Na kółku OMJ. Dzielniki duże i małe

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel (a.mecel@mimuw.edu.pl)
Zoom, 20-21.03.2022 r.

W poznawaniu teorii liczb warto wyrobić sobie nawyk, zgodnie z którym każdej liczbie całkowitej przypisujemy zbiór jej dzielników[1]. O zbiorze tym można zadawać ciekawe pytania: można zastanawiać się ile ma elementów, jakie elementy do niego (nie) należą, jakie są relacje między nimi. Można pytać czym się różnią zbiory dzielników dla różnych liczb. Można pytać: jak wyglądają ich podzbiory (np. złożone z potęg ustalonej liczby pierwszej). Nas interesować będzie zupełnie elementarna obserwacja używana w rozwiązaniach zadań konkursowych.

Jeśli m jest dzielnikiem liczby całkowitej n, to również $\frac{n}{m}$ jest dzielnikiem liczby n.

Własność ta nadaje zbiorowi dzielników ustalonej liczby n pewną wewnętrzną symetrię, zwłaszcza w przypadku, gdy n jest liczbą dodatnią. Każdemu „małemu” dzielnikowi można przypisać odpowiadający mu „duży dzielnik” – poza sytuacją, gdy mowa jest o dzielniku $\sqrt{n}$ (to wyróżnia kwadraty liczb całkowitych). Wszystkie dzielniki liczby całkowitej dodatniej można ustawić w ciąg rosnący zaczynający się liczbą 1 i kończący się liczbą n:

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

W trakcie tego referatu będziemy często używać pojęć typu „dwa największe dzielniki” lub „cztery najmniejsze dzielniki” danej liczby. Zawsze w takich sytuacjach chodzi nam po prostu o odpowiednią liczbę największych lub najmniejszych elementów ciągu powyżej (przypisanego danej liczbie). I jeszcze jedna definicja, zanim zaczniemy.

DZIELNIK WŁAŚCIWY liczby całkowitej dodatniej n to taki dodatni dzielnik liczby n, który jest mniejszy od n.

Zadanie 1. Wyznacz sumę wszystkich dodatnich liczb całkowitych, których największy dodatni dzielnik właściwy równy jest 55.

Rozwiązanie. Zakładam, że Czytelnik bez problemu byłby w stanie po prostu odgadnąć wszystkie składniki szukanej sumy. My jednak spróbujemy ubrać całe rozwiązanie w rozumowanie. Niech n będzie dowolną liczbą, której największym dzielnikiem jest 55. Twierdzimy, że wówczas liczba $\frac{n}{55}$ jest liczbą pierwszą. Skąd to wiemy? Gdyby dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$ zachodziło:

$$\frac{n}{55} = ab,$$

wówczas liczby $55a$ oraz $55b$ byłyby większymi od 55 dzielnikami właściwymi n.

Jaką liczbą pierwszą może być $\frac{n}{55}$? To nie jest sprawą dowolną dlatego, że liczba ta również jest dzielnikiem n, i to najmniejszym dzielnikiem większym od 1. A jakie dzielniki liczby n już znamy? Wiemy, że 55 jest dzielnikiem n, a zatem każdy dzielnik 55, czyli $1, 5, 11, 55$ też jest dzielnikiem n. Korzystamy tu z ważnej własności.

Dzielnik dzielnika jest dzielnikiem.

A zatem $\frac{n}{55}$ jako najmniejszy dzielnik n większy od 1 nie może być większy od 5. Skoro jednocześnie $\frac{n}{55}$ jest to liczba pierwsza, to możliwe są tylko następujące sytuacje:

$$\frac{n}{55} = 2 \quad \text{lub} \quad \frac{n}{55} = 3 \quad \text{lub} \quad \frac{n}{55} = 5,$$

co daje $n = 110$ lub $n = 165$ lub $n = 275$. Szukana suma to zatem 550.

