Geometria z Algebrą Liniową
(semestr I)

Zbiór zadań

Uwagi proszę kierować na adres lukasz.kubat@mimuw.edu.pl

Spis treści

Oznaczenia i konwencje

Rozdział ten służy zestawieniu (prawie) wszystkich użytych w tym zbiorze zadań oznaczeń (większość z nich jest standardowa). W przypadku braku wyjaśnienia danego oznaczenia w poniższym zestawieniu warto zajrzeć do zadania o numerze podanym w nawiasie.

$\mathbb{P}$	zbiór liczb pierwszych
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych (umawiamy się, że $0 \notin \mathbb{N}$; ponadto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)
$\mathbb{Z}$	pierścień liczb całkowitych
$\mathbb{Z}_n$	pierścień reszt modulo n (2.13)
$\mathbb{Q}$	ciało liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	ciało liczb rzeczywistych
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych
$\mathbb{F}_p$	ciało reszt modulo p
$\mathbb{H}$	algebra z dzieleniem (rzeczywistych) kwaternionów (3.39)
$\mathbb{O}$	alternatywna algebra z dzieleniem (rzeczywistych) oktonionów (3.40)
$\mathbb{T}$	półciało tropikalne (2.30)
Δ_n	sympleks otwarty w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (4.3)
S_n	grupa permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$
$\operatorname{sgn} \sigma$	znak permutacji $\sigma \in S_n$
$\min S$	minimum zbioru $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}$
$\max S$	maksimum zbioru $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}$
$\lvert S \rvert$	moc zbioru S
$\mathcal{P}(S)$	rodzina wszystkich podzbiorów zbioru S
$\mathcal{F}(S)$	rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru S
$\mathrm{Map}(S, T)$	zbiór odwzorowań ze zbioru S w T (oznaczany też jako T^S)
id_S	odwzorowanie identycznościowe zbioru S (czasem piszemy też id)
l^2	przestrzeń sumowalnych z kwadratem ciągów rzeczywistych (7.39)
l^∞	przestrzeń ograniczonych ciągów rzeczywistych
$C(X)$	przestrzeń rzeczywistych funkcji ciągłych na zbiorze X (dla nas $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{C}$)
$C^\infty(\mathbb{R})$	przestrzeń rzeczywistych funkcji gładkich na $\mathbb{R}$ (6.7)
$f^{(n)}$	n-ta pochodna funkcji f (np. $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ oraz $f^{(2)} = f''$)
B_n	n-ta liczba Bernoulliego (8.27)
E_n	n-ta liczba Eulera (8.26)
F_n	n-ta liczba Fibonacciego (8.24)
$\mathrm{o}(a)$	rząd elementu $a \in G$ grupie G (2.22)
$a \mid b$	liczba $a \in \mathbb{Z}$ dzieli liczbę $b \in \mathbb{Z}$ (tzn. $b \in a\mathbb{Z}$; gdy a nie dzieli b, to piszemy $a \nmid b$)
$\gcd(a, b)$	największy wspólny dzielnik liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ spełniających $(a, b) \neq (0, 0)$
$a \bmod n$	reszta z dzielenia liczby $a \in \mathbb{Z}$ przez $n \in \mathbb{N}$
φ	funkcja φ Eulera (8.53)
$\lfloor x \rfloor$	część całkowita liczby $x \in \mathbb{R}$ (tzn. $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$)
$K^\times$	grupa multiplikatywna ciała K (tzn. $K^\times = K \setminus \{0\}$)
$K(S)$	rozszerzenie podciała $K \subseteq L$ o zbiór $S \subseteq L$ (2.17)

$K(a_1,\ldots,a_n)$	rozszerzenie podciała $K \subseteq L$ o skończony zbiór $\{a_1,\ldots,a_n\} \subseteq L$ (2.17)
$\operatorname{char} K$	charakterystyka ciała K (2.21)
$K[x_1,\ldots,x_n]$	pierścień wielomianów zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ o współczynnikach w ciele K
$K(x)$	ciało funkcji wymiernych zmiennej x o współczynnikach w ciele K
$K[[x]]$	pierścień szeregów formalnych zmiennej x o współczynnikach w ciele K (6.7)
$K((x))$	ciało szeregów Laurenta zmiennej x o współczynnikach w ciele K (2.12)
$\deg f$	stopień wielomianu $f \in K[x]$ (umawiamy się, że $\deg f = -\infty$ dla $f = 0$)
$\operatorname{Re} z$	część rzeczywista liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im} z$	część urojona liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Arg} z$	argumenty liczby zespolonej $0 \neq z \in \mathbb{C}$ (umawiamy się, że $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$)
$\overline{z}, \overline{q}, \overline{x}$	sprzężenie liczby $z \in \mathbb{C}$, kwaternionu $q \in \mathbb{H}$, oktonionu $x \in \mathbb{O}$ (3.39, 3.40)
$\lvert z\rvert, \lvert q\rvert, \lvert x\rvert$	moduł liczby $z \in \mathbb{C}$, kwaternionu $q \in \mathbb{H}$, oktonionu $x \in \mathbb{O}$ (3.39, 3.40)
$\mathrm{M}_{n,m}(K)$	przestrzeń macierzy $n \times m$ o wyrazach w ciele K
$\mathrm{M}_n(K)$	algebra macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele K
$\mathrm{GL}_n(K)$	grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele K
$\mathrm{C}(A)$	centralizator macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (5.33)
$\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n)$	macierz diagonalna o elementach $x_1,\ldots,x_n \in K$ na diagonali
$\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_n)$	macierz blokowo-diagonalna z macierzami $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(K)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ na diagonali
δ_{ij}	symbol (delta) Kroneckera (tzn. $\delta_{ij} = 1$ gdy $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$)
ε_{abc}	symbol Levi-Civity (3.40, 5.47)
I_n	macierz identycznościowa $n \times n$ (oznaczana też jako I)
E_{ij}	jedynki macierzowe (5.16)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	macierze Pauliego (5.47)
$\overline{A}$	sprzężenie zespolone macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (5.42)
A^t	transpozycja macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$
A^h	sprzężenie hermitowskie macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (5.42)
A^{-1}	macierz odwrotna do macierzy $A \in \mathrm{GL}_n(K)$
$\operatorname{adj} A$	macierz dołączona macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (8.65)
$\exp A$	eksponenta macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (5.45)
$\operatorname{rank} A$	rząd macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$
$\det A$	wyznacznik macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (oznaczany też jako $\lvert A\rvert$)
$\operatorname{tr} A$	ślad macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
$\operatorname{pf} A$	pfaffian macierzy antysymetrycznej $A \in \mathrm{M}_{2n}(K)$ (8.99)
χ_A	wielomian charakterystyczny macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (8.56)
$[A, B]$	komutator macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ (5.29)
$\{A, B\}$	antykomutator macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ (5.47)
$A \otimes B$	iloczyn Kroneckera macierzy $A \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$ (5.48)
$A \oplus B$	suma Kroneckera macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$ (5.48)
$V(x_1,\ldots,x_n)$	wyznacznik Vandermonde'a elementów $x_1,\ldots,x_n \in K$ (8.36)
$W(f_1,\ldots,f_n)$	wyznacznik Wrońskiego funkcji $f_1,\ldots,f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ (8.51)
$\lambda \vdash m$	partycja $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ liczby $m \in \mathbb{N}_0$ (8.48)
$s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$	wielomian Schura partycji $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ (8.48)
$e_k(x_1,\ldots,x_n)$	k-ty elementarny wielomian symetryczny (8.48)
$h_k(x_1,\ldots,x_n)$	k-ty zupełny jednorodny wielomian symetryczny (8.48)

