Seminarium Olimpiady Matematycznej Juniorów dla nauczycieli

Arkadiusz Męcel

Koszalin, I LO im. Stanisława Dubois, 16.09.2019 r.

Tekst ten powstał na podstawie wystąpienia przed nauczycielami z Koszalina i okolic, wygłoszonego przeze mnie 16 września 2019 roku. Obok części warsztatowej zawiera również krótkie wprowadzenie do Olimpiady.

1 Czym jest Olimpiada Matematyczna Juniorów?

Olimpiada Matematyczna Juniorów (OMJ) to ogólnopolskie zawody matematyczne, o wysokim standardzie merytorycznym, skierowane do uczniów szkół podstawowych. Zawody organizowane są od piętnastu lat przez Stowarzyszenie na Rzecz Edukacji Matematycznej z siedzibą w Warszawie, wywodzące się w dużej mierze z grona osób zaangażowanych wcześniej w Olimpiadę Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych. Inicjatywa OMJ (a wcześniej OMG – Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów) powstała jako odpowiedź tego środowiska na fakt dokonania reformy systemu edukacji w 1999 roku. Uznano bowiem, że konieczne jest rozszerzenie na kształtujący się wtedy nowy typ szkoły – gimnazjum, zasięgu oddziaływania społecznego powołanej przez Polskie Towarzystwo Matematyczne w 1949 roku Olimpiady dla szkół ponadpodstawowych tak, by rozwój młodych zdolnych Polaków nie odbiegał poziomem od tego, co robi się w wiodących (i rozwijających się) krajach świata. Zawody tego typu odbywają się przecież od lat w dziesiątkach krajów, a także w skali międzynarodowej.

Co przychodzi Państwu na myśl, gdy mowa jest o olimpiadzie matematycznej? Czy najzdolniejsi uczniowie, dla których chcielibyście znaleźć czas i ciekawą formę zaangażowania? Na pewno i my, i ich rodzice mamy chęć „stworzenia im szansy”, umożliwienia im „przebicia się”, zagwarantowania im wejścia do najlepszych liceów. Może pojawia się też odczucie bezradności wobec licznych obowiązków i obawa, że poziom Olimpiady będzie zbyt trudny nawet na zajęcia dodatkowe? *Czy w najlepszych szkołach w Polsce nie ma więcej środków i możliwości, niż u nas?* Historia Olimpiady pokazuje, że możliwe jest stworzenie czegoś więcej niż tylko zawodów dla najlepszych.

Staramy się tak kształtować organizację, przebieg i program merytoryczny Olimpiady, aby stanowiła ona możliwie szeroki projekt edukacyjny – owszem: o wysokim standardzie merytorycznym, ale i o przyjaznym standardzie działania. Zgodnie z wytycznymi Stowarzyszenia na Rzecz Edukacji Matematycznej Olimpiada stawia sobie następujące cele: rozbudzanie zamiłowania do matematyki wśród młodzieży, wyszukiwanie uczniów zainteresowanych matematyką, kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy i stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży uzdolnionej. Jak widać tylko ostatni z wymienionych celów dotyczy osób w jakimś stopniu szczególnych. Oczywiście, że chcemy ich znaleźć i ukierunkować! Nie chodzi jednak tylko o dostarczanie osobom zdolnym ciekawych zadań i umożliwienie im zweryfikowania swojego talentu poprzez rywalizację z rówieśnikami, i nie tylko o ukierunkowanie rozwoju matematycznego młodych zdolnych według standardów obowiązujących na całym świecie. Równie ważne cele to „budzić zamiłowanie”, „wyszukiwać zainteresowanych” i „kształtować samodzielność myślenia”. Te cele tworzą „mapę drogową” ku upowszechnianiu tzw. myślenia matematycznego.

Chodzi nam w Olimpiadzie także o pewien rodzaj wychowania do dojrzałego myślenia poprzez matematykę – a zatem na przykład do staranności w formułowaniu myśli, do pokory wobec nawet prostego z pozoru zadania, do przejrzystego wyrażania swoich przemyśleń, do wytrwałości wobec trudności, do cierpliwości wobec swojego własnego niezrozumienia różnych zagadnień, do wychodzenia z izolacji, budowania zdrowych relacji i odrzucania mentalności w rodzaju „*wszystko mi się należy tu, i teraz*”. Nie ma królewskiej drogi – znamy to powiedzenie.

Celem zadań olimpijskich nie jest sprawdzenie tego czy ktoś zna definicję pierwiastka lub czy ktoś umie zastosować twierdzenie Pitagorasa. Takiej (być może wygodnej) banalności chcemy za wszelką cenę uniknąć. Podobnie jak chcemy uniknąć elitaryzmu. Nie chodzi o dokonanie podziału na „lepszych” i „gorszych”. Olimpiada ma budzić dociekliwość i zamiłowanie do matematyki. Tworząc zadania olimpijskie chcemy kształtować dobre intuicje matematyczne, uczyć rzetelnego podejścia do trudnych problemów, a jako matematycy – chcemy dać posmakować uczestnikowi charakterystycznej „iluminacji”, fenomenu radosnego „odkrycia” – słynnej „Eureki”.

Struktura zawodów Olimpiady Matematycznej Juniorów

Za przeprowadzanie OMJ odpowiedzialny jest Komitet Główny z siedzibą w Warszawie. Olimpiada organizowana jest zgodnie z rozporządzeniem MEN w sprawie organizacji oraz sposobu przeprowadzania konkursów, turniejów i olimpiad. Zawody OMJ są trójstopniowe i polegają na pisemnym, samodzielnym rozwiązywaniu zadań konkursowych. W roku szkolnym 2019/2020 odbywa się XV edycja OMJ.

Każda edycja OMJ składa się kolejno z zawodów stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego. Zawody stopnia pierwszego mają zasięg szkolny, zawody stopnia drugiego – wojewódzki, a zawody stopnia trzeciego – ogólnopolski. Zawody stopnia pierwszego składają się z części korespondencyjnej i części testowej. Za przygotowanie zadań konkursowych odpowiedzialna jest Komisja Zadaniowa Komitetu Głównego. Propozycje zadań nadsyłać może jednak każdy – nie tylko członkowie Komisji. W przeprowadzeniu zawodów Komitet Główny wspierany jest przez dwanaście Komitetów Okręgowych, które koordynują sprawdzanie prac części korespondencyjnej zawodów stopnia pierwszego oraz organizują, z pomocą KG, zawody stopnia drugiego w swoich okręgach. Szczegółowe informacje oraz zadania z ubiegłych lat znaleźć można na stronie internetowej: `www.omj.edu.pl`.

Zawody pierwszego stopnia każdej edycji OMJ zaczynają się na początku września. Na stronie OMJ pojawia się siedem zadań otwartych, na których rozwiązanie uczestnicy mają około półtorej miesiąca. Rozwiązania tych zadań przesyłać mogą sami – lub za pośrednictwem koordynatora szkolnego – do Komitetów Okręgowych OMJ. Rozwiązanie każdego zadania punktowane jest w skali 0, 2, 5 lub 6 punktów, przy czym ocenie podlega przedstawiony tok rozumowania. Za rozwiązania tych zadań otrzymać można zatem łącznie 42 punkty. Jest to tak zwana część korespondencyjna zawodów pierwszego stopnia OMJ.

W ramach zawodów pierwszego stopnia odbywa się – równolegle do części korespondencyjnej – część testowa. Jest ona organizowana pod koniec września w tych szkołach, które zarejestrują swój udział w zawodach OMJ. Polega ona na tym, że w określonym przez Komitet Główny dniu i godzinie – jednakowych dla całego kraju, w szkołach zarejestrowanych przez OMJ odbywa się test składający się z 15 pytań wielokrotnego wyboru. Każde pytanie testowe składa się z trzech niezależnych stwierdzeń, z których część jest prawdziwa, a część fałszywa (mogą być także wszystkie prawdziwe lub wszystkie fałszywe). Zadaniem uczestnika jest rozstrzygnięcie, które z tych trzech stwierdzeń są prawdziwe. Jeśli uczeń poda poprawne odpowiedzi we wszystkich trzech przypadkach, otrzymuje 1 punkt. Podanie poprawnych odpowiedzi w dwóch przypadkach premiowane jest 1/2 punktu. W pozostałych przypadkach uczeń nie otrzymuje punktów. Do zdobycia jest zatem maksymalnie 15 punktów.

Wynikiem uzyskanym w zawodach pierwszego stopnia jest suma punktów obu części: korespondencyjnej i testowej. Nie jest konieczny udział w obu częściach. Uczeń, który nie weźmie udziału w danej części otrzymuje z niej 0 punktów i zależnie od wyniku drugiej części oraz wyników innych uczestników może zostać zakwalifikowany do zawodów drugiego stopnia. Zawody drugiego i trzeciego stopnia odbywają się w terminie i miejscu ogłoszonym przez Komitet Główny OMJ. Podczas 3 godzin (180 minut) uczestnicy rozwiązują 5 zadań otwartych w warunkach kontrolowanej samodzielności. W oparciu o wyniki zawodów trzeciego stopnia Komitet Główny OMJ ustala listę laureatów, a także kwalifikuje na tygodniowe Obozy Naukowe oraz Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów. W ostatnich latach najlepsi biorą również udział w zawodach w Wietnamie.

Szkolny koordynator OMJ

Środowisko osób związanych z Olimpiadą, choć moderowane – jeśli tak można powiedzieć – przez grono pracowników akademickich, którym szczególnie bliska jest edukacja szkolna i popularyzacja matematyki – jest tworzone przede wszystkim wysiłkiem i zaangażowaniem nauczycieli szkolnych. Choć w zawodach uczestniczą dziesiątki tysięcy uczniów – to właśnie praca tysięcy nauczycieli związanych z OMJ sprawia, że zawody te nie ograniczają się jedynie do rywalizacji najlepszych ośrodków, ale stanowią cenny i powszechnie dostępny projekt edukacyjny. To ze środowisk zaangażowanych nauczycieli (licealnych) złożone są w większości także Komitety Okręgowe.