* * *

To rozumowanie nie było przesadnie skomplikowane, ale istotny jest morał, który warto wprost sformułować.

Najmniejszy dzielnik większy od 1 jest liczbą pierwszą.

Największy dzielnik właściwy to iloraz przez najmniejszy dzielnik pierwszy.

[1] Warto także myśleć o zbiorze jej wielokrotności, ale to opowieść na inny raz...

Zadanie 2. Znajdź dodatnią liczbę całkowitą n spełniającą jednocześnie następujące dwa warunki.

- Suma dwóch najmniejszych dzielników dodatnich liczby n równa jest 6.
- Suma dwóch największych dzielników dodatnich liczby n równa jest 2022.

ROZWIĄZANIE. Najmniejszym dzielnikiem liczby n jest 1, a więc drugim najmniejszym dzielnikiem jest 5. W związku z tym, zgodnie z morałem poprzedniego zadania, największy dzielnik właściwy n to $\frac{n}{5}$. Największy dzielnik n to n, a więc:

$$\frac{n}{5} + n = 2022 \Rightarrow n = 1685.$$

Zadanie 3. Wypisano wszystkie dzielniki dodatnie liczby całkowitej $n \geqslant 1$, za wyjątkiem liczb 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

ROZWIĄZANIE. Ponownie pojawia się motyw największego dzielnika właściwego i najmniejszego dzielnika pierwszego. Tym razem nie znamy tych liczb, a jedynie ich iloraz, czyli 45. Niech p będzie tym najmniejszym dzielnikiem pierwszym. Warunki zadania mówią, że:

$$45p = \frac{n}{p} \Rightarrow 45p^2 = n.$$

Powyższa równość oznacza, że 45 i wszystkie jej dzielniki są dzielnikami n. W szczególności skoro 3 jest dzielnikiem 45, to $p \leqslant 3$. Mamy zatem dwie możliwości:

- dla $p = 2$ liczba n wynosi $45 \cdot 4 = 180$,
- dla $p = 3$ liczba n wynosi $45 \cdot 9 = 405$.

Zadanie 4. Znajdź sumę trzech najmniejszych dzielników dodatnich liczby $2^{2016} - 1$.

ROZWIĄZANIE. Twierdzimy, że owe trzy najmniejsze dzielniki dodatnie to $1, 3, 5$. Można to zobaczyć na kilka sposobów. Korzystając z rachunku na potęgach mamy:

$$2^{2016} - 1 = 4^{1008} - 1 = 16^{504} - 1.$$

Dowolna naturalna potęga liczby 4 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3. Analogicznie, naturalna potęga liczby 16 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 5.

Inny sposób na podzielność przez 3: rozkładamy: $2^{2016} - 1 = (2^{1008} - 1)(2^{1008} + 1)$. Wśród kolejnych trzech liczb $2^{1008} - 1, 2^{1008}, 2^{1008} + 1$ jedna jest podzielna przez 3 i nie jest to 2^{1008}. A zatem 3 jest dzielnikiem $2^{2016} - 1$.

Inny sposób na podzielność przez 5: patrzymy na cyfry jedności 2^n, dla n całkowitych dodatnich. Układają się one w ciąg okresowy:

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \cdots$$

(wystarczy przemnożyć pisemnie). A zatem 2^{2016} ma cyfrę jedności 6, co oznacza, że $2^{2016} - 1$ kończy się cyfrą 5. A zatem liczba ta jest podzielna przez 5, zgodnie ze znaną cechą podzielności.

Zadanie 5. Dodatnia liczba całkowita n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że n jest liczbą podzielną przez 6.