$p_k(x_1,\dots,x_n)$	suma k-tych potęg elementów $x_1,\dots,x_n \in K$ (8.46)
$\operatorname{Supp} f$	nośnik funkcji $f \in \operatorname{Map}(X,K)$ (4.12)
KX	przestrzeń funkcji o skończonym nośniku z X w K (oznaczana też jako $K^{(X)}$) (4.12)
$\operatorname{Lat}(V)$	rodzina (krata) podprzestrzeni przestrzeni liniowej V (4.30, 7.40)
$\operatorname{Lat}_0(V)$	rodzina (krata) skończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej V (4.99)
$\operatorname{Con}(V)$	rodzina (krata) kongruencji na przestrzeni liniowej V (4.30)
$V_1+\dots+V_n$	suma algebraiczna podprzestrzeni liniowych $V_1,\dots,V_n$
$V_1\times\dots\times V_n$	iloczyn prosty (produkt) przestrzeni liniowych $V_1,\dots,V_n$
$V_1\oplus\dots\oplus V_n$	suma prosta (koprodukt) przestrzeni liniowych $V_1,\dots,V_n$
$\sum_{i\in I} V_i$	suma algebraiczna rodziny podprzestrzeni liniowych $(V_i)_{i\in I}$
$\prod_{i\in I} V_i$	iloczyn prosty (produkt) rodziny przestrzeni liniowych $(V_i)_{i\in I}$
$\bigoplus_{i\in I} V_i$	suma prosta (koprodukt) rodziny przestrzeni liniowych $(V_i)_{i\in I}$
V/ρ	iloraz przestrzeni liniowej V przez kongruencję ρ (4.30)
V/U	iloraz przestrzeni liniowej V przez podprzestrzeń U (4.30)
$[v]$	klasa abstrakcji wektora $v\in V$ względem kongruencji ρ (4.30)
$v+U$	warstwa wektora $v\in V$ względem podprzestrzeni $U\subseteq V$ (4.30)
$\operatorname{Lin}(S)$	podprzestrzeń liniowa rozpięta (generowana) przez zbiór S
$\dim V$	wymiar przestrzeni liniowej V
$\operatorname{codim} U$	kowymiar podprzestrzeni $U\subseteq V$ przestrzeni liniowej V (4.64, 6.71)
$\operatorname{Hom}(U,V)$	przestrzeń odwzorowań liniowych (homomorfizmów) z przestrzeni U w V
$\operatorname{End}(V)$	algebra endomorfizmów przestrzeni liniowej V
$\operatorname{Aut}(V)$	grupa automorfizmów przestrzeni liniowej V
f^n	n-krotne złożenie endomorfizmu $f\in\operatorname{End}(V)$ (gdy $n=0$, to $f^n=\mathrm{id}_V$)
$f_1\oplus\dots\oplus f_n$	suma prosta odwzorowań liniowych $f_i\in\operatorname{Hom}(U_i,V_i)$ dla $1\leqslant i\leqslant n$ (7.58)
$M_{AB}(f)$	macierz odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$ w bazach A oraz B
$M_B(f)$	macierz endomorfizmu $f\in\operatorname{End}(V)$ w bazie B
st	baza standardowa (kanoniczna) przestrzeni liniowej K^n
$\operatorname{Im} f$	obraz odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$
$\operatorname{Ker} f$	jądro odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$
$\operatorname{Coker} f$	kojądro odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$ (6.31)
$\operatorname{rank} f$	rząd odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$
$\det f$	wyznacznik endomorfizmu $f\in\operatorname{End}(V)$
$\operatorname{tr} f$	ślad endomorfizmu $f\in\operatorname{End}(V)$
$\operatorname{ind} f$	indeks odwzorowania liniowego $f\in\operatorname{Hom}(U,V)$ (6.80)
$\mathrm{B}_n(C)$	przestrzeń n-tych brzegów kompleksu łańcuchowego C (6.77)
$\mathrm{Z}_n(C)$	przestrzeń n-tych cykli kompleksu łańcuchowego C (6.77)
$\mathrm{H}_n(C)$	przestrzeń n-tych homologii kompleksu łańcuchowego C (6.77)
$\chi(C)$	charakterystyka Eulera–Poincarégo kompleksu łańcuchowego C (6.79)
$\operatorname{Hom}(U,V;W)$	przestrzeń odwzorowań dwuliniowych z przestrzeni $U\times V$ w W (6.85)
$\operatorname{Hom}^2_a(U,V)$	przestrzeń antysymetrycznych odwzorowań dwuliniowych z przestrzeni $U\times U$ w V (6.94)
$U\otimes V$	iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych U,V (6.84)
$u\otimes v$	iloczyn tensorowy wektorów $u\in U$ oraz $v\in V$ (tensor prosty) (6.84)
$f\otimes g$	iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych $f\in\operatorname{Hom}(U_1,V_1)$ oraz $g\in\operatorname{Hom}(U_2,V_2)$ (6.89)
$\operatorname{rank} t$	rząd tensora $t\in U\otimes V$ (6.93)

$\Lambda^2 V$	(druga) potęga zewnętrzna przestrzeni liniowej V (6.94)
$u \wedge v$	iloczyn zewnętrzny wektorów $u, v \in V$ (2-wektor prosty) (6.94)
$\Lambda^2 f$	(druga) potęga zewnętrzna odwzorowania liniowego $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (6.96)
$\Lambda^n(m)$	zbiór $\{(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n : 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant m\}$ (6.96, 8.88)
$\operatorname{rank} \omega$	rząd 2-wektora $\omega \in \Lambda^2 V$ (6.100)
$\\|v\\|$	norma wektora $v \in V$ (7.39, 8.34)
$\langle u, v \rangle$	iloczyn skalarny wektorów $u, v \in \mathbb{C}^n$ (8.91)
$\langle \omega, \eta \rangle$	iloczyn skalarny 2-wektorów $\omega, \eta \in \Lambda^2 \mathbb{C}^n$ (8.91)
V^*	przestrzeń dualna (sprzężona) przestrzeni liniowej V
$V^{\mathbb{C}}$	kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni liniowej V (7.17)
f^*	odwzorowanie dualne (sprzężone) odwzorowania liniowego $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$(e_i^*)_{i \in I}$	rodzina funkcjonałów sprzężonych do bazy $(e_i)_{i \in I}$ przestrzeni liniowej V
V^{**}	przestrzeń bidualna (bisprzężona) przestrzeni liniowej V (7.59)
f^{**}	odwzorowanie bidualne (bisprzężone) odwzorowania liniowego $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (7.59)

1 Układy równań liniowych

Zadanie 1.1. Wyznacz zredukowaną postać schodkową macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.2. Wyznacz zredukowaną postać schodkową macierzy:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & t \\ 2 & 3 & t & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.3. Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 9x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -6. \end{cases}$$

Zadanie 1.4. Opisz wszystkie trójki $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ spełniające układ równań

$$\begin{cases} 5x + 6y + 8z = 1 \\ 6x - 11y + 7z = 9. \end{cases}$$

Zadanie 1.5. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

(1) Zapisz powyższy układ równań w postaci macierzowej.

(2) Sprawdź, czy piątka $(1, 1, 1, 0, -1)$ jest rozwiązaniem tego układu równań.

Zadanie 1.6. Znajdź rozwiązania układów równań liniowych zadanych macierzami:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 9 \\ 5 & 2 & -8 & 8 \\ 8 & 7 & -1 & 12 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 9 & -2 & 17 & -13 & 16 \\ 2 & 7 & 0 & 7 & -2 & 11 \\ 2 & 5 & -2 & 13 & -13 & 11 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right].$$

Zadanie 1.7. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = a \\ x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

jest niesprzeczny.

Zadanie 1.8. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} ax + y + z = a - 1 \\ x + ay + z = 1 - a \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

jest oznaczony/nieoznaczony/sprzeczny?

Zadanie 1.9. Wyznacz rozwiązania układów równań liniowych, danych przez macierze:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2b \\ 1 & a & 1 & 2b \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & c & c \end{array}\right],$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.10. Niech $n \geqslant 3$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2) \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

Zadanie 1.11. Opisz wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{R}[x]$ spełniające $\deg f \leqslant 3$ oraz:

$$f(-2) = 2, \qquad f(-1) = 1, \qquad f(1) = 5, \qquad f(2) = -2.$$

Zadanie 1.12. Znajdź układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$, którego wszystkie rozwiązania są postaci $(-2t + 3, -t + 2, t + 1, 2t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.13. Czy układy równań liniowych zadane przez macierze

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & 8 & -3 \end{array}\right] \qquad \text{oraz} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

są równoważne?

Zadanie 1.14. Niech U będzie układem trzech równań liniowych (nad $\mathbb{R}$) o czterech niewiadomych. Załóżmy, że układ równań V powstaje z U przez zastąpienie każdego równania w U sumą dwóch pozostałych. Zbadaj czy układy równań U oraz V są zawsze równoważne.

Zadanie 1.15. Niech ciągi $(1, 2, 3, -1)$ oraz $(3, 6, 9, -3)$ będą rozwiązaniami pewnego układu równań liniowych nad $\mathbb{R}$. Udowodnij, że ciąg $(0, 0, 0, 0)$ jest również rozwiązaniem tego układu równań.

Zadanie 1.16. Załóżmy, że ciągi $(1, 2, 3, 4)$ oraz $(2, 0, 0, 1)$ są rozwiązaniami pewnego układu równań liniowych nad $\mathbb{R}$.

(1) Wykaż, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań.

(2) Opisz wszystkie rozwiązania zakładając, że macierz tego układu po sprowadzeniu do postaci schodkowej ma trzy schodki.

Zadanie 1.17. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $V \subseteq \mathbb{R}^n$ są zbiorami rozwiązań układów równań liniowych

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0 \qquad \text{oraz} \qquad v_1 = v_2 = \cdots = v_n,$$

odpowiednio. Pokaż, że dowolny wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy

$$x = u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$

gdzie $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U$ oraz $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V$.