Uczestniczenie – z perspektywy nauczyciela – w kolejnych edycjach OMJ i zaangażowanie w jej organizację daje wiele satysfakcji i motywacji do pracy. Z pewnością może stymulować aktywność w pracy z uczniem zdolnym, pozwala nawiązać cenne relacje i daje pewność, że wybiera się zaangażowanie w inicjatywę dającą uczniom wymierne rezultaty, mające realny wpływ na ich przyszłość. Już udział w etapie rejonowym zawodów OMJ jest dla wielu uczniów podstawą do uzyskania rozmaitych stypendiów czy uprawnień. Udział w zawodach finałowych gwarantuje natomiast uprawnienia równoważne z tytułem laureata konkursu kuratoryjnego (`OMJ to nie jest konkurs kuratoryjny!`). Jest to w szczególności przepustka do najlepszych liceów i szansa na udział w licznych inicjatywach ogólnopolskich popularyzujących matematykę (obozy, wyjazdy, prelekcje).

Zadaniem koordynatora szkolnego OMJ jest zorganizowanie i przeprowadzenie w swojej szkole części testowej zawodów OMJ, zgodnie z zasadami określonymi przez Komitet Główny. Rejestracja szkoły do udziału w OMJ odbywa się poprzez wypełnienie formularza rejestracyjnego on-line i przesłanie na wskazany adres czytelnego skanu papierowej dokumentacji. Formularz rejestracyjny on-line wypełnia osoba wyznaczona przez dyrekcję szkoły do pełnienia funkcji szkolnego koordynatora OMJ. Szkolni koordynatorzy OMJ szkół, które zostały zarejestrowane w systemie, otrzymują wcześniejszy dostęp do zadań testowych i innych poufnych materiałów oraz odpowiadają za zachowanie ich w tajemnicy do momentu, aż staną się jawne.

Koordynator szkolny, zgodnie z wytycznymi Komitetu Głównego, zapewnia warunki samodzielnej pracy uczniom oraz dostarcza im – w odpowiednim dniu i godzinie oraz na umówionym miejscu, kompletne zestawy zadań testowych. Koordynator szkolny jest również odpowiedzialny za zabezpieczenie prac i pozostałych dokumentów otrzymanych od uczniów w ramach udziału w zawodach (m.in. zgody opiekunów prawnych i samych uczestników na udział w zawodach zawierającej też klauzulę RODO). Po przeprowadzeniu testu szkolny koordynator odpowiada za wprowadzenie wyników do systemu informatycznego OMJ i za przesłanie dokumentacji do Warszawy.

Co chyba nieuniknione, obok istotnej funkcji administracyjnej rolą koordynatora szkolnego staje się zachęcanie uczniów (często przez ich nauczycieli!) do udziału w części testowej zawodów OMJ (a pośrednio także w części korespondencyjnej). Chcielibyśmy, aby koordynatorzy szkolni byli w swoim otoczeniu swego rodzaju „ambasadorami Olimpiady”. Stąd istotną rolą tego seminarium jest przekonanie Państwa o atrakcyjności tych zawodów.

Koordynator szkolny może także, choć nie musi, koordynować wysyłkę części korespondencyjnej pierwszego etapu wśród uczniów swojej szkoły. Każdy uczestnik może samodzielnie przesłać swoje rozwiązania do Komitetu Okręgowego. Regulamin OMJ przewiduje jednak szereg wymogów formalnych, których dopełnienie jest konieczne do uznania ucznia za uczestnika OMJ. Są to: odpowiednia redakcja formalna pracy (naniesienie poszczególnych zadań na osobne – i odpowiednie – arkusze, odpowiednie podpisanie pracy) oraz właściwe i terminowe zaadresowanie przesyłki (w tym na właściwy adres KO). Koordynator szkolny może dopilnować, że formalności te zostaną dopełnione. W wielu przypadkach jest to bardzo potrzebna i przydatna pomoc.

Jak zmierzyć się z zadaniami?

Celem tych warsztatów jest przekonać Państwa, że punkt wyjścia, z którego startujemy wszyscy naszą przygodę z OMJ nie jest daleki od tego, czym zajmujemy się na co dzień w szkole. Zadania OMJ mogą stanowić, zwłaszcza część testowa, przyjemną odmianę od rachunkowych zadań. Czasami by rozpalić talent wystarczy tylko iskra. Liczymy na to przygotowując tę część zawodów. Jak przekonamy się za chwilę test sprawdza w istocie intuicje matematyczne uczestników: piętnuje nieprawidłowe rozumienie obiektów i stereotypowe myślenie, a nagradza dociekliwość, uważność i poprawne rozumienie nieoczywistych zależności pomiędzy prostymi nawet obiektami. Test pozwala też, co wciąż odkrywamy, uczynić krok w kierunku olimpijskiej samodzielności. Co mam na myśli?

Od Olimpiady niejednego odstrasza perspektywa rozwiązywania zadań otwartych. Jest to przecież serce tych zmagań – zarówno w części korespondencyjnej zawodów pierwszego stopnia, jak i dalej – na etapie okręgowym i ogólnopolskim. Wydaje się, także wielu z nas, że kompletnie nie wiadomo jak zabrać się za te zadania! Nawet zadania części korespondencyjnej pierwszego etapu OMJ na pierwszy rzut oka wyglądają na zupełnie niestandardowe, a skoro niestandardowe, to na pewno: trudne. Czy rzeczywiście? Zadania te nie są w rzeczywistości bardzo trudne, ale wymagają rzeczywiście intuicji, namysłu, czasem dłuższego rozmyślania – być może nawet uzupełnienia wiedzy w oparciu o pewne źródła. Dlatego uczestnicy mają półtorej miesiąca czasu na ich rozwiązanie. Zadania te wymagają samodzielnej pracy – obok rozwijania intuicji matematycznej rozwijanie samodzielności w poszukiwaniu drogi do celu to drugi ważny krok na „drodze” do myślenia matematycznego. Trzeba uwolnić się od przekonania, że wszystkie problemy rozwiążemy za pomocą jakiegoś wzoru czy gotowego algorytmu.

Skąd brać pomysły? Paradoksalnie – pomocą są zadania testowe. Forma ułożenia trzech stwierdzeń, do których ustosunkowuje się uczestnik testu to często w istocie forma rozbicia pytania zawartego w ostatnim punkcie na trzy: dwie podpowiedzi i właściwy problem. Punkty (a) i (b) zadania nakierowują często we właściwą stronę lub zwracają uwagę na jakiś dodatkowy aspekt, a punkt (c) to właściwy problem. Niejedno zadanie otwarte to przerobiona przez Komisję Zadaniową propozycja zadania testowego. Bywa oczywiście, i odwrotnie.

Pozwolę sobie w tym miejscu na dygresję, która pokazuje zagadnienie bardziej obrazowo. Rozwiązywanie zadania olimpijskiego jest jak pokonywanie problemu wspinaczkowego na ściance albo w skałkach – wymaga kilku ruchów, jeden jest zwykle odrobinę trudniejszy, a całość nie wymaga wielkich nakładów sił czy środków. Ruch wspinaczkowy daje swoiste poczucie radości i wolności. Jest to coś innego niż turystyka – ścieżka nie jest oczywista, nie potrzeba ciężkiego bagażu czy znajomości zasad survivalu. Wspinanie wymaga czasu i niekiedy wielu prób. Najtrudniej jednak przełamać samą obawę przed wspinaniem. Nie ma innej drogi niż po prostu spróbować. Gdy się to stanie przed człowiekiem odkrywa się nowa rzeczywistość. Kto wie, może ze skał trafi on kiedyś w Tatry, Alpy, a nawet Himalaje? Nawet jeśli nie, radość płynąca z przełamania samego siebie dużo wnosi w dorosłe życie. Absolwenci Olimpiady Matematycznej Juniorów odważnie wybierają rozmaite kierunki studiów, nie tylko na uczelniach ścisłych. Dokądkolwiek trafią – matematyczne myślenie będzie im przydatne.

Jest tu jednak dodatkowy aspekt. Do rzemiosła wspinaczkowego, skoro już używamy tej przenośni, należy też pewien zasób zachowań związanych z bezpieczeństwem. Nawet na najprostszej drodze wspinaczkowej trzeba umieć używać liny i przyrządów służących do asekuracji. Inaczej po dojściu na szczyt nie będziemy mieli drogi powrotnej. Ważnym elementem części korespondencyjnej zawodów pierwszego stopnia Olimpiady (a także i kolejnych etapów) jest uczenie się redagowania rozwiązań. Bardzo niewielu (nawet bardzo zdolnych) uczniów jest w stanie przejrzyście pisać swoje rozumowania. Delikatne wyważenie proporcji pomiędzy drobiazgowością, a „wodolejstwem" jest oczywiście, zwłaszcza na początkowych etapach, sprawdzane w stopniu raczej podstawowym. Nie jest to wszakże tekst przeznaczony do publikacji naukowej. Niemniej jednak niech nie dziwi uczestnika, że rażące błędy w redakcji, a nawet i braki w dokumentacji nie mające już nic wspólnego z samą merytoryczną stroną rozwiązania mogą doprowadzić do niskiej oceny pracy a nawet do dyskwalifikacji. Zasady takie jak: umieszczanie rozwiązań na osobnych arkuszach, poprawne podpisywanie kartek z rozwiązaniami, poprawne adresowanie, dołączanie odpowiednich zaświadczeń – to elementy ważne i wbrew pozorom istotne także dla rozwoju matematycznego. Pewien słynny matematyk mówił nawet, że rozwiązanie problemu to dopiero połowa drogi. Czy nie podobnie jest w życiu? Nie wystarczy „mieć racji". Trudności ze zrozumieniem tego mają zwykle uczniowie zupełnie początkujący oraz bardzo zaawansowani. Ważna może być w tym kontekście rola nauczyciela, który zasygnalizuje niekiedy braki w redakcji – nie podpowiadając oczywiście jak je poprawić.

