Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel 15-16 września 2023 r.

Ekstremalne iloczyny

Wśród iloczynów liczb naturalnych dwa typy odgrywają szczególną rolę: są to

- potęgi (zwłaszcza liczb pierwszych),
- iloczyny liczb względnie pierwszych.

Owe dwa rodzaje iloczynów są z pewnego punktu widzenia „skrajnymi" przeciwieństwami: w jednym czynniki są identyczne, a w drugim: wręcz przeciwnie — czynniki nie mają wspólnych dzielników pierwszych. Ewentualna równość dwóch tak różnych iloczynów wymusza, zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie na czynniki pierwsze, szereg własności wyjściowych rozkładów. Oto trzy przykłady tego typu własności, wykorzystywanych na konkursach:

- jeśli liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby całkowitej a^n, to również liczba p^n jest dzielnikiem liczby a^n,
- jeśli iloczyn rs względnie pierwszych liczb r, s jest równy liczbie a^n, to każda z liczb r, s jest n-tą potęgą,
- jeśli iloczyn rs dowolnych liczb całkowitych r, s jest równy liczbie p^n, gdzie p jest liczbą pierwszą, wówczas zarówno r, jak i s są potęgami liczby p.

Powyższe obserwacje traktować można jako uogólnienie prostej obserwacji dotyczącej iloczynów liczb całkowitych, powszechnie znanej z literatury konkursowej, zwłaszcza z teorii równań w liczbach całkowitych (por. M. Kieza, *Sztuczka z iloczynem*, Gazetka Kwadrat, nr 5). Oto ona: jeśli a, b są liczbami całkowitymi oraz p jest liczbą pierwszą, wówczas jeśli $ab = p$, to zachodzi jeden z czterech przypadków:

$$\begin{cases} a = p \\ b = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = p \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -p \\ b = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -p \end{cases}.$$

Przypomnijmy dwa przykłady zastosowania tego, i podobnych faktów.

Zadanie 1. *Rozwiąż równanie w liczbach całkowitych x, y, postaci:*

$$2xy + 3x + y = 0.$$

Rozwiązanie. Od równania z treści zadania przejść możemy do równoważnych równań postaci:

$$\begin{aligned} 4xy + 6x + 2y &= 0, \\ 4xy + 6x + 2y + 3 &= 3, \\ (2x + 1)(2y + 3) &= 3. \end{aligned}$$

A zatem, biorąc pod uwagę wszystkie możliwe rozkłady liczby 3 na iloczyn dwóch liczb całkowitych, czyli

$$3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1),$$

uzyskujemy cztery możliwe przypadki obejmujące możliwe wartości czynników $2x + 1$ oraz $2y + 3$:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ 2y + 3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 1 = 1 \\ 2y + 3 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2y + 3 = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 1 = -3 \\ 2y + 3 = -1 \end{cases}.$$

A zatem rozwiązania wyjściowego równania to

$$(x, y) = (1, -1), \quad (x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = (-1, -3), \quad (x, y) = (-2, -2).$$

■

W zadaniach powyższego typu po prostu wskazujemy możliwe wartości czynników i pomysł kończy się na odpowiednim przekształceniu do postaci iloczynowej. Dziś zajmiemy się sytuacjami, gdy o naturze czynników czynić trzeba będzie bardziej ogólne obserwacje, wskazując na ich relacje. Tego typu obserwacje również znamy, i to nawet z praktyki szkolnej. Dowodząc podzielność liczby całkowitej postaci $n(n+1)(n+2)$ przez 6, skorzystać możemy pięknie z faktu, że poszczególne czynniki są kolejnymi liczbami całkowitymi. Motywacja jest więc taka: nie jest ważne jedynie rozkładanie na czynniki, ale rozumienie ich własności i szukanie zależności między nimi.

Kolejny przykład zadania, które prowadzi do rozkładu na czynniki, ale wymaga już rozważenia bardziej ogólnych ich własności, pochodzi z II etapu VIII OMG.