Zadanie 1.18. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $m \geqslant 2$. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j \leqslant m$. Przypuśćmy, że dla pewnych $1 \leqslant r < s \leqslant m$ zachodzi $a_{ir} = a_{is}$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Wykaż, że układ ten jest albo sprzeczny, albo ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 1.19. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dowiedź, że trzy proste leżące na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, zadane równaniami

$$ax + by + c = 0, \qquad bx + cy + a = 0, \qquad cx + ay + b = 0$$

i nie redukujące się do jednej prostej przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c = 0$.

Zadanie 1.20. Udowodnij, że gdy okrąg leżący na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zawiera trzy różne punkty o współrzędnych wymiernych, to zarówno współrzędne środka tego okręgu jak i kwadrat jego promienia są liczbami wymiernymi.

2 Ciała

Zadanie 2.1. Czy działanie $*$ określone w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jako:

(1) $a * b = a - b$ (odejmowanie),

(2) $a * b = \frac{a+b}{2}$ (średnia arytmetyczna),

(3) $a * b = a + ab + b$

jest łączne, przemienne, posiada element neutralny? W przypadku gdy $*$ posiada element neutralny, dla jakich $x \in \mathbb{Q}$ istnieje element odwrotny?

Zadanie 2.2. Niech $K = \{0, 1, a, b\}$ będzie zbiorem 4-elementowym. Uzupełnij tabele

$+$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

oraz

$\cdot$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

tak, aby trójka $(K, +, \cdot)$ była ciałem, w którym 0 oraz 1 są elementami neutralnymi, odpowiednio, dodawania oraz mnożenia. Na ile sposobów można to zrobić?

Zadanie 2.3. Niech K będzie ciałem oraz $a, b \in K$. Stosując aksjomaty ciała pokaż, że:

(1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ oraz $-(-a) = a$.

(2) $(-a)b = a(-b) = -ab$ oraz $(-a)(-b) = ab$.

(3) Jeśli $ab = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.

Zadanie 2.4. Pokaż, że przemienność dodawania wynika z pozostałych aksjomatów ciała.

Zadanie 2.5. Wykaż, że w każdym ciele K spełniającym $|K| = 4$ zachodzi $1 + 1 = 0$.

Zadanie 2.6. Dowiedź, że dla dowolnego ciała K następujące warunki są równoważne:

(1) $1 + 1 = 0$.

(2) $a + a = 0$ dla dowolnego $a \in K$.

(3) $a + a = 0$ dla pewnego $0 \neq a \in K$.

Zadanie 2.7. Czy trójka $(\mathbb{Q}, +, \circ)$ jest ciałem, gdzie $+$ to zwykłe dodawanie w $\mathbb{Q}$, zaś $a \circ b = a + ab + b$ dla $a, b \in \mathbb{Q}$? Czy istnieje takie „dodawanie” $\oplus$ w zbiorze $\mathbb{Q}$, że trójka $(\mathbb{Q}, \oplus, \circ)$ jest ciałem?

Zadanie 2.8. Czy istnieje taki zbiór K oraz trzy działania $\oplus$, $\odot$, $\otimes$ w K, że $(K, \oplus)$ jest grupą (z elementem neutralnym $0 \in K$) oraz $(K^\times, \odot)$ i $(K^\times, \otimes)$ są grupami (gdzie $K^\times = K \setminus \{0\}$), natomiast tylko jedna z trójek $(K, \oplus, \odot)$, $(K, \oplus, \otimes)$ jest ciałem?

Zadanie 2.9. Mówimy, że ciało K jest *algebraicznie domknięte*, gdy dowolny wielomian $f \in K[x]$ spełniający $\deg f > 0$ ma pierwiastek w K, tzn. $f(a) = 0$ dla pewnego $a \in K$.

(1) Udowodnij, że każde ciało algebraicznie domknięte jest nieskończone.

(2) Wskaż przykład nieskończonego ciała, które nie jest algebraicznie domknięte.

Zadanie 2.10. W zbiorze $K = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ określmy działania $\oplus$ oraz $\odot$ wzorami

$$x \oplus y = x + y - xy \qquad \text{oraz} \qquad x \odot y = 1 - e^{\ln(1-x)\ln(1-y)}.$$

Dowiedź, że trójka $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2.11. Wprowadźmy w zbiorze $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ działania $\oplus$ oraz $\odot$ formułami

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2 + ay_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Dla jakich liczb $a \in \mathbb{R}$ trójka $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem?

Zadanie 2.12. Niech K będzie ciałem oraz

$$L = \{f \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, K) : \text{istnieje takie } N = N(f) \in \mathbb{Z}, \text{ że } f(n) = 0 \text{ dla } n < N\}.$$

Zdefiniujmy dodawanie i mnożenie w L wzorami

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \qquad \text{oraz} \qquad (f \cdot g)(n) = \sum_{p+q=n} f(p)g(q).$$

Uzasadnij, że trójka $(L, +, \cdot\,)$ jest ciałem.

Uwaga. Element $f \in L$ identyfikujemy zazwyczaj z szeregiem formalnym zmiennej x postaci

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n x^n = \sum_{n \geqslant N(f)} f_n x^n, \qquad \text{gdzie } f_n = f(n) \text{ dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Ciało L (z wprowadzonymi powyżej działaniami) oznaczamy wtedy symbolem $K((x))$ i nazywanym *ciałem szeregów Laurenta* zmiennej x o współczynnikach w ciele K.

Zadanie 2.13. Niech $n \geqslant 2$. W zbiorze $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{Z}$ definiujemy działania $\oplus$ oraz $\odot$ wzorami

$$a \oplus b = (a + b) \bmod n \qquad \text{oraz} \qquad a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$$

(działania $+$ oraz $\cdot$ to zwykłe dodawanie i mnożenie liczb całkowitych; zapis $a \bmod n$ oznacza resztę z dzielenie liczby $a \in \mathbb{Z}$ przez n). Wyznacz te liczby n, dla których trójka $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2.14. Pokaż, że każdy niezerowy element ciała $\mathbb{F}_7$ jest postaci 3^n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Czy każdy niezerowy element ciała $\mathbb{F}_{11}$ też jest tej postaci? Jeśli nie, to czy istnieje taki element $a \in \mathbb{F}_{11}$, że $\mathbb{F}_{11}^\times = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$? Jeżeli istnieje takie a, to ile jest elementów w $\mathbb{F}_{11}$ o tej własności co a?

Zadanie 2.15. Niech $p \in \mathbb{P}$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{F}_p$.

Zadanie 2.16. Załóżmy, że układ równań liniowych U o współczynnikach całkowitych ma dla dowolnej liczby $p \in \mathbb{P}$ dokładnie jedno rozwiązanie w ciele $\mathbb{F}_p$. Czy układ równań U posiada rozwiązanie w pierścieniu $\mathbb{Z}$?

Zadanie 2.17. Udowodnij, że:

(1) gdy $(K_i)_{i \in I}$ jest rodziną podciała ciała L, to $\bigcap_{i \in I} K_i$ jest podciałem ciała L.

(2) gdy K jest podciałem ciała L oraz $S \subseteq L$, to istnieje najmniejsze (w sensie inkluzji) podciało ciała L zawierające K oraz S.

Uwaga. Podciało z punktu (2) oznaczamy symbolem $K(S)$ i nazywamy *rozszerzeniem ciała K o zbiór S* (lub *podciałem generowanym nad K przez zbiór S*). Gdy zbiór S jest skończony, np. $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, to piszemy $K(a_1, \ldots, a_n) = K(S)$.

Zadanie 2.18. Uzasadnij, że zbiór K jest podciałem ciała $\mathbb{R}$, gdy:

(1) $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(2) $K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

(3) $K = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

Czy w każdym z punktów (1), (2) oraz (3) prawdą jest, że $K = \mathbb{Q}(a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$?

Zadanie 2.19. Pokaż, że ciało $\mathbb{R}$ posiada nieskończenie wiele różnych podciał.

Zadanie 2.20. Rozwiąż równania w podanych ciałach:

(1) $4x + 3 = 0$ w $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{13}$.

(2) $x^2 = 2$ w $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(3) $x^2 + x + 1 = 0$ w $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

(4) $3tx + 5t - 2 = 0$ w $\mathbb{F}_2(t)$, $\mathbb{F}_3(t)$, $\mathbb{F}_5(t)$, $\mathbb{Q}(t)$, $\mathbb{C}(t)$.

Zadanie 2.21. Załóżmy, że K jest ciałem.