Drugi i trzeci stopień Olimpiady mają w istocie charakter zawodów. Od nauczycieli i samych uczniów zależy to w jakim stopniu przejdą wspólnie wtajemniczenie w program merytoryczny Olimpiady. Z jednej strony chcemy, aby zadania Olimpiady dotyczyły w sposób niebanalny pojęć czy umiejętności szkolnych, z drugiej nie stronimy też od takich problemów, gdzie wykorzystać trzeba bardziej nieoczekiwane metody czy obserwacje. W tym celu Komitet Główny Olimpiady redaguje szereg pomocy naukowych, poczynając od gazetki „Kwadrat". Chcemy uczyć, zgodnie z jednym z celów, samodzielnego zdobywania wiedzy, dostarczając zarazem kompetentnych materiałów dydaktycznych. Gorąco zachęcam także Państwa do skorzystania z nich.

Chciałbym osobiście, dopiero rozpoczynając pracę przewodniczącego KG, aby Olimpiada dawała nam wszystkim przekonanie, że kolejne progi na drodze do wyżyn matematycznych są możliwe (choć nie zawsze łatwe) do zrobienia, o ile wiemy jak iść. Najgorsze jest dla wielu uczniów (i nie tylko!) poczucie zagubienia i bezradności w kontakcie z matematyką. Pokazanie jak postawić pierwsze pewne kroki – to jedno z zadań, jakie Olimpiada stawia przed sobą. Wielu stawia sobie pytanie: jak wychodząc od podstawy programowej – obecnej lub innej – iść w kierunku myślenia matematycznego? Olimpiada jest na swój sposób „antypodyczna" wobec wszelkiej podstawy, sięga możliwie szeroko i odważnie, zwłaszcza po nieszablonowe metody i pomysły. Nie jest przy tym jedyną propozycją dla ucznia zdolnego. Warto jednak pójść drogą, którą przeszło wielu wybitnie uzdolnionych, dziś studentów, doktorantów, w przyszłości –matematyków, fizyków, inżynierów, chemików, lekarzy, i nie tylko.

Tematyka i metoda przyjęta w części warsztatowej

W ramach warsztatów spróbuję naszkicować pewne symptomy wskazujące na to, że zadania olimpijskie mogą służyć jako narzędzie edukacyjne. Będziemy wspólnie szukać odpowiedzi na pytanie: czego próbujemy nauczyć w tych zadaniach? Czym różnią się od zadań szkolnych? Przyjrzymy się tym zagadnieniom zarówno na przykładach zadań testowych, jak i zadań otwartych. W obydwu częściach motywem przewodnim będzie podzielność – zarówno znana uczniom jako zagadnienie związane z zapisem dziesiętnym liczby całkowitej i cechami podzielności, jak również z własnością rozkładu liczby całkowitej na czynniki pierwsze. Powiemy też kilka słów o resztach z dzielenia, największym wspólnym dzielniku i algorytmie Euklidesa.

Podstawowym narzędziem pracy będzie dla nas broszura „Zadania testowe Olimpiady Matematycznej Juniorów 2011-2018" przygotowana przez Komitet Główny OMJ. Zawiera ona uszeregowane działami matematyki szkolnej zadania testowe OMJ wraz z rozwiązaniami oraz z załącznikiem w postaci danych statystycznych odnoszących się do każdego zadań. W testach OMJ biorą udział tysiące uczniów. Możliwość prześledzenia jak wygląda ich starcie z tymi zadaniami może być cenną pomocą w przygotowaniu zajęć dodatkowych, a także może uświadomić które szczególnie działy matematyki sprawiają trudności. W tekście odnosimy się do pozycji zadania w broszurze.

2 Podzielność w zadaniach testowych OMJ

Pierwsze cztery zadania związane są z cechami podzielności i zapisem dziesiętnym liczby całkowitej.

Zadanie 1 (59). *Cyfry* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest:*
a) podzielna przez 5,
b) podzielna przez 9,
c) liczbą pierwszą.

Zadania olimpijskie narzucają niekiedy taki stopień dowolności wyboru obiektów oraz taki stopień komplikacji konfiguracji w jakich występują te obiekty, które nie są spotykane w standardowych zadaniach szkolnych. Celem jest wprowadzenie do problemu elementu poszukiwania czy rozeznania w samej naturze obiektów, które badamy – zanim jeszcze weźmiemy się za poszukiwanie metody, którą do ich badania zastosujemy. W rozważanym zadaniu występuje tylko pierwsza z trudności – rozeznanie w zbiorze liczb o potencjalnie różnych własnościach. Nie jest to jednak zadanie wykraczające poza program! Uczeń ma wszystkie narzędzia, aby je rozwiązać.

Główną osią problemu postawionego w zadaniu jest umiejętność stosowania cech podzielności, co jest standardowym programowym wymaganiem. Sprawdzamy jednak tę umiejętność nie na konkretnym przykładzie, ale na specyficznie określonym zbiorze liczb – tu jest jeden aspekt komplikacji. Dodatkowo, zadajemy jedno pytanie niestandardowe. Zadania testowe są często skonstruowane w taki sposób, by dwa łatwiejsze podpunkty zawierały jakąś podpowiedź do ostatniego – trudniejszego. Treść zadania – gdyby nie było ono testowe – zakończona problemem postawionym w podpunkcie (c) byłaby już dla wielu uczniów niebanalnym zadaniem otwartym.

Przejdźmy do rozwiązania. Najpierw rozważamy punkt (a). Czy można z ustawionych w odpowiedniej kolejności cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ułożyć liczbę podzielną przez 5? Oczywiście tak – wystarczy na przykład dokonać drobnej zamiany kolejności i ułożyć liczbę 123465. Jest to ni mniej, ni więcej, tylko sprawdzenie znajomości kryterium szkolnego. Zwróćmy, dla pewności, uwagę na konstrukcję pytania typu: „czy można”? Wprawdzie są takie możliwe ustawienia cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, które nie dają liczby podzielnej przez 5, ale problem postawiony w (a) polega na określeniu czy ISTNIEJE takie ustawienie, w którym podzielność zachodzi. Odpowiedź brzmi: TAK.

Także podpunkt (b) mógłby chyba znaleźć się w szkolnym podręczniku. Cechę podzielności przez 9 sprawdzamy sumując cyfry danej liczby. Jak jednak sumować cyfry liczby, której nie znamy? Możemy wprawdzie zbudować wiele liczb z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ale wszystkie one mają cechę wspólną (mówimy czasem: niezmiennik). Suma cyfr KAŻDEJ z tych liczb to 21. A zatem ŻADNA liczba spośród tych, które można ułożyć z tych cyfr nie jest podzielna przez 9, bo 21 nie jest podzielna przez 9. A zatem w punkcie (b) odpowiedź brzmi: NIE.

Dochodzimy teraz do pytania trzeciego, czyli podpunktu (c). Jeśli uczeń przeczyta je zupełnie niezależnie od poprzednich punktów uzna być może, że pytanie to zupełnie przekracza jego wiedzę (czy, co naturalne, jego znajomość sześciocyfrowych liczb pierwszych) i w związku tym „nie podejdzie” do całkiem nietrudnego zadania. Czy nie byłoby to ładne pytanie „na szóstkę” na sprawdzianie z cech podzielności?

Odpowiedź na pytanie (c) dostaliśmy w zasadzie przed chwilą. Liczba, którą możemy ułożyć z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ma sumę cyfr równą 21, która to jest liczbą podzielną przez 3. A zatem kryterium podzielności przez 3 zaświadcza, że każda taka liczba jest podzielna przez 3. Liczba sześciocyfrowa podzielna przez 3 nie może być liczbą pierwszą (sprawdzamy tu znajomość definicji – rzecz jasna). A zatem odpowiedź do punktu (c) brzmi: NIE.

Było to zadanie sprawdzające wiedzę, ale niekoniecznie w standardowy sposób. Jak poszło uczestnikom X OMJ? Zajrzyjmy do statystyk. Mało kto dał się oszukać podpunktem (a). Poprawnej odpowiedzi udzieliło ponad 95% uczestników, a było ich niemal 14 tysięcy. Mimo to ponad połowa z nich dała się oszukać przy podpunktach (b) i (c). Prawie 30% uczestników nie zauważyło rozumowania z punktu (c) i w sposób intuicyjny „strzeliło”, że w tak dużym (czy rzeczywiście?) zbiorze liczb musi się znaleźć liczba pierwsza. Prawie 16% nie zauważyło również poprawnej odpowiedzi w punkcie (b), stawiając jednak prawidłową odpowiedź w ostatnim punkcie (co również mówi coś bardziej o ich intuicji niż poprawnym rozumowaniu). Konsekwentni w popełnianiu błędów byli bardzo nieliczni – jedynie 6%. Warto czytać statystyki zadań testowych. Wnioski są bardzo ciekawe.

Podsumujmy to, co powiedzieliśmy. Trudność zadania testowego nie polega na tym, że uczeń nie ma wiedzy potrzebnej, by je rozwiązać. Trudność polega na: zrozumieniu struktury logicznej pytania i zastosowaniu znanych sobie faktów w konfiguracji bardziej ogólnej niż ta, do której jest przyzwyczajony wykonując zadania szkolne. Jaki to ma sens dydaktyczny? Otóż taki, że po rozwiązaniu takich zadań jesteśmy znacznie bliżej rozumienia skąd się bierze dana metoda. A i miłe zaskoczenie prostotą rozwiązania punktu (c) ma tu swoje znaczenie.

Zadanie 2 (53). *Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n wynosi* 30. *Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez*
a) 2,
b) 3,
c) 5.