Zadanie 2. *Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q), dla których liczba*

$$p^2 + pq + q^2$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Niech a będzie taką nieujemną liczbą całkowitą, że

$$p^2 + pq + q^2 = a^2.$$

Wówczas:

$$(p+q)^2 - a^2 = pq, \quad \text{czyli} \quad (p+q+a)(p+q-a) = pq.$$

Załóżmy, że $p \geqslant q$. Oczywiście $p+q+a \geqslant p+q-a$, czyli zachodzi jeden z dwóch przypadków:

$$\begin{cases} p+q+a = p \\ p+q-a = q \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p+q+a = pq \\ p+q-a = 1 \end{cases}.$$

Pierwszy z powyższych układów nie może być spełniony, gdyż $p+q+a > p$. Z kolei dodając stronami równania drugiego układu, uzyskujemy $2p + 2q - 1 = pq$, co po przekształceniach (por. poprzednie zadanie) ma postać

$$(p-2)(q-2) = 3.$$

Mamy $p-2 \geqslant q-2 \geqslant 0$. Stąd $p-2 = 3$, $q-2 = 1$, czyli $p = 5, q = 3$. Sprawdzamy, że otrzymana para $(p, q) = (5, 3)$ spełnia warunki zadania. Analogicznie rozpatrujemy przypadek $p < q$, uzyskując drugie rozwiązanie $(p, q) = (3, 5)$. ■

Przyjrzymy się teraz przykładom sytuacji, w których po uzyskaniu równości iloczynów rozpoznajemy po jednej stronie liczby względnie pierwsze. Dwie najprostsze i najczęściej spotykane konfiguracje tego typu to: dwie kolejne liczby pierwsze oraz dwie kolejne liczby nieparzyste. Oto zadanie z drugiego etapu XVII OM (1965 r.).

Zadanie 3. *Wykaż, że jeżeli liczby naturalne a i b spełniają równanie*

$$a^2 + a = 3b^2,$$

to liczba $a+1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Załóżmy, że rozkład liczby b^2 na czynniki pierwsze ma postać $p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_s^{2a_s}$, gdzie p_i są liczbami pierwszymi, a a_i — dodatnimi liczbami całkowitymi. Według założenia zachodzi równość:

$$a(a+1) = 3p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_s^{2a_s}.$$

Liczby a oraz $a+1$ są względnie pierwsze, jako dwie kolejne liczby całkowite. Wobec tego każdy z czynników: 3, $p_1^{2a_1}$, …, $p_s^{2a_s}$ prawej strony równości wyżej wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze jednej i tylko jednej z liczb a, $a+1$. Zachodzi więc jeden z dwóch przypadków:

$$\begin{cases} a = r^2 \\ a+1 = 3s^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 3r^2 \\ a+1 = s^2 \end{cases},$$

gdzie r oraz s oznaczają liczby naturalne (iloczyny liczb $p_i^{2a_i} = (p_i^{a_i})^2$) spełniające równanie $r^2 s^2 = b^2$. W przypadku pierwszym mielibyśmy $3q^2 - p^2 = 1$, czyli liczba p^2 daje resztę 2 z dzielenia przez 3, co jest niemożliwe (kwadrat daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 1). Zachodzi więc przypadek drugi, czyli $a+1$ jest kwadratem. ■