(1) Udowodnij, że $n \cdot 1 \neq 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ ($n \cdot 1$ oznacza sumę n egzemplarzy elementu $1 \in K$) albo $p \cdot 1 = 0$ dla pewnej, jednoznacznie wyznaczonej, liczby $p \in \mathbb{P}$. W pierwszym przypadku piszemy $\operatorname{char} K = 0$, zaś w drugim $\operatorname{char} K = p$. Liczbę $\operatorname{char} K$ nazywamy *charakterystyką* ciała K. W szczególności gdy ciało K jest skończone, to $\operatorname{char} K > 0$.

(2) Gdy $|K| = q < \infty$ oraz $0 \neq a \in K$, to $a^n = 1$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że gdy n jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności, to $n \mid q - 1$.

Zadanie 2.22. Załóżmy, że G jest skończoną podgrupą grupy multiplikatywnej $K^\times$ ciała K. *Rząd* elementu $a \in G$ definiujemy jako

$$\mathrm{o}(a) = \inf\{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}.$$

(1) Pokaż, że gdy rzędy elementów $a, b \in G$ są względnie pierwsze, to $\mathrm{o}(ab) = \mathrm{o}(a)\mathrm{o}(b)$.

(2) Dowiedź, że gdy $m = \max\{\mathrm{o}(a) : a \in G\}$, to każda z liczb $\mathrm{o}(a)$ dla $a \in G$ dzieli m.

(3) Wywnioskuj z punktu (2), że każdy element $a \in G$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^m - 1 \in K[x]$. Następnie uzasadnij, że $m = |G|$ oraz, że $G = \{a^j : 0 \leqslant j < m\}$ dla pewnego $a \in G$.

Uwaga. Powyższe zadanie dowodzi, że skończona podgrupa grupy multiplikatywnej ciała jest *cykliczna*. W szczególności grupa multiplikatywna ciała skończonego jest cykliczna.

Zadanie 2.23. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $p > 0$.

(1) Dowiedź, że $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ dla dowolnych $a, b \in K$ oraz $n \geqslant 1$.

(2) Wywnioskuj z punktu (1), że odwzorowanie $F\colon K \to K$, dane wzorem $F(x) = x^p$, jest *morfizmem ciał*, tzn. spełnia $F(a+b) = F(a) + F(b)$ oraz $F(ab) = F(a)F(b)$ dla dowolnych $a, b \in K$ i ponadto $F(0) = 0$ oraz $F(1) = 1$.

(3) Uzasadnij, że odwzorowanie F z punktu (2) jest injektywne. W szczególności gdy ciało K jest skończone, to F jest bijekcją oraz $K = K^p = \{a^p : a \in K\}$.

(4) Wskaż przykład ciała K, dla którego $K \neq K^p$, tzn. odwzorowanie F z punktu (2) nie jest surjektywne.

Uwaga. Odwzorowanie F nazywane jest *morfizmem Frobeniusa*.

Zadanie 2.24. Niech K będzie ciałem. Załóżmy, że $p \in \mathbb{P}$ i rozważmy odwzorowanie $F\colon K \to K$ dane wzorem $F(x) = x^p$. Wiemy (skąd?), że gdy $\operatorname{char} K = p$, to F jest injekcją. Dla jakich liczb $p \in \mathbb{P}$ prawdziwa jest implikacja odwrotna?

Zadanie 2.25. Pokaż, że żaden właściwy podzbiór zbioru $\mathbb{Q}$ nie jest podciałem ciała $\mathbb{Q}$.

Zadanie 2.26. Mówimy, że ciało K jest *proste*, gdy K nie zawiera podciał właściwych. Opisz wszystkie ciała proste.

Zadanie 2.27. Załóżmy, że K jest ciałem skończonym. Wykaż, że dla dowolnego $x \in K$ istnieją takie $a, b \in K$, że $x = a^2 + b^2$ (tzn. x jest sumą dwóch kwadratów).

Zadanie 2.28. Udowodnij, że dla ciała K następujące warunki są równoważne:

(1) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ dla pewnego $n \geqslant 1$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$ nie wszystkich równych zeru.

(2) $\sum_{i=1}^n x_i^2 = -1$ dla pewnego $n \geqslant 1$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$.

Wykaż ponadto, że gdy $\operatorname{char} K \neq 2$ oraz K spełnia (1) lub (2), to dla dowolnego $x \in K$ istnieją takie $n \geqslant 1$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$, że $x = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (tzn. każdy element ciała K jest sumą kwadratów).

Zadanie 2.29. Mówimy, że ciało K jest *porządkowalne*, gdy istnieje taki podzbiór $P \subseteq K$ (nazywany *stożkiem dodatnim* ciała K), że: $P + P \subseteq P$ (tzn. $a, b \in P \Longrightarrow a + b \in P$), $P \cdot P \subseteq P$ (tzn. $a, b \in P \Longrightarrow a \cdot b \in P$), $K^\times = P \cup (-P)$ oraz $P \cap (-P) = \varnothing$, gdzie $-P = \{-a : a \in P\}$.

(1) Uzasadnij, że podciało ciała porządkowalnego jest porządkowalne.

(2) Dowiedź, że każde ciało porządkowalne K spełnia $\operatorname{char} K = 0$. W szczególności żadne ciało skończone nie jest porządkowalne.

(3) Czy ciało $\mathbb{R}$ jest porządkowalne? A ciało $\mathbb{C}$?

(4) Udowodnij, że ciało K jest porządkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki porządek liniowy $\leqslant$ w K, że $a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$ oraz $0 \leqslant a, b \Longrightarrow 0 \leqslant a \cdot b$ dla dowolnych $a, b, c \in K$.

Zadanie 2.30 (półciało tropikalne)**.** Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zdefiniujmy w zbiorze $\mathbb{T}$ dodawanie $\oplus$ oraz mnożenie $\odot$ wzorami

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \qquad \text{oraz} \qquad x \odot y = x + y.$$

Gdy $x, y \in \mathbb{R}$, to prawe strony powyższych wyrażeń oznaczają zwykłe maksimum oraz sumę liczb rzeczywistych. Gdy zaś x lub y jest równe $-\infty$, to wynik dodawania $\oplus$ oraz mnożenia $\odot$ pozostaje w zgodzie z intuicyjną interpretacją symbolu $-\infty$ (doprecyzuj znaczenie tego stwierdzenia).

(1) Które z aksjomatów ciała spełnia trójka $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$? Przedyskutuj szczegółowo wszystkie warunki. W szczególności wyznacz elementy neutralne działań $\oplus$ i $\odot$ oraz, o ile istnieje, element przeciwny/odwrotny do $x \in \mathbb{T}$.

(2) Wiemy, że każda prosta na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest opisana równaniem $ax + by = c$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Czym, geometrycznie, jest na „płaszczyźnie tropikalnej" $\mathbb{T}^2$ „prosta tropikalna" dana równaniem $a \odot x \oplus b \odot y = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{T}$?

(3) Rozwiąż w zbiorze $\mathbb{T}$ „równanie liniowe" $a \odot x \oplus b = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{T}$.

3 Liczby zespolone

Zadanie 3.1. Wyznacz część rzeczywistą, część urojoną, sprzężenie, moduł i argument liczb zespolonych:

$$\frac{4+5i}{3i-4}, \qquad \frac{(1-i)^4-i}{(1+i)^4+i}, \qquad \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{13}, \qquad \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{15}.$$

Zadanie 3.2. Wyznacz wszystkie liczby zespolone $z \neq 0$, dla których $z + 1/z \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.3. Niech $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Wykaż, że:

(1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$.

(3) $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2$.

(4) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

(5) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_3|^2 = 2|z_1 - \frac{1}{2}(z_2 + z_3)|^2 + \frac{1}{2}|z_2 - z_3|^2$.

(6) $(|z_1|^2 + |z_2|^2)(|z_3|^2 + |z_4|^2) = |z_1z_3 - z_2\overline{z}_4|^2 + |z_1z_4 + z_2\overline{z}_3|^2$.

Uwaga. Równość (4) nosi nazwę *tożsamości równoległoboku*, równość (5) nazywana jest *tożsamością Apoloniusza*, natomiast równość (6) nosi nazwę *tożsamości Eulera.*

Zadanie 3.4. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $n \geqslant 1$. Uzasadnij, że $(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$ dla pewnych $x, y \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 3.5. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Pokaż, że:

(1) $|z_1 + z_2| \cdot |z_1 + z_3| \leqslant |z_1| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| + |z_2| \cdot |z_3|$.

(2) $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$.

(3) $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$.

Uwaga. Nierówność (2) nazywana jest *nierównością Hlawki.*

Zadanie 3.6. Niech $n \geqslant 1$ oraz $z_j, w_j \in \mathbb{C}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$. Załóżmy, iż

$$|\varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_n z_n| \leqslant |\varepsilon_1 w_1 + \cdots + \varepsilon_n w_n|$$

dla dowolnych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Dowiedź, że $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leqslant |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2$.

Zadanie 3.7. Załóżmy, że liczby $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ spełniają $|z_1| = |z_2| = 1$ oraz $z_1z_2 \neq -1$. Uzasadnij, że liczba

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$$

jest rzeczywista.