Drugie zadanie konfrontuje uczestnika z kryterium bardzo podobnym, z pozoru, do znanego mu kryterium podzielności przez 3. Oto inny typ trudności: tym razem nie komplikujemy zbytnio samych obiektów, ale modyfikujemy znaną własność i sprawdzamy jak uczeń odnajdzie się z nowym narzędziem w ręku. Liczyliśmy na to, że nikt nie udzieli trzech twierdzących odpowiedzi tylko na podstawie faktu, że liczby $2, 3$ oraz 5 są dzielnikami liczby 30. Tymczasem taki zestaw odpowiedzi wybrało 18 procent uczestników IX OMJ! To ponad 2000 osób!

Aby zrozumieć jedną z możliwych przyczyn warto ponownie zwrócić uwagę na konstrukcję logiczną pytania. Wychodzimy od pewnej informacji i pytamy o jej możliwe skutki. To jedna z najczęściej spotykanych konstrukcji w zadaniach testowych. Dlaczego to ważne? Nie wystarczy bowiem podać PRZYKŁADU liczby, która ma sumę cyfr równą 30 i jest podzielna przez 2, 3 czy 5. Trzeba zdecydować: czy KAŻDA liczba, której suma cyfr wynosi 30 jest podzielna przez 2? A zatem można odpowiedzieć: TAK, KAŻDA, albo NIE, bo istnieje PRZYKŁAD takiej liczby, która ma sumę cyfr 30, a nie jest podzielna przez którąś z tych liczb. Czasami mówię (niezbyt ściśle), że to jest zadanie „na kontrprzykład". W zadaniach testowych kryje się pod charakterystycznym pytaniem zaczynającym się od „Wynika z tego, że..." Oczywiście samo pytanie można sformułować na wiele sposobów.

Czasem, mówiąc zupełnie na marginesie – skoro już mowa o logice, pojawiają się pytania o to jak uczyć w szkole średniej logiki. Czy „tabelki logiczne" i podobne zabiegi to nie jest relikt po nurcie „New Math" z lat 60, który próbował jednocześnie aksjomatyzować geometrię i uczyć algebry abstrakcyjnej? A może lepiej uczyć logiki właśnie robiąc takie zadania? A przynajmniej stosując je jako ilustrację? Zobaczymy więcej takich przykładów.

Jakie są zatem prawidłowe odpowiedzi? Jak odpowiadali uczestnicy? Przede wszystkim liczyliśmy, że uczestnicy zorientują się, że liczba, której suma cyfr wynosi 30 nie musi być parzysta. Wystarczy przecież rozważyć liczbę złożoną z samych cyfr "1", których to cyfr jest... 30. Liczba ta jest nieparzysta. Oczywiście nie ma potrzeby szukać tak daleko. Najmniejsza liczba nieparzysta, która sprawia, że odpowiedź na podpunkt (a) brzmi: NIE, to 3999. Kto znajdzie tę liczbę widzi natychmiast, że także odpowiedź w podpunkcie (c) to NIE. Bo 3999 ma sumę cyfr 30, a nie jest podzielna przez 5. I nic nie da, że jest mnóstwo przykładów liczb o sumie cyfr 30, które są podzielne przez 2, 3 czy 5. Wystarczy dopisać kilka zer, na przykład 39990 jest podzielna przez 2, 3, 5. Podpunkt (b) nie powinien sprawić nikomu problemu, bo mowa jest znów o kryterium szkolnym. Skoro suma cyfr to 30, a 30 jest podzielna przez 3, to liczba n też jest podzielna przez 3. A zatem odpowiedź brzmi: TAK.

Zadanie 3 (47). *Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej* 2*, która jest podzielna przez:*
a) 3,
b) 5,
c) 7.

Na pozór zadanie bardzo podobne do poprzedniego, a jednak sama konstrukcja pytania jest zupełnie inna. Zwróćmy na to uwagę jeszcze raz – w końcu test sprawdza intuicję i logiczne rozumowanie uczestników. Tym razem mamy do czynienia z typem zadania, które nazywam zadaniem „na przykład".

W odróżnieniu do poprzedniego zadania nie pytamy czy KAŻDA liczba całkowita o sumie cyfr 2 jest podzielna przez 3. To byłby przecież nonsens, bo sama liczba 2 nie jest podzielna przez 3. W treści zadania użyto sformułowania „Istnieje..." Można by inaczej je sformułować, ale sedno jest takie – tym razem czy JAKAKOLWIEK liczba całkowita o sumie cyfr równej 2 jest podzielna przez 3? To oczywiście zadanie szkolne. Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 3, bo 2 nie jest podzielne przez 3.

Rozumowanie przedstawione wyżej jest wprost banalne, ale 8,5% uczestników testu (czyli ponad 1000 osób) rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo. Daje nam to sygnał o tym jak trudno odejść od typowych zadań.

Podpunkt (b) sprawdza czy uczestnik rozpoznał jakie to są liczby całkowite o sumie cyfr równej 2. Dokładniej – sprawdzamy czy uczestnik uwzględnił liczby, których cyfry są zerami. Jeśli tak, to korzystając ze szkolnego kryterium podzielności przez 5 bez problemu rozwiąże postawiony problem. Owszem – TAK, istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 5. Jest to na przykład 20, ale też 110, 1100, 1010 i wiele innych... Proste? A jednak 11,3% uczniów rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo.

Dochodzimy wreszcie do chyba najtrudniejszego punktu zadania. Niewiele dzieci zna cechę podzielności przez 7, choć takie cechy (nie jedna, ale wiele!) istnieją (odsyłam do *Opowieści matematycznych* prof. Szurka). Być może patrząc na postać możliwych do uzyskania liczb (mogą mieć one jedynie cyfry 0, 1, 2) uczeń będzie zgadywał, że takich liczb podzielnych przez 7 nie ma. W istocie, odpowiedziało tak ponad 80% uczestników testu. A jednak dali się oszukać! Liczba taka istnieje i jest nią 1001. Nietrudno to sprawdzić przez zwykłe dzielenie pisemne. Szokuje to tym bardziej, że gdybyśmy zadali to samo pytanie w klasie – na pewno szybko pojawiłaby się odpowiedź. To pokazuje jak działają na uczestników warunki egzaminacyjne. To jedna z ważnych zalet testu.

Trudno być może nie protestować przeciwko takiemu zadaniu. Czy w czasie 75 minut uczestnicy testu mieli szansę wpaść na ten przykład? A co gdyby najmniejszy przykład był sześcio- albo siedmiocyfrowy? Trudno jednoznacznie opowiedzieć. Patrząc z dzisiejszej perspektywy można zaryzykować przypuszczenie, że postawienie takiego zadania było z naszej strony ryzykiem. Czasem takie wnioski da się sformułować dopiero po zawodach. Niekiedy jednak z rozmysłem umieszczany jest taki podchwytliwy podpunkt i ma on także pewien walor edukacyjny. W tym przypadku poprawną konfigurację wszystkich trzech odpowiedzi znalazło jedynie 11% uczestników.

Bardzo podobnymi zadaniami do dwóch poprzednich są zadania o numerach 48 (łatwe) czy 49 (odrobinę trudniejsze). Obejrzyjmy jeszcze jedno bardzo ciekawe zadanie o zapisie dziesiętnym i cechach podzielności.

Zadanie 4 (54)**.** *Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n. Wynika z tego, że:*
a) każda cyfra liczby n jest równa 1*,*
b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy niż 2*,*
c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr n.

Zadanie to osobiście uważam za bardzo ładne, bo dotyka błędnych intuicji i lęków wobec wszelkiej (pozornej nawet) komplikacji. Nie zdziwi zapewne Państwa informacja, że rozkład odpowiedzi w tym zadaniu zupełnie nie przypominał krzywej Gaussa: aż trzy z ośmiu możliwych konfiguracji odpowiedzi TAK/NIE zaznaczone zostały przez około 20% uczestników, a jednak żadna z nich nie okazała się poprawna! Tylko 13,2% uczestników nie pomyliło się. To zadanie daje materiał do długiej analizy. Podkreślę kilka punktów, które wydają mi się ciekawe.

Duży rozstrzał odpowiedzi może świadczyć o tym, że wiele osób albo strzelało, albo działało w pośpiechu. Ale powiedzieć tyle – to nie powiedzieć nic. Na pewno treść zadania, choć krótka – jest stosunkowo skomplikowana. Trzeba ją zapewne przeczytać dwa lub trzy razy by dobrze zrozumieć o jakich właściwie liczbach mowa (ja musiałem tak zrobić). Jest to, oczywiście, rzecz naturalna w matematyce. Uczniowie spotkają się z podobnymi definicjami w liceum, zwłaszcza gdy mowa będzie o różnego typu funkcjach i ich własnościach. To, że wielu z nas z niepokojem wspomina chociażby epsilonowo-deltowe definicje granicy wynika właśnie stąd, że nikt odpowiednio wcześnie nie nauczył nas czytać zadań takich, jak powyższe. Nie można ich unikać w nieskończoność.

Skomplikowane sformułowania jak wyżej można „rozpracowywać” oglądając przykłady obiektów spełniających postawiony warunek. Jakie są, dla przykładu, liczby dwucyfrowe takie, że suma cyfr tych liczb jest równa liczbie cyfr... czyli 2? Są tylko dwie takie liczby: 20 i 11. Kto znajdzie te przykłady uzyskuje natychmiastową odpowiedź negatywną na punkt (a). Uwaga: odpowiedź TAK w punkcie (a) podało 40 procent uczestników XIV OMJ!

Podpunkt (b) stawia zagadnienie związane z iloczynem cyfr, który to warunek może oczywiście zaskoczyć uczestnika (nie znajdziemy go w szkole). Konfrontacja z poprzednimi przykładami powinna jednak dać właściwą intuicję: odpowiedź brzmi TAK. Nie wymagamy od ucznia przestawienia dowodu – w końcu to test, ale dowód w istocie nie jest trudny i warto go pokazać omawiając test na kółku. Pomysł mieści się w zdaniu:

„***Jeśli*** *liczba n spełnia warunki zadania, to*
albo *wszystkimi jej cyframi są* 1*,* ***albo*** *w jej zapisie dziesiętnym występuje cyfra* 0”.