Zadanie 4. *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba*

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Szukamy takich lliczb całkowitych m, że

$$2^{p-1}-1 = pm^2.$$

Gdy $p = 2$, wówczas rozważana liczba nie jest całkowita. Przyjmijmy, że $p = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą. Wówczas $p-1 = 2k$ jest dodatnią liczbą parzystą i ze wzoru na różnicę kwadratów, uzyskujemy

$$2^{2k}-1 = (2^k-1)(2^k+1) = pm^2.$$

Liczby 2^k-1 oraz 2^k+1 są względnie pierwsze, jako kolejne dwie liczby nieparzyste. Stąd uzyskujemy, analogicznie do rozumowania w poprzednim zadaniu, dwa możliwe przypadki:

$$\begin{cases} 2^k-1 &= px^2 \\ 2^k+1 &= y^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2^k-1 &= x^2 \\ 2^k+1 &= py^2 \end{cases},$$

dla pewnych liczb całkowitych x, y, takich że $x^2y^2 = m^2$. Rozważmy dwa uzyskane przypadki. Każdy wymagać będzie analizy i dodatkowych pomysłów.

- Przypadek 1. Mamy $2^k+1 = y^2$, czyli $y^2-1 = 2^k$, skąd

  $$(y+1)(y-1) = 2^k.$$

  Obydwa czynniki są zatem potęgami liczby 2, czyli na mocy początkowej uwagi, uzyskujemy

  $$\begin{cases} y+1 &= 2^m \\ y-1 &= 2^n \end{cases},$$

  dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m, n, takich że $m+n = k$. Różnica liczb 2^m oraz 2^n jest jednak, jak widzimy, równa 2, co oznacza, że $m = 2$ oraz $n = 1$. Zatem $y = 3$, skąd $k = 3$ i ostatecznie $px^2 = 7$. Stąd $p = 7$ oraz $x = 1$.

- Przypadek 2. Mamy $2^k = x^2+1$. Jednak reszta z dzielenia kwadratu przez 4 jest równa 0 lub 1, stąd 2^k daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4. W rezultacie $k = 0$ lub $k = 1$. Skoro jednak $p = 2k+1$, to $k = 1$ oraz $p = 3$, co daje drugie rozwiązanie.

■

Typowymi zastosowaniami technik opisywanych przez nas wyżej są poszukiwania liczb spełniających równania. Jest tak zwłaszcza wtedy, gdy wiążą one potęgi.

Zadanie 5 (Albania, TST 2009)**.** *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite m, n, dla których*

$$1+5\cdot 2^m = n^2.$$

Rozwiązanie. Zapisujemy równanie w postaci

$$2^m \cdot 5 = (n+1)(n-1).$$

Liczby $n+1$ oraz $n-1$ nie są tym razem względnie pierwsze, ale ich największym wspólnym dzielnikiem jest 2 (ich różnica). Stąd liczba 2^{m-1} jest dzielnikiem jednego z tych czynników. Nawet, gdyby to był większy czynnik, dostaniemy (oszacowanie dzielnika przez wielokrotność): $n+1 \geqslant 2^{m-1}$, czyli $n \geqslant 2^{m-1}-1$, skąd

$$5\cdot 2^m = n^2-1 \geqslant (2^{m-1}-1)^2-1 = 2^{2m-2}-2^m \geqslant 2^m(2^{m-2}-1).$$

W rezultacie $2^{m-2} \leqslant 6$, skąd $m \leqslant 4$. Bezpośrednie sprawdzenie prowadzi do jedynego rozwiązania $m = 4$, $n = 9$.
■

Zadanie 6 (Obóz OMJ 2022, poziom OM)**.** *Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie*

$$4^x + 3^y = z^2.$$

Rozwiązanie. Po raz kolejny widać możliwość rozkładu na różnicę kwadratów. Mamy $3^y = z^2 - 2^{2x}$, czyli

$$3^y = (z - 2^x)(z + 2^x).$$

Wynika stąd, że każdy z czynników jest potęgą trójki o wykładniku, będącym nieujemną liczbą całkowitą.