Zadanie 3.8. Niech $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że

$$\sin\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Zadanie 3.9. Opisz wszystkie pary $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dla których

$$(1-i)^n(1-i\sqrt{3})^m = 32.$$

Ile jest par $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spełniających powyższe równanie?

Zadanie 3.10. Wyznacz wszystkie pary $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ o tej własności, że wielomian $(x-2)^n - a$ jest podzielny przez $x^2 - 2x + 2$.

Zadanie 3.11. Niech

$$z = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i\sqrt{3}} \in \mathbb{C}.$$

Uzasadnij, że zbiór $Z = \{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ jest skończony oraz wyznacz liczbę jego elementów.

Zadanie 3.12. Załóżmy, że liczba $0 \neq z \in \mathbb{C}$ spełnia równanie $z + 1/z = 2\cos\varphi$, gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$. Oblicz $z^n + 1/z^n$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 3.13. Rozwiąż w zbiorze $\mathbb{C}$ równania

$$|z+i| + |z-i| = 2 \qquad \text{oraz} \qquad |z + |z-1|| = |z - |z+1||.$$

Zadanie 3.14. Rozwiąż w zbiorze $\mathbb{C}$ równania:

(1) $(2+i)z + 5\overline{z} - 4\operatorname{Re}(iz) - 3\operatorname{Im}(iz) = 3 - i$.

(2) $z^2 = -5 + 12i$.

(3) $|z| + 3\overline{z} = 2 + 6i$.

(4) $(1+i)z^3 + (3-5i)z^2 - 6z = 0$.

(5) $z^4 = -16i$.

(6) $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25 = 0$.

(7) $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$.

(8) $z^{12} - z^{10} + 4z^8 + 60z^6 - 64z^4 + 256z^2 - 256 = 0$.

Zadanie 3.15. Załóżmy, że $0 \neq a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Przypuśćmy, że $z \in \mathbb{C}$ spełnia równania $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ oraz $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. Co można powiedzieć o liczbie z?

Zadanie 3.16. Niech $n \geqslant 1$. Pokaż, że każde rozwiązanie równania $z^n = (iz + 2i)^n$ jest postaci $z = -1 + it$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania.

Zadanie 3.17. Niech $n \geqslant 1$. Uzasadnij, że gdy dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $(z+1)^n = (z-1)^n$, to $\operatorname{Re} z = 0$.

Zadanie 3.18. Wyznacz wszystkie pierwiastki $z \in \mathbb{C}$ równania $8z^4(z^2+1) = z^{10} + 1$ spełniające $|z| = 1$.

Zadanie 3.19. Wykaż, że gdy $z \in \mathbb{C}$ spełnia $|z+1| \leqslant 1$ oraz $|z^2+1| \leqslant 1$, to $|z| \leqslant 1$.

Zadanie 3.20. Uzasadnij, że gdy $z \in \mathbb{C}$ spełnia $|z+1| > 2$, to $|z^3+1| > 1$.

Zadanie 3.21. Niech $P(z) = z^8 - iz^5 + 4z^2 - 8(i+1)$ dla $z \in \mathbb{C}$. Oznaczmy przez $z_1, \ldots, z_8 \in \mathbb{C}$ pierwiastki wielomianu P. Oblicz $z_1 + \cdots + z_8$ oraz $z_1^2 + \cdots + z_8^2$.

Zadanie 3.22. Niech $a, b \in \mathbb{C}$ oraz $P(z) = z^2 + az + b$ dla $z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że gdy dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $|z| = 1 \Longrightarrow |P(z)| = 1$, to $a = b = 0$.

Zadanie 3.23. Niech $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ są wszystkimi różnymi od 1 rozwiązaniami równania $z^{n+1} = 1$, to $(1 - z_1) \cdots (1 - z_n) = n + 1$ oraz $z_1 \cdots z_n = (-1)^n$.

Zadanie 3.24. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $a \in [-1, 1]$. Niech $P(z) = z^{n+1} - az^n - az + 1$ dla $z \in \mathbb{C}$. Pokaż, że każdy pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$ wielomianu P spełnia $|z_0| = 1$.

Zadanie 3.25. Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że liczba $z = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ dla pewnego $\varphi \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$. Dowiedź, że

$$a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi + \cdots + a_n \sin n\varphi = 0.$$

Zadanie 3.26. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, danej wzorem

$$f(z) = |1 + z| + |1 - z + z^2|,$$

na okręgu $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, tzn. znajdź $\min f(S)$ oraz $\max f(S)$.

Zadanie 3.27. Rozwiąż równanie

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

o niewiadomej $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.28. Załóżmy, że liczby $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ spełniają równości

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0.$$

Dowiedź, że $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$.

Zadanie 3.29. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Zadanie 3.30. Niech $n \geqslant 1$ oraz $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Wykaż, że

$$\prod_{z \in U_n} \left(z + \frac{1}{z}\right) \in \{-4, 0, 2\}.$$

Wyznacz podzbiory liczb naturalnych, dla których iloczyn $\prod_{z \in U_n}(z + 1/z)$ jest równy, odpowiednio, -4, 0 oraz 2.

Zadanie 3.31. Równanie $z^{10} + (13z - 1)^{10} = 0$ ma dziesięć pierwiastków zespolonych postaci $z_1, \ldots, z_5, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_5$ (dlaczego?). Wyznacz wartość wyrażenia

$$\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_3|^2} + \frac{1}{|z_4|^2} + \frac{1}{|z_5|^2}.$$

Zadanie 3.32. Rozłóż wielomiany:

$$x^4 + 2x^2 + 9, \qquad x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25, \qquad x^5 - 1, \qquad x^8 + x^4 + 1$$

na czynniki będące wielomianami rzeczywistymi stopni $\leqslant 2$.

Zadanie 3.33. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbb{C}$ spełniających warunki:

(1) $\operatorname{Re}(z^2) \geqslant -1$.
(2) $\operatorname{Im}(z^3) < \operatorname{Re}(z^3)$.
(3) $2 \leqslant |z| < |z-2| < 4$.
(4) $|1 + i - \overline{z}| < 2 - \operatorname{Re} z$.
(5) $z \neq 0$ oraz $\operatorname{Im}(2/z) < 1$.
(6) $6 < |z+1| + |z-3| \leqslant 8$.
(7) $z \neq 0$ oraz $\operatorname{Re}(1/z) < \operatorname{Im}(iz)$.
(8) $z \neq 1+i$ oraz $\pi/4 < \operatorname{Arg}(z - 1 - i) \leqslant 5\pi/6$.

Zadanie 3.34. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^4) > 0\}$. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory A oraz $f(A)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dana jest formułą

$$f(z) = (1+i)\overline{z} + 2.$$

Niech $P(z) = z^3 + 1$ dla $z \in \mathbb{C}$. Ile pierwiastków wielomianu P leży w zbiorze A?

Zadanie 3.35. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Im} z < \sqrt{3} \operatorname{Re} z\}$. Rozważmy funkcje $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określone wzorami

$$f(z) = (1 + i\sqrt{3})z^2 + 1 + i \qquad \text{oraz} \qquad g(z) = (z-i)^3.$$

Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $f(A)$ oraz $g^{-1}(A)$.

Zadanie 3.36. Załóżmy, że $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ są *parami różne* (tzn. $z_j \neq z_k$ dla $j \neq k$). Interpretując liczby z_1, z_2, z_3, z_4 jako punkty płaszczyzny udowodnij, że:

(1) jeżeli $[z_j, z_k]$ oznacza odcinek na płaszczyźnie wyznaczony przez parę liczb (z_j, z_k), to $[z_1, z_2] \perp [z_3, z_4] \iff \operatorname{Re} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0$ oraz $[z_1, z_2] \parallel [z_3, z_4] \iff \operatorname{Im} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = 0$.
(2) punkty z_1, z_2, z_3 leżą na jednej prostej (są współliniowe) $\iff \operatorname{Im} \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = 0$.
(3) punkty z_1, z_2, z_3, z_4 są współliniowe lub leżą na okręgu $\iff \operatorname{Im} \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} = 0$.

Zadanie 3.37. Załóżmy, że liczby $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ są wierzchołkami trójkąta ostrokątnego T. Wyznacz liczbę $z \in \mathbb{C}$ będącą:

(1) *ortocentrum* (tzn. miejscem przecięcia wysokości) trójkąta T.
(2) środkiem okręgu wpisanego w trójkąt T.