ROZWIĄZANIE. Tym razem nie znamy żadnych dzielników liczby n, ale założenie jest, jak się okazuje, bardzo ograniczające[2]. Wystarczy zauważyć, że jeśli $d_1 < d_2 < d_3$ są największymi dzielnikami właściwymi liczby n, to $\frac{n}{d_3} < \frac{n}{d_2} < \frac{n}{d_1}$ są najmniejszymi większymi od 1 dzielnikami n. Oznaczmy je jako $e_3 < e_2 < e_1$. Mamy teraz:

$$d_1 e_1 = d_2 e_2 = d_3 e_3 = 1.$$

Aby pokazać, że liczba n dzieli się przez 6 należy zatem wykazać, że $e_3 = 2$ oraz $e_2 = 3$. W przeciwnym razie liczba n nie będzie podzielna przez 2 lub 3, a są to najmniejsze możliwe różne od 1 dzielniki liczby naturalnej.

---

[2] Warto przed zrobieniem tego zadania zadać kilka pytań. Na przykład: czy umiemy wskazać przykład liczby spełniającej warunki zadania? A czy umiemy wskazać większy przykład? A czy widzimy, że rozkład $6n = 3n + 2n + n$ nie jest zawsze rozkładem na trzy największe dzielniki? A kiedy jest? Jest tu pole do eksperymentowania.

Skorzystajmy z warunku podanego w zadaniu. Przybiera on teraz postać

$$n = d_3 + d_2 + d_1 = \frac{n}{e_3} + \frac{n}{e_2} + \frac{n}{e_1}.$$

A zatem w istocie dostajemy klasyczny problem rozkładu 1 na trzy różne ułamki proste (czasem mówi się, że są to tzw. ułamki egipskie[3]):

$$\frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_1} = 1.$$

Załóżmy teraz, że $e_3 \neq 2$. Wówczas $3 \leqslant e_3, 4 \leqslant e_4, 5 \leqslant e_5$. Oznacza to, że:

$$\frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_1} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1.$$

Dostajemy sprzeczność. A zatem $e_3 = 2$. Gdyby teraz $e_2 > 3$, to mielibyśmy $e_1 > 4$, a więc:

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1.$$

A zatem $e_2 = 3$. Pokazaliśmy, że 2 i 3 są dzielnikami liczby n. Jest to zatem liczba podzielna przez 6.

Uwaga. Bardziej zaawansowanym uczniom można postawić problem, pochodzący z II CPSJ (2013 r. – zawody drużynowe). *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że suma trzech największych dzielników liczby n jest równa* 1457. Okazuje się, że są cztery takie liczby: $987, 1023, 1085, 1175$.

Zadanie 6. Dodatnia liczba całkowita n spełnia warunek $n = a^2 + b^2$, przy czym $a > 0$ jest najmniejszym dzielnikiem n różnym od 1, zaś $b > 0$ jest dzielnikiem n. Pokaż, że n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Zgodnie z naszą wiedzą a jest liczbą pierwszą, jako najmniejszy dzielnik n większy od 1. Kluczowe jest zauważenie, że składnik a^2 ma mało dzielników: jedynie $1, a, a^2$. Z drugiej strony liczba

$$n^2 - b^2 = a^2$$

jest podzielna przez b (obydwa składniki po lewej stronie są wielokrotnościami b). Stąd b jest dzielnikiem liczby a^2, a więc jedną z liczb $1, a, a^2$. Rozważmy każdą z tych możliwości.

- Jeśli $b = 1$, to $n = a^2 + 1$. Dwie kolejne liczby całkowite nie mogą być kwadratami (dlaczego?), więc n nie jest kwadratem.
- Jeśli $b = a$, to $n = a^2 + a^2 = 2a^2$. Gdyby n było kwadratem, to byłoby równe $\sqrt{2}a$, czyli liczbą niecałkowitą.
- Jeśli $b = a^2$, to $n = a^2 + a^4 = a^2(a^2 + 1)$. Ponownie, gdyby n było kwadratem, to również $\frac{n}{a^2}$ również musi być kwadratem, a jak wspomnieliśmy wyżej: $a^2 + 1$ kwadratem być nie może.