$$\begin{cases} z - 2^x &= 3^k, \\ z + 2^x &= 3^l \end{cases}.$$

Drugi czynnik jest większy, więc $l > k$. Różnica między tymi czynnikami równa jest

$$3^l - 3^k = 2^{x+1}.$$

Nie jest to liczba podzielna przez 3, więc $k = 0$, czyli $z - 2^x = 1$. Stąd też $z = 2^x + 1$ oraz

$$3^y = 2^x + 2^x + 1 = 2^{x+1} + 1.$$

Rozważając reszty, jakie potęga trójki daje przy dzieleniu przez 4 stwierdzamy, ze y jest liczbą parzystą. Niech $y = 2z$, gdzie z jest dodatnią liczbą całkowitą. Korzystamy ponownie ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$2^{x+1} = 3^{2z} - 1 = (3^z - 1)(3^z + 1).$$

W rezultacie jesteśmy w stanie zapisać 2^{x+1} jako iloczyn potęg dwójki o różnicy 2. Te potęgi są więc liczbami 2 oraz 4, jak w Zadaniu 4 (przypadek 1). Stąd $x = 2$ oraz $k = 1$, czyli $y = 2$ i $z = 5$. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest trójka $(2, 2, 5)$. ■

W ostatnim zadaniu dwukrotnie skorzystaliśmy z rozkładu na czynniki, za każdym razem korzystając z tego, że iloczyn liczb całkowitych będący potęgą liczby pierwszej ma rozkład jedynie na potęgi tej liczby. Kluczowe było za każdym razem badanie wzajemnej relacji czynników — w tym przypadku ich różnicy. Za chwilę zrobimy to ponownie, a Czytelnika zainteresowanego utrwaleniem dotychczas zdobytej wiedzy proszę o samodzielne rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z równania (źródło: Delta, Klub 44M, 2016):

$$2^x + 2^y = 6^z.$$

Zadanie 7 (VI OMG)**.** *Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie*

$$a^2 - b^3 = 4.$$

Rozwiązanie. Po raz kolejny przechodzimy do rozkładu, tym razem w postaci:

$$b^3 = (a + 2)(a - 2).$$

Czynniki $a + 2$ i $a - 2$ są nieparzyste i różnią się od 4, stąd są względnie pierwsze. Ich iloczyn jest sześcianem, więc zgodnie z obserwacją poczynioną na początku tych rozważań:

$$\begin{cases} a + 2 &= k^3 \\ a - 2 &= l^3 \end{cases},$$

gdzie k, l są liczbami nieparzystymi. Z definicji liczb k oraz l mamy:

$$k^3 - l^3 = 4.$$

To nie jest jednak możliwe. Mamy

$$k^3 - l^3 = (k - l)(k^2 + kl + l^2).$$

Drugi z czynników jest liczbą nieparzystą, więc $k - l = 4$. Stąd

$$k^2 + kl + l^2 = (k - l)^2 + 3kl = 16 + 3kl = 1.$$

co daje $kl = -5$. Jednak jedyne pary liczb całkowitych $k > l$ spełniające tę równość to $(5, -1)$ oraz $(1, -5)$. W obu przypadkach daje to $k - l = 6$, zamiast $k - l = 4$, sprzeczność. ■

Skoro już dotknęliśmy bardziej zaawansowanych wzorów skróconego mnożenia, zobaczmy kolejne zadanie wykorzystujące wzór na sześcian sumy. Jest on dany wprost w zadaniu.

Zadanie 8 (Delta)**.** *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite a, b, dla których liczba a^3+b^3 jest czwartą potęgą liczby pierwszej.*

Rozwiązanie. Szukamy dodatnich liczb całkowitych a, b oraz liczby pierwszej p, dla których

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=p^4.$$

Dla $a=b=1$ powyższe równanie sprowadza się do $p^4=2$, co nie jest spełnione dla żadnego p. Przyjmijmy więc bez straty ogólności, że $a \geqslant b$ oraz $a \geqslant 2$. Wtedy $a+b>1$ oraz $a^2-ab+b^2>1$. Zatem p jest dzielnikiem liczby $a+b$ oraz p jest dzielnikiem liczby

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab.$$

Stąd p jest też dzielnikiem liczby $3ab$. Zatem $p=3$ lub p jest dzielnikiem liczby ab. W przypadku, gdy $p=3$, otrzymujemy równanie $a^3+b^3=81$. Bezpośrednio sprawdzamy, że równanie to nie ma rozwiązań dla dodatnich liczb całkowitych a, b.