Zadanie 3.38. Udowodnij, że gdy $A_1, \ldots, A_7$ są kolejnymi wierzchołkami siedmiokąta foremnego, to

$$\frac{1}{|A_1 A_2|} = \frac{1}{|A_1 A_3|} + \frac{1}{|A_1 A_4|}.$$

Zadanie 3.39 (kwaterniony)**.** Niech $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Zdefiniujmy dodawanie i mnożenie elementów zbioru $\mathbb{H}$ wzorami

$$(z_1, w_1) + (z_2, w_2) = (z_1 + z_2, w_1 + w_2),$$
$$(z_1, w_1) \cdot (z_2, w_2) = (z_1 z_2 - \overline{w}_2 w_1, w_1 \overline{z}_2 + w_2 z_1).$$

(1) Uzasadnij, że $(z, 0) + (w, 0) = (z + w, 0)$ oraz $(z, 0) \cdot (w, 0) = (zw, 0)$ dla $z, w \in \mathbb{C}$. Fakt ten pozwala identyfikować liczbę $z \in \mathbb{C}$ z kwaternionem $(z, 0) \in \mathbb{H}$ oraz traktować $\mathbb{C}$ jako *podstrukturę* $\mathbb{H}$ (dokładnie tak, jak $\mathbb{R}$ uważamy za podciało ciała $\mathbb{C}$). Niech $j = (0, 1) \in \mathbb{H}$. Używając powyższej identyfikacji kwaternion $q = (z, w) \in \mathbb{H}$ można zapisać w postaci

$$q = (z, w) = (z, 0) + (0, w) = (z, 0) + (w, 0) \cdot (0, 1) = z + wj.$$

Jeśli $z = x_0 + x_1 i$ oraz $w = x_2 + x_3 i$ dla pewnych $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, to

$$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

gdzie $k = ij \in \mathbb{H}$. Przy tej interpretacji suma $p + q$ kwaternionów $p, q \in \mathbb{H}$ jest zdefiniowana w sposób naturalny, zaś iloczyn $p \cdot q$ jest wyznaczony przez reguły mnożenia

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Wyjaśnij precyzyjnie co znaczy powyższe zdanie. Ponadto pokaż, że

$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j.$$

(2) Zdefiniujmy *sprzężenie kwaternionu* $q = (z, w) = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ jako

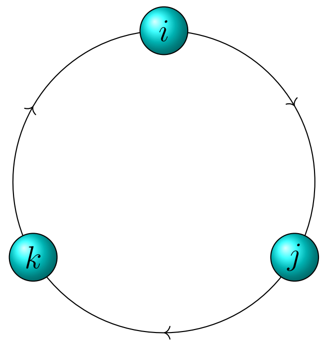
$$\overline{q} = (\overline{z}, -w) = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k \in \mathbb{H}.$$

Sprawdź, że $q \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 0$, co pozwala zdefiniować *moduł kwaternionu* q wzorem $|q| = \sqrt{q \cdot \overline{q}}$. Pokaż, że dla $p, q \in \mathbb{H}$ zachodzi $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$ (uwaga na kolejność czynników) oraz $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$.

(3) Wykaż, że trójka $(\mathbb{H}, +, \cdot\,)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała oprócz przemienności mnożenia (w tej sytuacji mówimy, że kwaterniony stanowią *ciało nieprzemienne* lub *algebrę z dzieleniem*). Wyznacz elementy neutralne dodawania i mnożenia w $\mathbb{H}$ oraz opisz element odwrotny (względem mnożenia) do $0 \neq q \in \mathbb{H}$.

(4) Wiemy, że równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{R}$ oraz ma dokładnie dwa rozwiązania w $\mathbb{C}$. Ile rozwiązań ma to równanie w $\mathbb{H}$? Opisz je wszystkie.

Uwaga. W zapamiętaniu reguł mnożenia *kwaternionów jednostkowych* $i, j, k \in \mathbb{H}$ pomóc może poniższy rysunek.



Zadanie 3.40 (oktoniony)**.** Niech $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Zdefiniujmy dodawanie oraz mnożenie elementów zbioru $\mathbb{O}$ wzorami

$$(p_1, q_1) + (p_2, q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2),$$
$$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 p_2 - \overline{q}_2 q_1, q_1 \overline{p}_2 + q_2 p_1).$$

(1) Uzasadnij, że $(p, 0) + (q, 0) = (p + q, 0)$ oraz $(p, 0) \cdot (q, 0) = (pq, 0)$ dla $p, q \in \mathbb{H}$. Fakt ten pozwala identyfikować kwaternion $p \in \mathbb{H}$ z oktonionem $(p, 0) \in \mathbb{O}$ oraz traktować $\mathbb{H}$ jako *podstrukturę* $\mathbb{O}$. Niech $\varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{O}$. Używając powyższej identyfikacji oktonion $x = (p, q) \in \mathbb{O}$ można zapisać w postaci

$$x = (p, q) = (p, 0) + (0, q) = (p, 0) + (q, 0) \cdot (0, 1) = p + q\varepsilon.$$

Zapisując $p = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ oraz $q = x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k$ dla pewnych $x_0, \ldots, x_7 \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7,$$

gdzie $e_1, \ldots, e_7 \in \mathbb{O}$ są postaci:

$$e_1 = i, \quad e_2 = j, \quad e_3 = k, \quad e_4 = \varepsilon, \quad e_5 = i\varepsilon, \quad e_6 = j\varepsilon, \quad e_7 = k\varepsilon.$$

Przy tej interpretacji suma $x + y$ oktonionów $x, y \in \mathbb{O}$ jest zdefiniowana w sposób naturalny, natomiast iloczyn $x \cdot y$ jest wyznaczony przez poniższą tabelę (wyjaśnij precyzyjnie co to znaczy).

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Udowodnij ponadto, że reguły mnożenia z powyżej tabeli mogą być ujęte we wzór

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \sum_{c=1}^{7} \varepsilon_{abc} e_c$$

dla dowolnych $1 \leqslant a, b \leqslant 7$, gdzie ε_{abc} jest *symbolem całkowicie antysymetrycznym* (tzn. zamiana miejscami dwóch indeksów w symbolu ε_{abc} zmienia wartość tego symbolu na przeciwną; w szczególności gdy dwa indeksy w symbolu ε_{abc} są równe, to $\varepsilon_{abc} = 0$). Opisz, możliwie zwięźle, wszystkie wartości ε_{abc} dla $1 \leqslant a, b, c \leqslant 7$.

(2) Zdefiniujmy *sprzężenie oktonionu* $x = (p, q) = x_0 + \sum_{a=1}^{7} x_a e_a \in \mathbb{O}$ jako

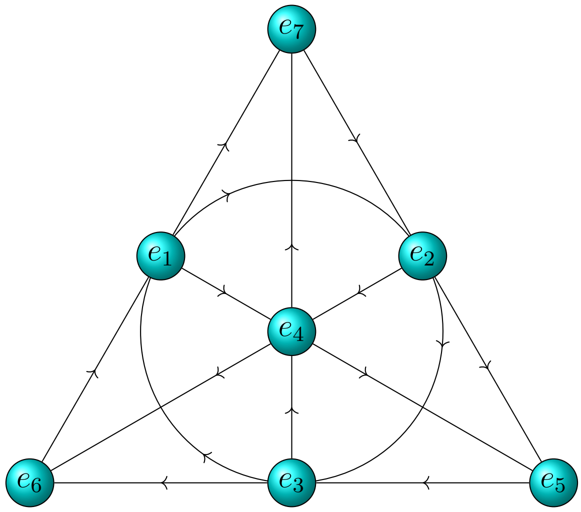
$$\overline{x} = (\overline{p}, -q) = x_0 - \sum_{a=1}^{7} x_a e_a \in \mathbb{O}.$$

Sprawdź, że $x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = \sum_{a=0}^{7} x_a^2 \geqslant 0$, co pozwala zdefiniować *moduł oktonionu* x wzorem $|x| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$. Pokaż, że dla $x, y \in \mathbb{O}$ zachodzi $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$ (uwaga na kolejność czynników) oraz $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(3) Udowodnij, że trójka $(\mathbb{O}, +, \cdot\,)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała oprócz łączności oraz przemienności mnożenia (oktoniony są przykładem tzw. *alternatywnej algebry z dzieleniem*). Wyznacz elementy neutralne dodawania i mnożenia w $\mathbb{O}$ oraz opisz element odwrotny (względem mnożenia) do $0 \neq x \in \mathbb{O}$.

(4) Znajdź wszystkie rozwiązania równania $x^2 + 1 = 0$ w $\mathbb{O}$.

Uwaga. Sposób definiowania liczb zespolonych jako par liczb rzeczywistych i podobnie kwaternionów jako par liczb zespolonych, czy oktonionów jako par kwaternionów nosi nazwę *konstrukcji Cayleya–Dixona*. Konstrukcję tę można kontynuować otrzymując np. tzw. *sedeniony*, lecz uzyskiwane w kolejnych krokach struktury algebraiczne posiadają coraz mniej „dobrych” własności (np. mnożenie w $\mathbb{H}$ nie jest przemienne, zaś mnożenie w $\mathbb{O}$ nie jest nawet łączne). W zapamiętaniu reguł mnożenia *oktonionów jednostkowych* $e_1, \ldots, e_7 \in \mathbb{O}$ pomóc może poniższy rysunek (tzw. *płaszczyzna Fano*).



