniowo niezależny. Czy układ punktów $p_0, p_1, ..., p_k$ może być afinicznie zależny?

(f) Niech $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5$ i $g : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^6$ będą przekształceniami afinicznymi. Czy ich złożenie $gf : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ może byc izomorfizmem afinicznym?

Zadanie 5. [18pt]

Niech $A, B_t \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ będą postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_t = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & t \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 1 & -t \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dla $t \in \mathbb{R}$.
(a) Czy macierz A jest diagonalizowalna?
(b) Dla jakich wartości parametru t macierze A i B_t są podobne?
(c) Podać przykład macierzy C takiej, że $C^2 = A$ (wystarczy określić C jako iloczyn danych macierzy lub macierzy odwrotnych do danych macierzy).

Zadanie 6. [18 pt]
Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad $\mathbb{C}$. Pokazać, że:
(a) jeżeli $\varphi : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U, to dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V zachodzi $\dim W = \mathrm{tr}(M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})$.
(b) jeżeli dla $i = 1, 2, ..., k$ endomorfizm $\varphi_i : V \to V$ jest rzutem na podprzestrzeń W_i wzdłuż podprzestrzeni U_i oraz $\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k = id_V$, to $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ oraz $\varphi_i\varphi_j = 0$ dla $i \neq j$.