Z podzielności p przez ab wynika, że p jest dzielnikiem jednej z liczb a lub b, co po wykorzystaniu podzielności p przez $a+b$ oznacza, że p jest dzielnikiem obu liczb a, b. Zatem $a=rp$ oraz $b=sp$, dla pewnych dodatnich liczb całkowitych r, s. Wyjściowe równanie przybiera postać:

$$p(r+s)\cdot p^2(r^2-rs+s^2)=p^4, \quad \text{czyli} \quad (r+s)(r^2-rs+s^2)=p.$$

Skoro $r+s>1$, to $r+s=p$ oraz $r^2-rs+s^2=1$. Z ostatniej równości wnioskujemy, że $r=s=1$. Stąd $p=a=b=2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że para $(a,b)=(2,2)$ spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 9 (Białoruś, TST 2017)**.** *Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p oraz q, takie że*

$$20p^3-q^3=1.$$

Rozwiązanie. Po raz kolejny korzystając z wzoru na sumę sześcianów, zapisujemy

$$20p^3=q^3+1=(q+1)(q^2-q+1).$$

Czynniki po prawej nie muszą być względnie pierwsze, ale skoro q oraz $q+1$ są względnie pierwsze, to:

$$\mathrm{NWD}(q+1,q^2+q-1)=\mathrm{NWD}(q+1,(q+1)^2-3q)=\mathrm{NWD}(q+1,3q)\in\{1,3\}.$$

W dalszym rozwiązaniu korzystamy z następującej prostej obserwacji: jeśli a,b,c,d są liczbami dodatnimi, zachodzi równość $ac=bd$ oraz $a \leqslant b$, to $c \geqslant d$. Rozważamy dwa przypadki.

- Niech $\mathrm{NWD}(q+1,q^2-q+1)=1$. Liczba p^3 jest w całości dzielnikiem jednego z czynników. Mamy więc

  $$p^3 \leqslant q+1 \quad \text{lub} \quad p^2 \leqslant q^2-q+1.$$

  Skorzystamy teraz z uwagi wyżej.

  - Jeśli $p^3 \leqslant q+1$, to $20 \geqslant q^2-q+1>q-1 \geqslant p^3$, co jest niemożliwe.
  - Jeśli $p^3 \leqslant q^2-q+1$, to $20 \geqslant q+1$, czyli $q \geqslant 19$. Stąd:

    $$p^3 \leqslant q^2-q+1 \leqslant 19^2+1<7^3=373.$$

    Po krótkiej analizie dostajemy $p=7, q=19$.

- Niech $\mathrm{NWD}(q+1,q^2-q+1)=3$. Wtedy liczba 9 jest dzielnikiem $20p^3$, czyli $p=3$. co nie jest jednak rozwiązaniem naszego równania.

■

Kolejne zadania pokazują jak wiele drobnych obserwacji algebraicznych lub teorioliczbowych trzeba czasem wykorzystać w rozwiązaniu, którego generalna idea wydaje się podobna. Na koniec tej części rozważań przyjrzymy się dwóm wyraźnie trudniejszym zadaniom, gdzie tezę uzyskuje się dzięki subtelnym obserwacjom.