4 Przestrzenie wektorowe

Zadanie 4.1. Niech $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Zdefiniujmy dodawanie $\oplus$ elementów zbioru X oraz mnożenie $\odot$ elementów zbioru X przez liczby rzeczywiste wzorami

$$x \oplus y = xy \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \odot x = x^{\lambda}.$$

Wykaż, że trójka $(X, \oplus, \odot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.

Zadanie 4.2. Niech S będzie dowolnym zbiorem, zaś $V = \mathcal{P}(S)$. Zdefiniujmy dodawanie w V wzorem

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Udowodnij, że gdy mnożenie elementów zbioru V przez skalary ciała dwuelementowego $\mathbb{F}_2$ zadamy wzorem

$$\lambda \cdot A = \begin{cases} \varnothing & \text{gdy } \lambda = 0, \\ A & \text{gdy } \lambda = 1, \end{cases}$$

to trójka $(V, +, \cdot\,)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}_2$.

Zadanie 4.3. Niech $n \geqslant 1$ oraz

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \ldots, x_n > 0\}.$$

Rozważmy odwzorowanie $f \colon \mathbb{R}^n \to V$ dane wzorem $f(x_1, \ldots, x_n) = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$.

(1) Uzasadnij, że f jest bijekcją i wykorzystując ten fakt zdefiniuj taką strukturę $(V, \oplus, \odot)$ przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ w zbiorze V, aby f było izomorfizmem.

(2) Rozważmy podprzestrzeń $U = \mathrm{Lin}(f(1, \ldots, 1))$ przestrzeni V. Opisz przestrzeń ilorazową V/U i uzasadnij, że jest ona w bijekcji z *sympleksem otwartym*

$$\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \ldots, x_n > 0 \text{ oraz } x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

(3) Wykorzystaj bijekcję z punktu (2), aby zdefiniować strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ w zbiorze Δ_n. Sprawdź, że dodawanie $\oplus$ wektorów w Δ_n ma postać

$$(x_1, \ldots, x_n) \oplus (y_1, \ldots, y_n) = \frac{(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)}{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n},$$

natomiast mnożenie $\odot$ wektorów z Δ_n przez liczby rzeczywiste dane jest formułą

$$\lambda \odot (x_1, \ldots, x_n) = \frac{(x_1^{\lambda}, \ldots, x_n^{\lambda})}{x_1^{\lambda} + \cdots + x_n^{\lambda}}.$$

Jak wygląda wektor zerowy przestrzeni Δ_n?

Zadanie 4.4. Uzasadnij, że grupy $(\mathbb{Z}, +)$ nie da się wyposażyć w strukturę przestrzeni liniowej nad jakimkolwiek ciałem.

Zadanie 4.5. Pokaż, iż grupie $(\mathbb{Q},+)$ nie można nadać struktury przestrzeni liniowej nad ciałem $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (działania w K pochodzą z $\mathbb{R}$).

Zadanie 4.6. Niech $V=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Zdefiniujmy dodawanie $\oplus$ w V wzorem

$$z_1\oplus z_2=z_1z_2.$$

Wykaż, że jeżeli K jest (dowolnym) ciałem, to nie istnieje takie mnożenie $\odot$ elementów zbioru V przez skalary z K, aby trójka $(V,\oplus,\odot)$ była przestrzenią wektorową nad K.

Zadanie 4.7. Rozważmy podciało $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ciała $\mathbb{R}$. Czy można zdefiniować takie mnożenie $\odot$ elementów zbioru $V=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ przez skalary z ciała K, by trójka $(V,+,\odot)$ (symbol $+$ oznacza tu zwykłe dodawanie w $\mathbb{R}$) była przestrzenią wektorową nad K?

Zadanie 4.8. Załóżmy, że trójka $(\mathbb{Q}(\sqrt{5}),+,\odot)$ (symbol $+$ oznacza tu zwykłe dodawanie w $\mathbb{R}$) jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (z działaniami dziedziczonymi z $\mathbb{R}$). Wiedząc, że $\sqrt{3}\odot 1=2+\sqrt{5}$ oblicz $\sqrt{3}\odot\sqrt{5}$.

Zadanie 4.9. Sprawdź czy podzbiór S przestrzeni V jest jej podprzestrzenią, gdy:

(1) $V=\mathbb{Q}^2$ oraz $S=\{(x,y)\in V: x,y>0\}$.
(2) $V=\mathbb{R}^2$ oraz $S=\{(x,y)\in V: x-y\in\mathbb{Z}\}$.
(3) $V=\mathbb{R}^2$ oraz $S=\{(x,y)\in V: x+3y=1\}$.
(4) $V=\mathbb{C}^2$ oraz $S=\{(x,y)\in V: x^2+y^2=0\}$.
(5) $V=\mathbb{Q}^3$ oraz $S=\{(x,y,z)\in V: x=y=2z\}$.
(6) $V=\mathbb{R}^3$ oraz $S=\{(x,y,z)\in V: z\neq 0 \text{ oraz } (x+y)/z=1\}$.
(7) $V=\mathbb{C}^3$ oraz $S=\{(x,y,z)\in V: x^2+y^2+z^2=2xy-2yz+2zx\}$.
(8) $V=\mathbb{F}_3^3$ oraz $S=\{(x,y,z)\in V: x+y+z=0 \text{ oraz } x-y+z=z^3\}$.

W przypadku gdy S nie jest podprzestrzenią w V, wskaż który z warunków definiujących podprzestrzeń nie jest spełniony.

Zadanie 4.10. Rozważmy przestrzeń $V=\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ z naturalnymi działaniami. Czy zbiór S, gdy:

(1) $S=\{f\in V: f(0)=1\}$,
(2) $S=\{f\in V: f(1)=0\}$,
(3) $S=\{f\in V: f(x)>0 \text{ dla dowolnego } x>0\}$,
(4) $S=\{f\in V: f(-x)=-f(x) \text{ dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\}$,
(5) $S=\{f\in V: f \text{ jest funkcją ciągłą}\}$,
(6) $S=\{f\in V: f \text{ jest funkcją wielomianową}\}$,
(7) $S=\{f\in V: f \text{ jest funkcją okresową}\}$,
(8) $S=\{f\in V: f \text{ jest funkcją okresową o okresie } \omega>0\}$

jest podprzestrzenią przestrzeni V? Jeśli S nie jest podprzestrzenią w V, to dlaczego?

Zadanie 4.11. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy funkcje $f_{a,b}, g_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorami

$$f_{a,b}(x) = a \sin(x + b) \qquad \text{oraz} \qquad g_{a,b}(x) = a \sin(bx).$$

Który ze zbiorów $F = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$ oraz $G = \{g_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Zadanie 4.12. Załóżmy, że $X \neq \varnothing$ jest dowolnym zbiorem, natomiast K jest ciałem. Dla funkcji $f \in \mathrm{Map}(X, K)$ zdefiniujmy jej *nośnik*

$$\mathrm{Supp}\, f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Uzasadnij, że

$$V = \{f \in \mathrm{Map}(X, K) : |\mathrm{Supp}\, f| < \infty\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Map}(X, K)$.

Uwaga. Podprzestrzeń V oznaczamy czasem przez KX lub $K^{(X)}$.

Zadanie 4.13. Załóżmy, że $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem ciągów o wyrazach rzeczywistych. Wprowadźmy dodawanie w X i mnożenie elementów X przez liczby rzeczywiste wzorami

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Sprawdź, że $(X, +, \cdot\,)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Które z podzbiorów:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : x_n \neq 0 \text{ dla skończenie wielu } n\},\\
S_2 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : x_n = 0 \text{ dla nieskończenie wielu } n\},\\
S_3 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{ciąg } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ jest monotoniczny}\},\\
S_4 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{ciąg } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ jest zbieżny do zera}\},\\
S_5 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{ciąg } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ jest zbieżny}\},\\
S_6 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{ciąg } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ jest ograniczony}\},\\
S_7 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{szereg } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ jest zbieżny}\},\\
S_8 &= \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X : \text{szereg } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ jest zbieżny}\}
\end{aligned}$$

są podprzestrzeniami przestrzeni X? Ustal relacje inkluzji pomiędzy tymi z podzbiorów $S_1, \ldots, S_8$, które są podprzestrzeniami.

Zadanie 4.14. Załóżmy, że U oraz V są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X spełniającymi $X = U \cup V$. Udowodnij, że wtedy $U = X$ lub $V = X$.

Zadanie 4.15. Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V. Wykaż, że:

(1) $V \setminus U$ nie jest podprzestrzenią V.