Jak to pokazać? Jest kilka sposobów, ale warto przytoczyć ważny typ rozumowania: dowód nie wprost.

Wszyscy wiemy, że pokazując prawdziwość pewnego zdania można uzasadniać, że przeciwny mu fakt nie zachodzi. W taki na przykład sposób dowodzi się niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Zakładamy, wbrew przypuszczeniu o jej niewymierności, że jest to liczba wymierna i w ten, czy inny sposób, dowodzimy, że jest to niemożliwe – reductio ad absurdum. Kiedyś tego rodzaju dowody występowały w ósmej klasie szkoły podstawowej, ale niewątpliwie nie były popularne. Kto zajrzy do statystyk z części testowych zawodów I stopnia OMJ ułożonych tematycznie szybko przekona się, że młodzież – patrząc w pewnym przekroju – nie rozumie czym są liczby wymierne (na marginesie: czy w obecnej podstawie są liczby rzeczywiste?) i każde wyrażenie z pierwiastkami klasyfikuje jako „niewymierność”. Taką ma intuicję. Uczmy rozumowania przez sprzeczność na prostszych zagadnieniach.

Załóżmy, że zdanie, które napisaliśmy wyżej nie jest prawdziwe. Co to znaczy? Już samo to pytanie jest pouczające (kurs logiki!). Znaczy to, że istnieje liczba, w której zapisie dziesiętnym nie występuje liczba 0 i której wszystkimi cyframi nie są 1 taka, która spełnia warunek zadania. Oczywiście zgodnie z założeniem suma jej cyfr równa jest liczbie jej cyfr. Jednak suma jej cyfr to suma składników, z których każdy jest niemniejszy niż 1, i suma ta równa jest liczbie składników! To jest niemożliwe, bo któryś ze składników jest większy niż 1, a więc suma cyfr tej liczby jest większa niż suma składników. Dochodzimy do sprzeczności z założeniem o istnieniu takiej liczby, która przeczyłaby zdaniu napisanemu wcześniej. A zatem jest ono prawdziwe. Iloczyn cyfr liczby opisanej w zadaniu wynosi 0 lub 1. Jest zatem mniejszy niż 2. Odpowiedź w punkcie (b) brzmi: TAK.

Proszę zauważyć, że gdyby punkt (b) był zadaniem otwartym, wówczas mógłby być sformułowany właśnie tak: *„pokaż, że iloczyn cyfr tej liczby wynosi* 0 *lub* 1*”*. Na zadanie otwarte OMJ byłby to jednak problem za prosty. A skoro w teście nie ma potrzeby formułowania dowodów, takie naturalne sformułowanie byłoby również za proste – za dużo by podpowiadało. Zaznaczenie odpowiedzi TAK byłoby bardzo zgodne z intuicją. A tymczasem została ona udzielona jedynie przez 60% uczestników. Mało? Trudno powiedzieć.

Przechodzimy wreszcie do punktu (c). Widzimy, że dotyczy on, tym razem, nieco innego zagadnienia niż poprzednie punkty. Jest to charakterystyczne dla trudniejszych zadań testowych. Ich zadaniem jest pewne zróżnicowanie uczestników i sprawdzenie ich intuicji. Oczywiście – liczba $n+1$ jest większa od n. Ale nie oznacza to, że powiększając liczbę zwiększamy tym samym jej sumę cyfr! To naturalne po chwili zastanowienia – przecież 10 jest większe od 9, ale ma mniejszą sumę cyfr. Na tę właśnie obserwację liczyliśmy w tym podpunkcie. A jednak wygrał pośpiech i niedokładność (skutki edukacji?). Tylko 30% uczestników udzieliło odpowiedzi NIE w tym punkcie. A przecież na tym etapie rozumowania nie wiemy wcale czy intuicja powyższa aplikuje się także do rozważanych w zadaniu liczb. Jest tak w istocie, ale trzeba wymyślić przykład – dla jednych łatwy, dla innych – nie.

Czy Państwo umieliby podać przykład liczby spełniającej warunki zadania takiej, że o 1 większa ma mniejszą sumę cyfr? Myślę, że tak, bo już wiemy, że takiej liczby szukamy. Intuicja podpowiada, że ta liczba musi kończyć się cyfrą 9. Liczbą tą jest choćby dziesięciocyfrowa: 100000009. Suma jej cyfr to oczywiście 10, a zatem należy ona do omawianego zbioru. Powiększona o 1 będzie miała sumę cyfr 2. A zatem, ponownie jak w jednym z poprzednich zadań: konstrukcja pytania każe powiedzieć czy KAŻDA liczba spełniająca warunki zadania ma tę własność, że powiększona o 1 ma większą sumę cyfr. Odpowiedź brzmi NIE, bo właśnie podaliśmy kontrprzykład.

Zadanie to jest bardziej skomplikowane niż poprzednie i zapewne jego omówienie wymaga więcej czasu. Wydaje nam się jednak, że jego miejsce należy właśnie do testu i jest dostępne dla uczniów szkoły podstawowej. Umiejętność czytania tekstu matematycznego (czy w ogóle bardziej skomplikowanego tekstu) to nie lada wyzwanie przy obecnej „smartfonowej” kulturze, w której ludzie spędzają na stronach internetowych średnio ok. 15 sekund.

W tym miejscu zatrzymamy nasze rozważania dotyczące zapisu dziesiętnego i podzielności. Więcej o zadaniach olimpijskich dotyczących tych zagadnień mogą Państwo przeczytać w najnowszym numerze gazetki Olimpiady Matematycznej Juniorów „Kwadrat” redagowanej przez Komisję Zadaniową Komitetu Głównego OMJ.

Zadanie 5 (60)**.** *Iloczyn $a \cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez* 400*. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez:*
a) 5
b) 8
c) 10.

Przejdziemy teraz do drugiego typu zadań związanych z podzielnością, o których chciałbym powiedzieć kilka słów. Ogólnie mówiąc chodzi o pytanie: co dzieje się ze znanymi szkolnymi własnościami liczb takimi jak: suma cyfr, zapis dziesiętny, podzielność przez daną liczbę, reszta z dzielenia i inne – gdy zaczniemy wykonywać operacje na liczbach. Pytania tego typu przerabiają Państwo w szkole. Najważniejsze to być może pytanie co można powiedzieć o liczbach a, b gdy ich iloczyn jest ujemny? Jakie są ich znaki? Albo inne pytanie: co oznacza parzystość iloczynu dwóch liczb dla parzystości każdego z czynników? Co oznacza nieparzystość iloczynu dwóch liczb?

Tego rodzaju zadania są bardzo ważne z punktu widzenia rozumienia czym zajmuje się matematyka. Mówiąc nawet dość górnolotnie (i zarazem nieco upraszczając) – nawet we współczesnych badaniach jest przyjęta pewna specyficzna kolejność poszukiwań, gdy wchodzimy w obszar nowej nieznanej teorii: najpierw próbujemy oglądać przykłady i dowiadywać się czegoś o wewnętrznych własnościach obiektów – tak jak w przypadku liczb całkowitych badaliśmy cechy podzielności, własności dzielenia z resztą itd. Potem jest jednak zupełnie nowy krok: badamy jakie operacje można wykonywać na tych obiektach i co te operacje mówią o strukturze? Użyję dość amatorskiej analogii – różnica jest taka, jak różnica pomiędzy psychoterapią poznawczą, a behawioralną.

Są, na marginesie, także dalsze – bardziej głębokie etapy badań: zastanawiamy się już nie tylko nad wpływem działań na obiekty, ale w ogóle pytamy jakie są wszystkie możliwe działania, jaka jest ich struktura, a na jej podstawie formułujemy twierdzenia klasyfikacyjne. Tego rodzaju wyniki znamy z geometrii: na przykład twierdzenie, które mówi, że każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych. To właśnie przykład takiego twierdzenia. Płynie z niego wiele pożytku nawet w zadaniach olimpijskich, ale to temat na inne opowiadanie. Wróćmy do zadania.

Zapewne nie zdziwi już Państwa wieść, że tylko 18% uczestników rozwiązało to zadanie poprawnie. Problemem okazał się trzeci podpunkt, który jak już wiemy jest często tym najtrudniejszym. A przecież pytaliśmy, wydawać by się mogło, wyłącznie o dobrze znane cechy podzielności! I rzeczywiście, punkt (a) można rozwiązać korzystając tylko z wiedzy szkolnej. Jeśli iloczyn dwóch liczb ma liczbę jedności równą 0 lub 5, to również jeden z czynników ma tę cechę. Dowodzimy to na przykład rozumując nie wprost. Odpowiedź w (a) brzmi zatem: TAK.

Podpunkt (b) był trudniejszy, bo odpowiedź brzmiała NIE i trzeba było wymyślić przykład. Był on jednak bardzo naturalny. Wszak $400 = 4 \cdot 100$ to pierwszy rozkład liczby podzielnej 400 jaki przychodzi do głowy w kontekście zadania. I oczywiście ani 4, ani 100 nie są podzielne przez 8. A jednak około 40% uczestników rozwiązało ten podpunkt niepoprawnie. Szczerze mówiąc: zastanawia, że aż 32 procent uczestników zaznaczyło trzykrotne TAK odpowiadając na to pytanie. Być może uznali za wystarczającą podzielność 400 przez 5, 8 i 10.

Także podpunkt (c) jest bardzo łatwy. Odpowiedź brzmi NIE i trzeba znowu wskazać KONTRPRZYKŁAD (w końcu to zadanie, w którym każde NIE musi być takim poparte). Jest nim rozkład $400 = 25 \cdot 16$, w którym żaden z czynników nie jest podzielny przez 10. Wydawałoby się, że to zadanie jest bardzo łatwe. Przecież w zasadzie nie chodziło w nim o podzielność przez 400 tylko niemal o samą liczbę 400. A przecież nasi uczniowie nauczeni są rozkładać liczbę na czynniki pierwsze. Czy rozumieją jednak jak DZIAŁA to narzędzie i umieją zrobić coś więcej niż UŻYĆ GO, czyli rozłożyć liczbę na czynniki? Przyjrzyjmy się następującemu zadaniu.