Zadanie 10 (Obóz OMJ 2023)**.** *Dodatnie liczby całkowite spełniają warunek*

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że liczba $n-m$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} n(4n+1) - m(5m+1) &= 4n^2 + n - 5m^2 - m \\ &= (n-m)(4n+4m+1) - m^2 \\ &= (n-m)(5m+5n+1) - n^2 = 0. \end{aligned}$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} (n-m)(4n+4m+1) &= m^2, \\ (n-m)(5m+5n+1) &= n^2. \end{aligned}$$

Liczby $4m+4n+1$ oraz $5m+5n+1$ są jednak względnie pierwsze, gdyż każdy ich wspólny dzielnik jest również dzielnikiem liczby

$$5(4m+4n+1) - 4(5m+5n+1) = 1.$$

W rezultacie największy wspólny dzielnik liczb m^2 oraz n^2 równy jest $m-n$. Największy wspólny dzielnik dwóch kwadratów jest jednak kwadratem. ■

Zadanie 11 (XVI OM)**.** *Znajdź liczby całkowite x oraz y, spełniające równanie:*

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że liczby całkowite x oraz y spełniają równanie wyżej. Wówczas 2^y jest liczbą całkowitą, więc $y \geqslant 0$. Równanie to możemy przepisać w postaci:

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y.$$

Ponieważ $2^y > 0$ oraz $1 + x^2 > 0$, więc $1 + x > 0$, czyli $x > -1$. Rozważmy dwa przypadki.

- Gdy $x = 0$, wtedy $2^y = 1$, czyli $y = 0$.
- Gdy $x > 0$, wtedy $1+x$ oraz $1+x^2$ są dzielnikami liczby 2^y większymi od 1, czyli istnieją liczby naturalne k, l, że:

  $$1 + x = 2^l, \quad 1 + x^2 = 2^l.$$

  Ponieważ $x \geqslant -1$, więc $1 + x^2 \geqslant 1 + x$ oraz $l \leqslant k$. Eliminując x z równań wyżej, otrzymujemy

  $$(2^k - 1)^2 + 1 = 2^l,$$

  a stąd

  $$2^{2k-1} - 2^k + 1 = 2^{l-1}.$$

  Lewa strona powyższej równości jest liczbą nieparzystą, zatem 2^{l-1} jest liczbą nieparzystą, czyli $l = 1$. W takim razie $k = 1$, $x = 1$, $y = 2$. Równanie ma zatem rozwiązania $x = y = 0$, $x = 1, y = 2$.

■

* * *

W tym miejscu zakończymy przegląd zadań pokazujących wykorzystanie trzech własności wymienionych na początku naszych rozważań. Ostatnie kilka zadań poświęcimy pojęciu względnej pierwszości i rozpoznawaniu układów liczb względnie pierwszych. W ten sposób uzyskamy więcej narzędzi do stwierdzania kiedy czynniki w pojawiających się w różnych zadaniach wyrażeniach algebraicznych mogą być w istocie względnie pierwsze. Zacznijmy od podstaw (nie podajemy źródeł — te zadania są tak znane, że traktujemy je jako *olimpijski folklor*).

Zadanie 12. *Ze zbioru liczb całkowitych od* 1 *do* 100 *wybrano* 51 *elementów. Wykaż, że pewne dwa z wybranych elementów są względnie pierwsze.*

Rozwiązanie. Podzielmy zbiór liczb całkowitych od 1 do 100 na 50 par postaci:

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\ldots,\{99,100\}.$$

Skoro wybraliśmy 51 liczb całkowitych, pewne dwie z tych liczb tworzą jedną z wybranych par liczb względnie pierwszych. ■

Zadanie 13. *Wykaż, że wśród dowolnych pięciu kolejnych dodatnich liczb całkowitych istnieje taka, która jest względnie pierwsza z pozostałymi czterema.*

Rozwiązanie. Twierdzimy, że wśród pięciu kolejnych liczb całkowitych istnieje liczba a, które jest jednocześnie nieparzysta i niepodzielna przez 3. Rzeczywiście, wśród pięciu kolejnych liczb są co najmniej dwie nieparzyste, a wśród dwóch kolejnych liczb nieparzystych, co najmniej jedna nie jest podzielna przez 3.