Uwaga. Założenie o tym, że b jest dzielnikiem n nie jest potrzebne. Czy Czytelnik umiałby to pokazać?

Zadanie 7. Niech d będzie dodatnim dzielnikiem liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Wykaż, że $2\sqrt{n} \leqslant d + \frac{n}{d} \leqslant n + 1$. Pokaż, że jeśli s_n jest średnią arytmetyczną wszystkich dodatnich dzielników liczby n, to zachodzą nierówności:

$$\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Rozwiązanie. Nierówność $d + \frac{n}{d} \geqslant 2\sqrt{n}$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$d^2 + n \geqslant 2\sqrt{n}d \iff d^2 - 2\sqrt{n}d + n^2 \geqslant 0 \iff (d - \sqrt{n})^2 \geqslant 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa. Przejdźmy do nierówności $d + \frac{n}{d} \leqslant n + 1$. Jeśli liczby $\frac{n}{d}$ oraz d są dzielnikami właściwymi, to każda z nich jest nie większa niż $\frac{n}{2}$. Stąd ich suma nie przekracza n. A jeśli $d = 1$ lub $d = n$, to rozważana suma wynosi $n + 1$.

Alternatywne rozwiązanie: można przyjąć $\frac{n}{d} = l$ i przepisać nierówność $d + \frac{n}{d} \leqslant n + 1$ do postaci $l + d \leqslant ld + 1$ i dalej przekształcić równoważnie do prawdziwej nierówności $(l-1)(d-1) \geqslant 0$ (mamy bowiem $l, d \geqslant 1$).

[3]Dowolną dodatnią liczbę wymierną można rozłożyć na sumę ułamków prostych. Jak to pokazać? To proste, należy w każdym kroku odejmować największy możliwy ułamek prosty. To sprawia, że licznik rozkładanego ułamka zmniejsza się co najmniej o 1.

Zauważmy dalej, że jeśli liczba n ma k dzielników, to $s_n = kS(n)$, gdzie $S(n)$ jest sumą dzielników n. Z drugiej strony, dodając do siebie wszystkie wyrażenia $d+\frac{n}{d}$, dla wszystkich dzielników d liczby n, dostajemy dwukrotność sumy dzielników liczby n, czyli $2kS(n)$ (każdy dzielnik wchodzi do tej sumy dwukrotnie: raz jako d, a raz jako $\frac{n}{d}$). A zatem dodając stronami nierówności $2\sqrt{n} \leqslant d+\frac{n}{d} \leqslant n+1$ po wszystkich k dzielnikach liczby n, dostajemy:

$$2k\sqrt{n} \leqslant 2kS(n) \leqslant k(n+1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Zadanie 8. (Iran, 1999) Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, których cztery najmniejsze dzielniki dodatnie $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ spełniają

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Rozwiązanie. Z warunków zadania będziemy wyprowadzać kolejne informacje o dzielnikach d_1, d_2, d_3, d_4. Niewątpliwie $d_1 = 1$. A zatem:

$$n = 1 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Zauważmy, że n nie może być liczbą nieparzystą, bo wtedy liczby d_2, d_3, d_4 jako dzielniki n byłyby nieparzyste, a zatem w sumie powyżej po lewej stronie mielibyśmy liczbę nieparzystą, a po prawej – liczbę parzystą. Wniosek – n jest liczbą parzystą. A zatem $d_2 = 2$. Stąd:

$$n = 5 + d_3^2 + d_4^2 \quad \Rightarrow \quad n - 5 = d_3^2 + d_4^2.$$

Zauważmy teraz, że skoro n jest parzyste, to znaczy, że $n-5$ jest nieparzyste. A zatem $d_3^2 + d_4^2$ jest nieparzysta. Oznacza to, że liczby d_3, d_4 są różnej parzystości. Jakie mamy możliwości?