Zadanie 6 (57)**.** *Liczba* $6^6 \cdot 12^{12}$ *jest podzielna przez:*
a) 8^8
b) 10^{10}
c) 18^{18}.

Problem postawiony w tym zadaniu jest oczywiście wielopoziomowy. Po pierwsze uczestnicy widząc liczbę $6^6 \cdot 12^{12}$ mogą mieć poczucie, że jest zbyt duża by wyciągać o niej sensowne wnioski. Na szczęście sama konstrukcja logiczna zadania jest prosta; nie jest to ani zadanie „na przykład” typu ”*Istnieje...*” ani na „kontrprzykład” typu „*Wynika stąd, że...*” (to moje nazewnictwo jest bardzo umowne i, mam nadzieję, nieszkodliwe).

Zacznijmy od punktu (a). Ciekawe ile osób spróbowałoby w zadaniu o podzielności po prostu podzielić jedną liczbę przez drugą formując ułamek postaci $\frac{6^6 \cdot 12^{12}}{8^8}$. Wówczas można nawet rozpisać sobie iloczyny w liczniku i mianowniku, a następnie dokonać skrócenia. Czy taką intuicję mają uczniowie? Oczywiście można też zauważyć, że $6^6 \cdot 12^{12} = (2^6 \cdot 3^6) \cdot (2^{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{12})$, a następnie zauważyć, że ta liczba równa jest $3^{18} \cdot 2^{30}$. A zatem jest podzielna przez $8^8 = 2^{24}$. Wszystko to wiedza szkolna. Tak, czy inaczej odpowiedź w punkcie (a) brzmi TAK. Intuicja nie zawiodła większości uczestników w punkcie (b). Liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ nie dzieli się przez 10^{10}, bo w ogóle nie dzieli się przez 10, ani nawet przez 5. W podpunkcie (c) po raz kolejny potrzebne jest rozdzielenie potencjalnego dzielnika 18^{18} na czynniki pierwsze. Odpowiedź brzmi: NIE.

Wydaje się, że jest to zadanie „bez historii”, a jednak sądzę, że nie każdemu podzielność i rozkład na czynniki pierwsze wydaje się tematem bliskim działaniom na potęgach. Może to tylko moje błędne intuicje.

Zadanie 7 (50). *Dane są takie liczby całkowite a i b, że liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez* 12. *Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez*
a) 2,
b) 3,
c) 4.

Jak zdążyliśmy już zauważyć na Olimpiadzie często pojawiają się warunki, których nasi uczniowie mogli wcześniej nie widzieć. Co oznacza podzielność przez 12? Skojarzenie jest takie, że jest to jednoczesna podzielność przez 3 i przez 4. Tak powinno się rozumieć podzielność przez liczbę złożoną: jest to podzielność przez każdy z dzielników pierwszych i to tyle razy występuje on w rozkładzie liczby złożonej na czynniki (dokładne zrozumienie tego zdania gwarantuje, że w przyszłości uczniowie zrozumieją czym są pierwiastki wielokrotne wielomianu). A jednak zadanie to rozwiązało w całości prawidłowo jedynie 25% uczestników. Dlaczego?

Aż połowa uczestników uznała, że wszystkie trzy odpowiedzi są prawidłowe. Wynika to być może z przykładu pary a, b, który przychodzi na myśl jako pierwszy: $a = 24, b = 12$ lub przykładu typu $a = b = 12$. A jednak już wymyślenie odrobinę bardziej skomplikowanego przykładu: $a = b = 6$ daje KONTRPRZYKŁAD (w końcu to zadanie typu „Wynika stąd, że...") w podpunkcie (c). Pozostaje pytanie co z punktami (a) i (b). Okazuje się, że odpowiedź brzmi w obydwu przypadkach: TAK. Dlaczego?

Trzeba wykonać nieoczekiwany manewr i zauważyć, że skoro $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12, to także suma i różnica tych liczb jest podzielna przez 12. Suma tych liczb to $2a$, zaś różnica to $2b$. Zgodzimy się chyba, że jeśli $2a$ jest podzielne przez 12, to samo a jest podzielne przez 6. Podobnie skoro $2b$ jest podzielne przez 12, to a jest podzielne przez 6. Dostajemy zatem uzasadnienie naszej odpowiedzi.

Patrząc na wyniki tego zadania widać chyba, że uczniowie podchodzili do niego intuicyjnie. Poprawną odpowiedź na skądinąd niełatwe punkty (a) i (b) udzieliło prawie 75% uczestników. Jak to możliwe – można zatem zapytać – że 2/3 z nich nie zauważyło prościutkiego kontrprzykładu w punkcie (c)?

Zadanie 8 (44)**.** *Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których:*
a) różnica jest podzielna przez 3,
b) suma jest podzielna przez 4,
c) iloczyn jest podzielny przex 4.

Nie brakuje zadań dotyczących podzielności, które skonstruowane są tak, jak powyższe. W jakimś zbiorze liczb całkowitych znajdź parę spełniającą szczególną własność. Często korzysta się tu z tak zwanej zasady szufladkowej Dirichleta – choć stosowanie takiej terminologii być może niektórych odstrasza. *Wiedziałem* – mówią malkontenci – *to jest coś zupełnie poza programem, więc nie miałem szans tego rozwiązać*! Niezupełnie. Chodzi po prostu o porównywanie mocy niedużych zbiorów i wyciąganie właściwych wniosków. A jednak brak tego typu zadań w szkole widać jak na dłoni – to zadanie poprawnie rozwiązało jedynie 8% uczestników.

Jak to rozwiązać? Odwołamy się do podstawowych własności reszt z dzielenia. To częsty zabieg, gdy mowa jest o podzielności sum czy iloczynów liczby. Każda liczba całkowita daje z dzielenia przez 4 resztę $0, 1, 2$ lub 3. Wobec tego mamy zbiór 5 liczb całkowitych, każda daje jakąś resztę z dzielenia przez 4, a możliwych reszt jest 4. Można mówić, że to zasada szufladkowa, a można mówić, że to zdrowy rozsądek, że dwie z tych pięciu liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez 4. Weźmy różnicę tych liczb. Jaka jest jej reszta z dzielenia przez 4? Oczywiście jest to 0. A zatem w (a) odpowiedź brzmi: TAK.

W drugim podpunkcie – być może nieoczekiwanie – istnieje przykład, który pokazuje, że teza nie jest prawdziwa. Nie jest on bardzo skomplikowany. Bierzemy pięć liczb, które dają resztę 1 z dzielenia przez 4, na przykład $\{1, 5, 9, 13, 17\}$. Suma każdych dwóch daje resztę 2. A zatem odpowiedź w (b) brzmi: NIE. Kto wymyślił przykład w (b) ma od razu odpowiedź na punkt (c). Wystarczyłoby zresztą wziąć pięć różnych liczb nieparzystych.

Zadanie 9 (42)**.** *Liczby całkowite a, b, c są dodatnie. Każda z nich daje resztę* 1 *z dzielenia przez* 3*. Wynika z tego, że:*
a) liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 3,
b) suma cyfr liczby $a + b + c$ jest podzielna przez 3,
c) liczby $a + b$ oraz c są różne.

W zadaniach o podzielności zdarza się, że pojawia się sporo „niewiadomych" czy „stopni swobody". W poprzednim zadaniu szukaliśmy wśród pięciu dowolnych liczb całkowitych, tu są trzy (choć związane dość szczególnym warunkiem), a nie brakuje i zadań z czterema liczbami związanymi pewnymi własnościami arytmetycznymi. Nie jest to na pewno zupełnie łatwe dla ucznia, który nie jest przyzwyczajony do tak szerokiej dowolności i być może nawet nie do końca ją rozumie. Niemniej jednak warunki w zadaniu są naprawdę proste. Niekiedy, mówiąc kolokwialnie – im bardziej skomplikowana wydaje się sama treść – tym prostsze zadanie. Moi uczniowie mówili czasem, że „*najlepiej zagiąć na łatwym*". Tu ułatwienie jest takie, że od razu mowa jest o resztach.

Rozwiązanie opieramy na rachunku na resztach z dzielenia. Być może uczniowie nigdy nie widzieli dowodów faktów, które uzasadniają taki rachunek (w przypadku tego zadania znajdą je Państwo w rozwiązaniach zadania), ale oczekujemy od nich zrozumienia, że gdy pewne liczby dają pewne reszty z dzielenia przez, powiedzmy, liczbę 3, to suma tych liczb daje resztę będącą sumą reszt (tu można chwilę podyskutować nad pytaniem co się dzieje, gdy suma reszt nie jest resztą?). To jest uogólnienie faktu, że suma liczb parzystych jest parzysta, a parzystość sumy liczb nieparzystych zależy od tego ile jest składników. Bo parzystość i nieparzystość w języku reszt z dzielenia przez 2 to po prostu własności posiadania reszty 0 albo 1 z dzielenia przez 2.

Przebrnąwszy przez treść tego zadania mamy w zasadzie problem szkolny. Liczba $a+b+c$ ma resztę z dzielenia równą sumie reszt z dzielenia przez 3 liczb a, b, c. Suma ta wynosi 3. Takiej reszty oczywiście nie ma, więc formalnie rzecz biorąc nieco dziwne może się wydać stwierdzenie, że $1 + 1 + 1 = 0$, ale tak właśnie jest w rachunku reszt z dzielenia przez 3. Formalnie rzecz biorąc wchodzimy tu na obszar tak zwanych kongruencji. Można oczywiście wyjaśnić uczniom, że tak naprawdę $a = 3k + 1$, $b = 3l + 1$, $c = 3m + 1$, dla pewnych k, l, m i pokazać, że wzięcie sumy tych liczb daje $3(k + l + m + 1)$. Wtedy nie ma już żadnych wątpliwości.