Zauważmy, że wskazana liczba a jest względnie pierwsza z pozostałymi czterema. Dzielniki pierwsze tej liczby są niemniejsze niż 5, a dla dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ reszty z dzielenia liczby a przez p pięciu kolejnych liczb naturalnych są parami rożne. ■

Dodatnie liczby całkowite a, b są względnie pierwsze, jeśli $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$. Na seminarium o NWD wykazaliśmy, że każda kombinacja $na + mb$, gdzie n, m są liczbami całkowitymi, jest wielokrotnością $NWD(a,b)$, a nawet — że samo $\mathrm{NWD}(a,b)$ jest najmniejszą z dodatnich liczb tej postaci. Praktyczne zastosowanie tego twierdzenia wykorzystuje algorytm Euklidesa, opierający się na równościach typu $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(a-b,b)$.

W zadaniach konkursowych stwierdzanie względnej pierwszości bywa nieco trudniejsze. Zobaczmy to na trzech przykładach, wymagających nieco innych technik.

Zadanie 14. *Dane są liczby całkowite a oraz b, takie że $a > b > 1$ oraz liczba $ab+1$ jest podzielna przez $a+b$. Wykaż, że liczby a, b są względnie pierwsze.*

Rozwiązanie. Gdyby liczby a, b miały wspólny dzielnik dodatni d, to dzielnik ten byłby również dzielnikiem liczb $a+b$ oraz $ab+1$ (zgodnie z założeniami zadania). Tymczasem liczba d jest w sposób oczywisty dzielnikiem liczby ab, skąd $d = 1$. ■

Zadanie 15. *Wykaż, że poniższy ciąg liczb zawiera nieskończenie wiele elementów, z których każde dwa są względnie pierwsze.*

$$1, \quad 11, \quad 111, \quad 1111, \quad 11111, \ldots$$

Rozwiązanie. Rozważmy dwie liczby postaci $n = \underbrace{111\ldots11}_{p}$, $m = \underbrace{111\ldots11}_{q}$, gdzie $p > q$ są dowolnymi liczbami pierwszymi większymi od 3. Liczby te nie są podzielne przez 9, zaś $9n = 10^p - 1$ oraz $9m = 10^q - 1$. Wystarczy więc wykazać, że $\mathrm{NWD}(9n, 9m) = 9$. Zauważmy jednak, że

$$\mathrm{NWD}(10^p-1, 10^q-1) = \mathrm{NWD}(10^p-10^q, 10^q-1) = \mathrm{NWD}(10^q(10^{p-q}-1), 10^q-1).$$

Liczby 10^q oraz $10^q - 1$ są względnie pierwsze, zatem

$$\mathrm{NWD}(10^p-1, 10^q-1) = \mathrm{NWD}(10^q(10^{p-q}-1), 10^q-1) = \mathrm{NWD}(10^{p-q}-1, 10^q-1).$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q mamy powyższą równość. Stąd, korzystając z algorytmu Euklidesa, wnioskujemy:

$$\mathrm{NWD}(10^p-1, 10^q-1) = 10^{\mathrm{NWD}(p,q)} - 1.$$

Skoro liczby p, q są pierwsze, uzyskany rezultat jest równy 9. Stąd $\mathrm{NWD}(9n, 9m) = 9$, czyli $\mathrm{NWD}(n,m) = 1$. ■

Zadanie 16. *Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb całkowitych m, n liczby $2^{2^m}+1$ oraz $2^{2^n}+1$ są względnie pierwsze:*

