GAL, Kolokwium 3, Zestaw A

3 kwietnia 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1. Dane sa macierze

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć postać Jordana macierzy A.
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B sa podobne?

Zadanie 2. Endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest dany wzorem
$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3)$.
a) Znaleźć wektory własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu ϕ. Czy endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny?
b) Niech $A = M(\phi)_{\text{st}}^{\text{st}}$. Obliczyć A^m dla $m \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie afiniczne $H = \operatorname{af}\Big((1,0,0,1),(2,1,0,2),(1,1,1,1),(2,2,1,3)\Big)$ i M opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

a) Znaleźć parametryzację przestrzeni H i układ równań opisujący H.
b) Znaleźć obraz punktu $p = (1,1,1,1)$ w symetrii względem M wzdłuż $W = \operatorname{lin}\Big((1,1,0,0),(1,0,0,1)\Big)$.

Zadanie 4.
a) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$ dana jest prosta L opisana równaniem $ax_1 + bx_2 + c = 0$ oraz dany jest izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określony wzorem $f(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$. Wykazać, że obrazem prostej L w izomorfiźmie f jest prosta o równaniu

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 - x_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 - x_2 \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0.$$

b) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ dana jest podprzestrzeń afiniczna L opisana równaniem $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{n+1} = 0$ oraz dany jest izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określony wzorem

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1,\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n + b_2, ...,\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n).$$

Wykazać, że obrazem L w izomorfiźmie f jest przestrzeń afiniczna opisana równaniem

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 - x_1 \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{21} & b_2 - x_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n - x_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n & c_{n+1} \end{bmatrix} = 0.$$

GAL, Kolokwium 3, Zestaw B

3 kwietnia 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1. Dane sa macierze

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć postać Jordana macierzy A.
b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B sa podobne?

Zadanie 2. Endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest dany wzorem
$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3)$.
a) Znaleźć wektory własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu ϕ. Czy endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny?
b) Niech $A = M(\phi)^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}}$. Obliczyć A^m dla $m \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie afiniczne $H = \mathrm{af}\Big((1,0,0,1),(2,1,0,2),(1,1,1,1),(2,2,1,3)\Big)$ i M opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

a) Znaleźć parametryzację przestrzeni H i układ równań opisujący H.
b) Znaleźć obraz punktu $p = (1,1,1,1)$ w symetrii względem M wzdłuż $W = \mathrm{lin}\Big((1,0,1,0),(1,0,0,1)\Big)$.

Zadanie 4.
a) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$ dana jest prosta L opisana równaniem $ax_1 + bx_2 + c = 0$ oraz dany jest izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określony wzorem $f(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$. Wykazać, że obrazem prostej L w izomorfiźmie f jest prosta o równaniu

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 - x_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 - x_2 \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0.$$

b) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ dana jest podprzestrzeń afiniczna L opisana równaniem $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{n+1} = 0$ oraz dany jest izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określony wzorem

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1,\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n + b_2,\ ...,\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n).$$

Wykazać, że obrazem L w izomorfiźmie f jest przestrzeń afiniczna opisana równaniem

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 - x_1 \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{21} & b_2 - x_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n - x_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n & c_{n+1} \end{bmatrix} = 0.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

(I) Proszę odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

1. Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem i niech $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ będzie bazą V, przy czym $\varphi(\alpha_1) = 2\alpha_1$, $\varphi(\alpha_2) = \alpha_2$ i $\varphi(\alpha_3) = 2\alpha_3$. Czy $\dim V_{(2)} = 2$?

2. Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem, β_1 wektorem własnym φ o wartości własnej a i niech β_2 wektorem własnym φ o wartości własnej b, $a \neq b$. Czy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V_{(a)} \cap V_{(b)}$?

3.Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i załóżmy, że A^m jest macierzą zerową dla pewnego $m \geqslant 1$. Czy 5 może być wartością własną A ?

ODWRÓĆ STRONĘ

4. $H \subset K^n$ jest przestrzenią afiniczną. Czy istnieje układ równań liniowych $\mathcal{U}$ o n niewiadomych, taki, że zbiór rozwiązań $\mathcal{U}$ pokrywa się z H?

5. Niech $p_0, p_1, ..., p_n$ będą afinicznie niezależnymi punktami przestrzeni afinicznej H. Czy dla każdego $p \in H$ wektory $\overrightarrow{pp_0}, \overrightarrow{pp_1}, ..., \overrightarrow{pp_n}$ sa liniowo niezależne?

6. Niech $f : H \to H$ rzut na $H_1 \subset H$ wzdłuż $W \subset T(H)$. Załóżmy, że $\dim W = k$. Czy istnieje $k+1$ różnych punktów $p_0, p_1, ..., p_k$ takich, że $f(p_0) = f(p_1) = ... = f(p_k)$?

(II) Proszę podać na oddzielnej podpisanej kartce dowód twierdzenia mówiącego, że jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ są parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$ oraz niezerowy wektor α_i jest wektorem własnym o wartości własnej λ_i dla $i = 1, 2, .., n$, to $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ jest liniowo niezależnym układem wektorów.