- Jeśli d_3 jest parzyste, to musi to być 4. Inaczej bowiem d_3 będzie miało dzielnik większy od 2 i mniejszy od siebie, co nie jest możliwe.
- Jeśli d_3 jest nieparzystą liczbą pierwszą, to d_4 musi być równe $2d_3$ lub ewentualnie $d_3 = 3, d_4 = 4$.

Zajmijmy się teraz pokazaniem, że n nie jest podzielna przez 4. Dlaczego? Kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, a kwadrat liczby nieparzystej, czyli $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Zatem n daje resztę 2 z dzielenia przez 4.

W konsekwencji $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = p, d_4 = 2p$, gdzie $p > 3$ jest nieparzystą liczbą pierwszą. Mamy zatem:

$$n = 5 + p^2 + 4p^2 = 5(1 + p^2).$$

Stąd 5 jest dzielnikiem n, a więc $p = 5$ i ostatecznie uzyskujemy szukaną wartość $n = 130$.

Zadanie 9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą o dzielnikach $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Wykaż nierówność

$$d_1d_2 + d_2d_3 + \ \ldots\ + d_{k-1}d_k < n^2.$$

Kiedy liczba $d_1d_2 + d_2d_3 + \ \ldots\ + d_{k-1}d_k$ jest dzielnikiem liczby n^2?

Rozwiązanie. Zauważmy, że $d_k = n, \quad d_{k-1} \geqslant \frac{n}{2}, \quad d_{k-2} \geqslant \frac{n}{3}, \quad d_{k-3} \geqslant \frac{n}{4}, \quad \ldots$. A zatem:

$$d_kd_{k-1}+d_{k-1}d_{k-2}+\cdots+d_2d_1 < n\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}+\cdots = \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot k+1}\right)n^2 = \left(1-\frac{1}{k+1}\right)n^2 < n.$$

Skąd się wziął ostatni krok? Otóż mamy:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot k+1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{k+1} < 1.$$

A co z drugą częścią? Twierdzimy, że rozważana liczba jest dzielnikiem n rylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą, czyli gdy $d_1d_2 = n$. Załóżmy więc, że $k \geqslant 2$ i niech p będzie najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą n. Wówczas:

$$d_kd_{k-1} + d_{k-1}d_{k-2} + \cdots + d_2d_1 > d_kd_{k-1} = \frac{n^2}{p}$$

a więc rozważana liczba przekracza największy dodatni dzielnik liczby n^2 (oczywiście p to także najmniejszy dzielnik n^2), ale jest mniejsza niż n^2, czyli to nie jest dzielnik n^2. Rozwiązanie jest zakończone.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy ANTYPIERWSZĄ, gdy n posiada więcej dodatnich dzielników niż każda dodatnia liczba całkowita mniejsza od n. Przykładowymi liczbami antypierwszymi są: $1, 2, 4, 6, 12$ i 24.

Do rozwiązania poniższych zadań przyda nam się wiedza o liczbie dzielników liczby całkowitej dodatniej. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$ mamy:

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k},$$

gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ są dzielnikami pierwszymi n. A zatem każdy dzielnik liczby n może mieć, na mocy jednoznaczności rozkładu, jedynie postać:

$$p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k},$$

gdzie $t_1 \leqslant s_1, \ldots, t_k \leqslant s_k$ i każdą liczbę t_i można wybrać tak, aby była dowolną liczbą całkowitą od 0 o s_i. A zatem z zasady mnożenia wynika, że dzielników liczby n jest łącznie:

$$(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (s_k + 1).$$

Zadanie 10. Pokaż, że żadna z liczb $2^3 \cdot 5^2, 2^3 \cdot 3^4, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ nie jest antypierwsza.

ROZWIĄZANIE. Ze wzoru na liczbę dzielników wnioskujemy, że każdą liczbę wyżej można podmienić na mniejszą o tej nie mniejszej liczbie dzielników.