Rozwiązanie. Tym razem wykażemy, że jeśli $m<n$, to liczba $2^{2^m}+1$ jest dzielnikiem liczby $2^{2^n}-1$. Rzeczywiście. korzystając $n-m$ razy ze wzoru na różnicę kwadratów, mamy:

$$\begin{aligned}
2^{2^n}-1 &= (2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-1}}-1)\\
&= (2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-2}}-1)\\
&= (2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-3}}+1)(2^{2^{n-3}}-1)\\
&= \quad \cdots\\
&= (2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-2}}+1)(2^{2^{n-3}}+1)(2^{2^{n-3}}-1)\ldots(2^{2^m}+1)(2^{2^m}-1).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $2^{2^n}-1$ oraz $2^{2^n}+1$ są dwiema kolejnymi liczbami nieparzystymi, czyli są względnie pierwsze. Tymczasem $2^{2^m}+1$ ma, jako dzielnik pierwszej z nich, tylko dzielniki pierwsze tej liczby. A zatem

$$\mathrm{NWD}(2^{2^n}+1, 2^{2^m}+1)=1.$$

■

Powyższy dowód można też łatwo przeprowadzić za pomocą indukcji (lub zasady minimum). Wystarczy zauważyć, że jeśli $F_n=2^{2^n}+1$, to:

$$F_n = F_{n-1}F_{n-2}\cdot F_1\cdot F_0+2.$$

O liczbach postaci F_n, zwanych liczbami Fermata, można zresztą opowiadać bardzo wiele. Odsyłam zainteresowanych do pierwszego rozdziału książki *Arytmetyka i algebra* prof. Wojciecha Guzickiego (wyd. Omega), gdzie za pomocą tych liczb przeprowadzony jest między innymi dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych.

Jak widzimy, wykorzystaliśmy wyżej szereg technik: zasadę szufladkową, algorytm Euklidesa, wzory skróconego mnożenia, a także samą definicję wspólnego dzielnika, wprowadzonego jako dodatkowa liczba do zadania. Takich technik składowych jest więcej na poziomie olimpiady w liceum, choćby małe twierdzenie Fermata, chińskie twierdzenie o resztach czy zaawansowane wykorzystanie rachunku na resztach z dzielenia (kongruencji). Jeśli dodamy do tego świadomość, że zwykle stwierdzenie względnej pierwszości jest (na pewno tak bywa zwłaszcza w zawodach dla licealistów) jedynie krokiem do rozwiązania dłuższego zadania, możemy wywnioskować potrzebę solidnego opanowania podstaw algebry i teorii liczb przez osobę przygotowującą się do Olimpiady.

* * *

Dodajmy epilog do ostatnich zdań. Czytelnik może bowiem na koniec tych rozważań zwątpić w poczytalność autora. Czy rzeczywiście czynniki takie, jak $2^{2^n}+1$, czyli tak zwane liczby Fermata, mogą być wykorzystane w zadaniu o względnej pierwszości? Oto przykład zadania z finału olimpiady w Korei z 1999 roku.

Zadanie. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że:

- liczba 2^n-1 jest podzielna przez 3,
- liczba $\frac{2^n-1}{3}$ jest dzielnikiem liczby $4m^2+1$, dla pewnej liczby całkowitej m.

Nie chcę tu wchodzić w szczegóły rozwiązania, wymagającego między innymi użycia tzw. chińskiego twierdzenia o resztach, ale wspomnę jaki jest podstawowy pomysł. Skoro 2^n-1 jest liczbą podzielną przez 3, to n jest liczbą parzystą, postaci $2k$. A zatem chcemy, aby liczba $(4^k-1)/3$ była dzielnikiem liczby $4m^2+1$, dla pewnego m. Jak się okazuje, taką liczbą k jest 2^p. Innymi słowy chcemy pokazać, że liczba $(4^{2^p}-1)/3$ jest dzielnikiem liczby postaci $4m^2+1$. Tymczasem mamy:

$$\frac{4^{2^p}-1}{3}=\frac{(4^{2^{p-1}}+1)(4^{2^{p-2}}+1)(\cdots)(4+1)(4-1)}{3},$$

co po uproszczeniu trójki daje nam iloczyn liczb Fermata, względnie pierwszych, i to postaci $4m^2+1$. Chińskie twierdzenie o resztach (plus komentarze) zapewnia, że także iloczyn jest w związku z tym w postaci $4m^2+1$.