Podpunkt (b) jest szkolną konsekwencją (a) i odpowiedź brzmi: TAK. Zaś podpunkt (c)? Oczywiście liczba $a+b$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2, zaś liczba c daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1. A zatem nie mogą być równe. Odpowiedź brzmi: TAK.

Zobaczmy na koniec jeszcze jedno zadanie związane z podzielnością, w którym rolę odegra jeszcze jedna ważna konstrukcja: największy wspólny dzielnik. Po raz kolejny wyzwaniem dla ucznia jest przebrnąć przez jego treść.

Zadanie 10 (66)**.** *Dodatnie liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy* 1*. Ponadto liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że:*
a) obie liczby a, b są kwadratami liczb całkowitych,
b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$ jest równy 1*,*
c) liczba $a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie to na pewno brzmi dość abstrakcyjnie i już pierwsze podpunkt wydaje się dość trudny. Wspomniałem, że w starciu ze skomplikowaną treścią na dobry początek warto oglądać przykłady. Czy łatwo sobie wyobrazić dwie liczby, których iloczyn jest kwadratem? Łatwo. Choćby $2 \cdot 8 = 16$, $9 \cdot 4 = 36$ czy $7 \cdot 7 = 49$. Tylko jedna z tych trzech par spełnia jednak dodatkowy warunek zadania: największy wspólny dzielnik pary liczb 4 oraz 9 równy jest 1. I te liczby: 4 i 9 to kwadraty. A jednak tylko nieco ponad 50 procent uczestników testu zaznaczyło odpowiedź (a) uznając być może takie przykłady za niewystarczające. A może nie szukało przykładów? Jak pokazać, że w istocie (a) jest prawdą?

Dowód formalny można przeczytać w materiałach, ale intuicja jest prosta. Mówi ona, że jeśli liczby są względnie pierwsze, to nie mają wspólnego dzielnika pierwszego. Wyobraźmy sobie rozkład na czynniki liczby ab. Może być bardzo dziwny i skomplikowany, ale jeśli pewne liczba pierwsza p wchodzi do tego rozkładu, to wchodzi ona do niego jako dzielnik liczby a lub jako dzielnik liczby b. A dokładniej, wchodzi ALBO jako dzielnik liczby a, ALBO jako dzielnik liczby b, bo nie może dzielić jednocześnie obydwu tych liczb. A ile razy wchodzi liczba pierwsza p do rozkładu liczby ab? Oczywiście parzyście wiele razy, bo ab to kwadrat. I te parzyście wiele wystąpień p w rozkładzie ab musi występować w rozkładzie a, albo w rozkładzie b. A przecież KAŻDY dzielnik a i każdy dzielnik b wchodzi do rozkładu ab. A zatem każda liczba pierwsza w rozkładzie a na czynniki występuje w nim z tym samym wykładnikiem co w ab (bo nie ma TEJ p jej w rozkładzie b).

Drugie pytanie znowu wymaga pewnej wiedzy, a może bardziej doświadczenia w operowaniu NWD. Gdy liczymy NWD dwóch liczb, to co robimy? Rozkładamy na czynniki pierwsze i porównujemy? Życzę powodzenia Państwa uczniom w przypadku liczb 10000001 i 10000003. Jest inny sposób, który zadanie to ma przypomnieć.

Wyznaczając NWD opieramy się na tzw. algorytmie Euklidesa. Nie ma w tym momencie znaczenia jak on dokładnie wygląda. Intuicja jest taka, że jeśli $x > y$, to $NWD(x, y) = NWD(y, x - y)$. Innymi słowy, jeśli x i y mają wspólny dzielnik (na razie nie ważne czy największy), to także y oraz $x - y$ mają ten sam wspólny dzielnik. W przypadku naszego zadania oznacza to, że każdy wspólny dzielnik liczb $a + b$ oraz a jest też wspólnym dzielnikiem liczb $(a + b) - a$ oraz a, czyli b oraz a. A liczby a, b mają, zgodnie z założeniem, tylko jeden wspólny dzielnik dodatni: jest nim 1. A zatem $NWD(a + b, b) = 1$. Pozostaje punkt (c).

W punkcie (c) istnieje kontrprzykład (pamiętajmy z jakim typem zadania mamy do czynienia). To jest łatwe, jeśli spojrzymy na przykłady, które wypisaliśmy wyżej. Para $a = 4, b = 9$ ma własności żądane w zadaniu, ale przecież $a + b = 13$. Odpowiedź brzmi zatem: NIE.

* * *

Omówiliśmy dziesięć zadań związanych z podzielnością, starając się zwrócić uwagę zarówno na edukacyjny, jak i matematyczny walor zadań testowych OMJ. Wiele z nich odnosi się bezpośrednio do programu i czasem tylko jeden z podpunktów jakoś go przekracza. Czasem staramy się przez jakieś zadanie zwrócić uwagę na błędne intuicje, które zauważamy wśród uczniów, a czasami – przez różne typy zadań próbujemy czegoś uczyć.

3 Podzielność w zadaniach otwartych OMJ

Zadania otwarte mają to do siebie, że wymagają przedstawienia pewnej argumentacji. Rzadko są zatem konstruowane, w przeciwieństwie do rozważanych wyżej zadań testowych, wokół przykładów, kontrprzykładów czy prostych zastosowań metod szkolnych, a zwykle wokół jakiś obserwacji, sprytnie ukrytych przez uczestnikiem.

Zdążyliśmy się już zorientować, że zadania dotyczące liczb całkowitych związane są z takimi tematami, jak:

- zapis dziesiętny i cechy podzielności,
- rozkład na czynniki pierwsze,
- reszty z dzielenia,
- NWD i NWW.

Każdy z tych tematów wiąże się z poprzednimi, ale wprowadza dodatkowe trudności i wyzwania. W pierwszym mogą pojawić się nieoczekiwane warunki przypominające tylko znane cechy podzielności, w drugim chodzić może o rozkłady dużych liczb, o zliczanie czynników pierwszych i odpowiednie ich grupowanie, w trzecim i czwartym natomiast konieczne jest często wprowadzanie dodatkowych oznaczeń – co nie jest zgodne z intuicją. Warto pamiętać, a jeszcze lepiej – umieć uzasadnić, o kilku przydatnych faktach:

- jeśli liczba pierwsza jest większa od 2, to jest nieparzysta,
- suma nieparzyście wielu liczb nieparzystych jest nieparzysta, a suma parzyście wielu liczb nieparzystych jest parzysta (i inne zależności tego typu),
- wśród dowolnych 3 liczb całkowitych pewne dwie dają tą samą resztę z dzielenia przez 2,
- wśród dowolnych 4 liczb całkowitych pewne trzy dają tą samą resztę z dzielenia przez 3,
- i tak dalej...
- jeśli liczba pierwsza dzieli iloczyn liczb całkowitych, to dzieli jedną z nich,
- jeśli a jest dzielnikiem b, to istnieje c, że $ac = b$ (jakże łatwiej by było uczyć logarytmów, gdyby każdy miał w szkole możliwość rozwiązania kilku zadań w oparciu o tę własność),
- jeśli liczby a i b są dzielnikami liczby n, to jest nim także $NWW(a, b)$.

Jak te proste obserwacje mogą się przydać w zadaniach o zobaczymy na kilku przykładach z drugich i trzecich etapów OMJ (i OMG).

Zadanie 1 (VII OMG, II etap)**.** *Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez* 175*, a suma $a + b$ równa się* 175.

Na pierwszy rzut oka jest to zadanie, które można próbować rozbić na przypadki. Skoro suma liczb to 175, a przecież są to liczby dodatnie i spełniające jakiś dodatkowy warunek, to nie może być ich zbyt wiele. Można nawet zaryzykować z uczniami debatę polegającą na napisaniu kilku rozkładów liczby 175 na sumę dodatnich składników i wspólne zastanowienie się kiedy ich iloczyn podzielny przez 175. No właśnie – kiedy?

Dzielnikami pierwszymi liczby 175 są liczby 5 i 7. Dokładniej $175 = 5^2 \cdot 7$. Dobrze, żeby uczniowie zrozumieli, że podzielność liczby ab przez 175 oznacza podzielność przez 5 i podzielność przez 7. Posługiwanie się liczbami pierwszymi jest kluczowe z uwagi na to, że jeśli liczba pierwsza dzieli iloczyn liczb całkowitych, to dzieli jedną z nich! Ta uwaga napisana była wyżej.

Wobec tych obserwacji liczba ab jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba a lub liczba b jest podzielna przez 5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że a jest podzielna przez 5. Skoro jednak $b = 175 - a$, to także liczba b jest podzielna przez 5. Czy to widać? Proszę odnotować jak sprytnie dobrany jest warunek. Skoro a dzieli się przez 5 oraz 175 dzieli się przez 5, to także ich różnica musi się dzielić przez 5. Stąd wniosek, że obie liczby są podzielne przez 5. Podobnie dowodzimy, że obie liczby a, b są podzielne przez 7. Wobec tego liczby a, b są podzielne przez 35. To też nie byle jaka obserwacja, bo wiąże się z liczbami względnie pierwszymi i NWW. Gdyby a, b były jednocześnie podzielne przez 6 i 8, to nie oznaczałoby, że są podzielne przez 48, ale tylko przez $NWW(6, 8) = 24$. Wspominaliśmy o tym wyżej.

A zatem liczby a, b są wielokrotnościami 35. Skoro ich suma to 175, to jeśli $a = 35k$, zaś $b = 35l$ (dodatkowe oznaczenia nie bolą!), to $a + b = 35(k + l) = 175$. W rezultacie $k + l = 5$, czyli (k, l) jest jedną z czterech par $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$. Uzyskujemy stąd rozwiązania:

$$(a, b) = (35, 140), \quad (a, b) = (70, 105), \quad (a, b) = (105, 70), \quad (a, b) = (140, 35).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie cztery powyższe pary liczb (a, b) spełniają warunki zadania.