- Liczba dzielników $2^3 \cdot 5^2$ równa jest $(3+1)(2+1) = 12$. Ale przecież również liczba $2^3 \cdot 3^2$ ma 12 dzielników, więc $2^3 \cdot 5^2$ nie jest antypierwsza.
- Liczba dzielników $2^3 \cdot 3^4$ równa jest $(3+1)(4+1) = 20$. Ale przecież również liczba $2^4 \cdot 3^3$ ma 20 dzielników, więc $2^3 \cdot 3^4$ nie jest antypierwsza.
- Liczba dzielników $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ wynosi $(2 + 1)(2 + 1)(2 + 1)$ wynosi 27. Ale mamy mniejszą liczbę mającą więcej dzielników, np.:

  $$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 > 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

  A zatem $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ ma $(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 30$ dzielników. Czyli $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ nie jest antypierwsza.

Zadanie 11. Pokaż, że jeśli $n > 1$ jest liczbą antypierwszą, to n jest liczbą parzystą.

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, że $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$ ma jedynie nieparzyste dzielniki pierwsze. Możemy zatem podmienić p_1 na 2 dostajemy liczbę mniejszą o tej samej liczbie dzielników. A zatem n musi być parzysta.

Zadanie 12. Pokaż, że dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje liczba antypierwsza n spełniająca warunek:

$$k \leqslant n < 2k.$$

ROZWIĄZANIE. Załóżmy przeciwnie, że istnieje $k > 1$ takie, że nie ma liczby antypierwszej pomiędzy $k \leqslant n < 2k$. Niech h będzie największą antypierwszą liczbą mniejszą niż k. W takim razie jest to też największa liczba antypierwsza mniejsza niż $2k$. Z drugiej strony, istnieje liczba dodatnia l taka, że

$$k \leqslant 2^l h < 2k.$$

Z drugiej strony łatwo widzieć, że liczba dzielników liczby $2^l h$ jest większa niż liczba dzielników h, a więc dostaliśmy nową liczbę antypierwszą – sprzeczność.

Zadanie 13. Pokaż, że liczba $16! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 16$ nie jest antypierwsza.

ROZWIĄZANIE. Rozważmy liczbę $\frac{13}{16} \cdot 16!$. Oczywiście jest ona mniejsza od $16!$. Załóżmy, że dla pewnych liczb całkowitych $e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3 \geqslant e_4 \geqslant e_5 \geqslant e_6$ mamy $16! = 2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4} \cdot 11^{e_5} \cdot 13^{e_6}$. Zdefiniowana przez nas liczba ma rozkład na czynniki pierwsze postaci:

$$13 \cdot 15! = 2^{e_1 - 4} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4} \cdot 11^{e_5} \cdot 13^{e_6 + 1}.$$

Jeśli podzielimy liczbę dzielników $13 \cdot 15!$ oraz liczbę dzielników $16!$ dostajemy:

$$\frac{(e_1 - 3)(e_6 + 2)}{(e_1 + 1)(e_6 + 1)} \geqslant 1 \iff e_1 e_6 - 3e_6 + 2e_1 - 6 \geqslant e_1 e_6 + e_1 + e_6 + 1 \iff e_1 \geqslant 4e_6 + 7.$$

Zauważmy jednak, ze liczba 2 wchodzi do rozkładu $16!$ poprzez czynniki $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$, czyli w istocie: $e_1 = 11$. Tymczasem $e_6 = 1$, co oznacza $4e_6 + 7 = 11$. A zatem liczba $16!$ nie jest antypierwsza. Zachęcam Czytelnika do wyprowadzenia stąd obserwacji, że $n!$ nie jest antypierwsza, dla $n > 16$.

Liczby antypierwsze opisał w roku 1915 S. Ramanujan. Wiele własności liczb antypierwszych jest trudnych. Autorowi nie jest np. znany elementarny dowód tego, że jedynymi antypierwszymi kwadratami są liczby $1, 4, 16$.