Odnotujmy pojawienie się częstego w zadaniach teorioliczbowych podstawienia nowych zmiennych, które wynikają z podzielności – były to liczby k i l. Nie jest to szkolny typ rozumowania, gdzie dążymy raczej do eliminacji niewiadomych. Niewątpliwie jest jedną z trudniejszych umiejętności, zwłaszcza na poziomie szkoły podstawowej, zdolność czynienia takich podstawień tylko wtedy, gdy jest to konieczne, a nie w każdym zadaniu z teorii liczb (analogia geometryczna: nie w każdym zadaniu geometrycznym warto jest „na siłę" oznaczać próbować wyliczyć wartości wszystkich kątów, choć są zadania, gdzie tak się robi).

Zadanie 2 (XIII OMJ, I etap)**.** *Liczby pierwsze a, b, c są większe od 3. Udowodnij, że liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest podzielna przez 48.*

Już kilkukrotnie powiedzieliśmy sobie, że podzielność przez liczbę złożoną oznacza podzielność przez jej dzielniki pierwsze. W tym przypadku byłyby to liczby 2 i 3. Nie wystarcza to jednak do rozwiązania zadania. Mimo wszystko być może warto od tego zacząć. Jeśli pokażemy te podzielności już tylko jeden krok dzielić nas będzie od całego rozwiązania.

Kluczowa uwaga jest taka, że liczby pierwsze są większe od 3. To oznacza przynajmniej tyle, że są wszystkie nieparzyste. A zatem ich różnice są wszystkie parzyste. To oznacza, że iloczyn $(a - b)(b - c)(c - a)$ nie tylko dzieli się przez 2, ale nawet przez 8. Niestety musimy pokazać, że dzieli się on nawet przez 16, ale o tym za chwilę.

Co z podzielnością przez 3? Z warunków zadania wynika, że liczby a, b, c są nieparzyste i niepodzielne przez 3. W szczególności liczby te mogą dawać tylko reszty 1 i 2 przy dzieleniu przez 3. W szczególności pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, więc co najmniej jedna z liczb $a - b$, $b - c$, $c - a$ jest podzielna przez 3. A zatem także ich iloczyn jest podzielny przez 3.

Pozostaje kwestia podzielności naszego iloczynu przez 16. Kluczowe jest zauważyć, że skoro wszystkie różnice $a - b, b - c, c - a$ są parzyste, to wystarczy pokazać, że jedna z nich jest podzielna przez 4. Czy widzimy to? Znowu korzystamy z rachunku na resztach. Skoro żadna z a, b, c nie jest parzysta, to pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4. Nie jest to dokładnie uwaga z listy podanej na początku, ale korzystamy z nieparzystości a, b, c. A zatem pewna spośród liczb $a-b, b-c, c-a$ jest podzielna przez 4. O to chodziło.

Swoją drogą: proszę zobaczyć jakie ładne zadanie testowe moglibyśmy ułożyć na nasze zajęcia, skoro już znamy całe to rozumowanie. W podpunkcie (a) pytamy o podzielność przez 3, w podpunkcie (b) o podzielność przez 8, a w podpunkcie (c) – o podzielność przez 48. Czy widzicie Państwo, że o tym od początku próbuję mówić?

Zadanie 3. *Wyznacz wszystkie takie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb $a+b, b+c, c+a$ oraz $a + b + c$ jest pierwsza.*

Znowu skorzystamy z trywialnej obserwacji dotyczącej liczb pierwszych. Ponieważ $a + b + c$ jest liczbą pierwszą nie mniejszą od 3, więc jest to liczba nieparzysta. Co więcej, możemy coś powiedzieć o parzystości jej składników. Trzy liczby całkowite dodatnie sumują się do liczby nieparzystej. Stąd wynika, że wśród liczb a, b, c jest parzysta liczba liczb parzystych. Istotnie, gdyby była dokładnie jedna parzysta, to suma pozostałych dwóch także byłaby parzysta, a zatem cała suma była parzysta, co jest niemożliwe. Podobnie gdyby wszystkie a, b, c były parzyste.

Rozważamy możliwe przypadki. Jeśli są dokładnie dwie liczby parzyste, to ich suma jest liczbą złożoną, jako liczba pierwsza większa od 2, wbrew warunkom zadania. Wobec tego każda z liczb a, b, c jest nieparzysta. Suma każdych dwóch z nich jest z jednej strony liczbą pierwszą (co wynika z warunków zadania), z drugiej zaś liczbą parzystą. Wobec tego każda z liczb $a + b, b + c, c + a$ jest równa 2. Stąd wniosek, że wszystkie liczby a, b, c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania.

Widzimy jak dobrze sprawdzają się podstawowe uwagi związane z podzielnością. Ostatnie trzy proste zadania poświęcimy na przypomnienie kilku sztuczek algebraicznych, które stosuje się niekiedy w zadaniach teorioliczbowych. Nie wymagają one raczej szerszego komentarza. Gdy się już „wpadnie" na odpowiedni pomysł, zadanie rozwiązane jest natychmiast.

Zadanie 4. *Liczby całkowite a, b, c spełniają warunek $a + b + c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a + b)(a + c)$ jest podzielna przez 4.*

Przekształcając równość $a + b + c = bc$ otrzymujemy:

$$a + b = bc - c = c(b - 1), \quad \text{oraz} \quad a + c = bc - b = b(c - 1).$$

Stąd wynika, że:

$$(a + b)(a + c) = c(b - 1)b(c - 1) = (b - 1)b(c - 1)c.$$

Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, zatem obie liczby $(b - 1)b$ oraz $(c - 1)c$ są podzielne przez 2. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 4, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5 (VI OMG, zawody II stopnia)**.** *Dane są liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeśli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a + b$.*

Moja ulubiona sztuczka algebraiczna: „dodawanie zera". Przecież $b^2 = a^2 + (b^2 - a^2) = a^2 + (b - a)(b + a)$. Każdy składnik prawej strony ostatniej równości jest podzielny przez liczbę $a + b$, a zatem liczba b^2 jest także podzielna przez liczbę $a + b$. Jest to dość dobre zadanie na unaocznienie uczniom, że nie zawsze podstawienia typu $a^2 = k(a + b)$ i mozolne rozpisywanie b^2 na podstawie poprzedniej równości jest konieczne.

Zadanie 6 (XI OMJ, III etap)**.** *Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n, że liczba $m + n^2$ jest podzielna przez $m + n$. Wykaż, że liczba $m + n^3$ jest podzielna przez $m + n$.*

To zadanie z finału jest trudniejsze, niż wygląda. Ponownie życzę powodzenia każdemu, kto zabierze się za rozpisywanie podzielności przez wprowadzenie zmiennych pomocniczych. Będzie to tortura dla sprawdzającego! Zamiast tego proponowane jest eleganckie i zupełnie zaskakujące podejścia z „rozwiązania firmowego" (tzn. przygotowanego przez twórców zadania): w istocie chodzi o to, by zamiast powyższego rozwiązać inne zadanie! Pokażemy, że zarówno założenie, jak i teza, są równoważne znacznie czytelniejszym – z punktu widzenia podzielności – warunkom. Zapewniam Państwa, że jest wiele pięknych i głębokich rezultatów matematycznych, które dowodzi się właśnie przez takie podejście. Stąd mój osobisty entuzjazm.

Oto klucz do zadania: jeśli liczba x jest dzielnikiem liczby y, to jest też dzielnikiem liczby $y - x$ (Czy z czymś to się Państwu kojarzy? Algorytm Euklidesa w innej odsłonie? O to nam właśnie chodzi!). Jak z tego korzystamy?

Oto rozwiązanie: liczba $m + n$ jest dzielnikiem liczby $m + n^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m + n$ jest dzielnikiem liczby:

$$m + n^2 - (m + n) = n^2 - n = n(n - 1).$$

Z kolei $m + n$ jest dzielnikiem liczby $m + n^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m + n$ jest dzielnikiem liczby:

$$m + n^3 - (m + n) = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

A zatem nowe zadanie brzmi: udowodnij, że jeśli $m + n$ jest dzielnikiem liczby $n(n - 1)$, to jest też dzielnikiem liczby $n(n - 1)(n + 1)$. Eureka! Przecież $n(n - 1)$ jest dzielnikiem liczby $n(n - 1)(n + 1)$. Wobec tego jeżeli pierwsza z tych liczb dzieli się przez $m + n$, to druga także, co kończy rozwiązanie.

Może z uwagi na fakt, że sam jestem algebraikiem, a może przez to, że dowód ten przypomina mi dziesiątki pięknych eleganckich i krótkich argumentów algebraicznych – to zadanie wydaje mi się szczególnie piękne. Ocenę zostawiam oczywiście Państwu.

* * *

Czas na krótką konkluzję naszego warsztatu. Co można powiedzieć na koniec? Nie brakuje oczywiście trudniejszych zadań teorioliczbowych – takich, w których rozwiązania nie widzimy od razu, które wymagają wprowadzania dodatkowych oznaczeń, sprawnego operowania pojęciami NWD i NWW, czy nawet jeszcze bardziej zaawansowanych pomysłów. Każde zawody mają na celu zróżnicowanie najlepszych, a i dzięki takim trudniejszym zadaniom możemy nauczyć się czegoś nowego.

Mam nadzieję, że przynajmniej jedno z zadań obudziło w Państwu przekonanie, że „to jest łatwe!". *Miało być trudno – a już nie jest, i naprawdę mi się podoba!* Jeśli taką reakcję zobaczycie Państwo u swoich uczniów (nie tylko w związku z matematyką, ale też innymi wyzwaniami) – to pozostaje tylko złożyć serdeczne gratulacje.