(2) $(V \setminus U) \cup \{0\}$ jest podprzestrzenią V wtedy i tylko wtedy, gdy $U = 0$ lub $U = V$.

Zadanie 4.16. Niech $K = \mathbb{F}_2$. Ile podprzestrzeni ma przestrzeń wektorowa K^3? Opisz każdą z nich układem równań liniowych.

Zadanie 4.17. Załóżmy, że U, V, W są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X nad ciałem K.

(1) Sprawdź, że zbiór

$$U + V = \{u + v : u \in U \text{ oraz } v \in V\}$$

(nazywany *sumą algebraiczną* podprzestrzeni U oraz V) jest podprzestrzenią X.

(2) Pokaż, że $U + V$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią przestrzeni X zawierającą jednocześnie U oraz V.

(3) Uzasadnij, że $(U \cap W) + (V \cap W) \subseteq (U + V) \cap W$ oraz gdy $U \subseteq W$ lub $V \subseteq W$, to zachodzi równość.

(4) Podaj przykład, w którym $(U \cap W) + (V \cap W) \neq (U + V) \cap W$.

Zadanie 4.18. Załóżmy, że V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Wykaż, że

$$(V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3) + (V_3 \cap V_1) \subseteq (V_1 + V_2) \cap (V_2 + V_3) \cap (V_3 + V_1).$$

Podaj przykład, w którym powyższej inkluzji nie można zastąpić równością. Czy jeżeli założymy, że $V_i \subseteq V_j$ dla pewnych $i \neq j$, to zawsze uzyskamy równość?

Zadanie 4.19. Niech $n \geqslant 3$. Załóżmy, że przestrzeń wektorowa V nad ciałem K da się zapisać jako suma $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ podprzestrzeni właściwych $V_1, \ldots, V_n \subsetneq V$. Pokaż, że wtedy $|K| < n$.

Uwaga. Powyższy fakt pojawił się w pracy A. Białynicki-Birula, J. Browkin, A. Schinzel, *On the representation of fields as finite union of subfields*, Coll. Math. **7** (1959), 31–32.

Zadanie 4.20. Niech V będzie przestrzenią liniową, $S, T \subseteq V$ oraz $v \in V$. Sprawdź, że:

(1) $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(S)) = \mathrm{Lin}(S)$.

(2) $\mathrm{Lin}(S \cup T) = \mathrm{Lin}(S) + \mathrm{Lin}(T)$.

(3) $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(T) \iff S \subseteq \mathrm{Lin}(T)$ oraz $T \subseteq \mathrm{Lin}(S)$.

(4) $v \in \mathrm{Lin}(S) \iff \mathrm{Lin}(S \cup \{v\}) = \mathrm{Lin}(S)$.

Zadanie 4.21. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $u, v \in V$. Czy prawdą jest, że zawsze $\mathrm{Lin}(u + v, u - v) = \mathrm{Lin}(u, v)$?

Zadanie 4.22. Rozważmy przestrzeń ciągów $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ z naturalnymi działaniami. Niech $e_n \in V$ dla $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem, którego n-ty wyraz równy jest 1, zaś pozostałe wyrazy równe są 0. Opisz podprzestrzeń $U = \mathrm{Lin}(e_n : n \in \mathbb{N})$. Czy $U = V$?

Zadanie 4.23. Podaj przykład wektora $v \in \mathbb{R}^4$, który nie leży w podprzestrzeni

$$\mathrm{Lin}((1,3,1,3), (3,8,2,9), (0,3,2,3)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 4.24. Czy wektor $v = (1,1,1)$ leży w podprzestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozpiętej przez wektory $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (1,2,1)$ oraz $v_3 = (2,5,3)$? To samo pytanie dla wektora $w = (1,4,3)$.

Zadanie 4.25. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor $v = (-2, t, -1, 7) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów $v_1 = (1, 2, -1, 3)$, $v_2 = (1, 0, 2, 2)$ oraz $v_3 = (-1, 3, 1, 1)$?

Zadanie 4.26. Pokaż, że każdy wektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ leżący w podprzestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej przez wektory $v_1 = (i, 1, -i, -1)$, $v_2 = (i, -i, 1, -1)$ oraz $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ spełnia równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, ale nie każdy spełnia równanie $x_4 = -1$.

Zadanie 4.27. Niech $n \geqslant 2$ oraz

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n \text{ oraz } f(1) = f(2) = 0\}.$$

Sprawdź, że $V = \mathrm{Lin}(x^j - 3x^{j-1} + 2x^{j-2} : 2 \leqslant j \leqslant n)$.

Zadanie 4.28. Niech

$$V = \mathrm{Lin}((1, 2, -1, 4), (2, 3, -2, 7), (3, 1, -3, 7), (1, 1, -1, 3)) \subseteq \mathbb{C}^4.$$

Przedstaw V jako przestrzeń rozwiązań pewnego układu równań liniowych.

Zadanie 4.29. Niech

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}, \\ V &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4 : 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Opisz $U \cap V$ oraz $U + V$ jako przestrzenie rozwiązań układów równań liniowych.

Definicja. Załóżmy, że X jest zbiorem. Dowolny podzbiór $R \subseteq X \times X$ nazywamy *relacją* w X. Mówimy, że relacja R jest:

(1) *zwrotna*, gdy $(x, x) \in R$ dla $x \in X$.

(2) *symetryczna*, gdy $(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$ dla $x, y \in X$.

(3) *przechodnia*, gdy $(x, y) \in R$ oraz $(y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$ dla $x, y, z \in X$.

Relację, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia nazywamy *relacją równoważności.* Jeśli R jest relacją równoważności w X, to *klasą abstrakcji* (lub *klasą równoważności* lub *warstwą*) elementu $x \in X$ względem relacji R nazywamy zbiór

$$[x] = \{y \in X : (x, y) \in R\}.$$

Natomiast rodzinę wszystkich klas abstrakcji

$$X/R = \{[x] : x \in X\}$$

nazywamy *zbiorem ilorazowym* (lub *ilorazem*) zbioru X przez relację R. Każdy element klasy abstrakcji $[x] \in X/R$ nazywa się *reprezentantem* tej klasy. Wybierając po jednym elemencie z każdej klasy abstrakcji w X/R (można to zrobić dzięki *Aksjomatowi Wyboru*) otrzymujemy *zbiór reprezentantów* klas abstrakcji relacji R, czyli taki podzbiór $T \subseteq X$, że $X = \bigcup_{t \in T} [t]$ oraz $[s] \cap [t] = \varnothing$ dla $s, t \in T$ spełniających $s \neq t$.

Zadanie 4.30 (przestrzeń ilorazowa)**.** Mówimy, że relacja równoważności ρ w przestrzeni wektorowej V nad ciałem K jest *kongruencją*, gdy dla dowolnych $v, w, v', w' \in V$ oraz $\lambda \in K$ zachodzi

$$\begin{aligned} (v, w), (v', w') \in \rho &\implies (v + v', w + w') \in \rho, \\ (v, w) \in \rho &\implies (\lambda v, \lambda w) \in \rho. \end{aligned}$$

(1) Udowodnij, że gdy ρ jest kongruencją w V, to zbiór ilorazowy V/ρ z działaniami zdefiniowanymi jako

$$[v] + [w] = [v + w] \qquad \text{oraz} \qquad \lambda[v] = [\lambda v]$$

dla $v, w \in V$ oraz $\lambda \in K$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K (sprawdź najpierw, że powyższe działania są *poprawnie określone*, tzn. nie zależą od wyboru reprezentantów klas abstrakcji).

(2) Wykaż, że gdy ρ jest kongruencją w V, to zbiór

$$U_\rho = \{v \in V : (v, 0) \in \rho\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V.

(3) Udowodnij, że gdy U jest podprzestrzenią przestrzeni V, to relacja

$$\rho_U = \{(v, w) \in V \times V : v - w \in U\}$$

jest kongruencją w V. Przestrzeń wektorową V/ρ_U (z działaniami zdefiniowanymi w punkcie (1)) oznaczamy przez V/U i nazywamy *przestrzenią ilorazową* (lub *ilorazem*) przestrzeni V względem podprzestrzeni U. Sprawdź, że klasa abstrakcji wektora $v \in V$ względem kongruencji ρ_U (nazywana *warstwą* v względem U) jest postaci

$$v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

(4) Wykaż, że każda kongruencja ρ w V jest postaci $\rho = \rho_U$ dla pewnej podprzestrzeni $U \subseteq V$. Analogicznie wykaż, że każda podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest postaci $U = U_\rho$ dla pewnej kongruencji ρ w V.

Uwaga. Jeśli przez $\mathrm{Con}(V)$ oznaczymy rodzinę wszystkich kongruencji w V, zaś przez $\mathrm{Lat}(V)$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni w V, to można sprawdzić, że odwzorowania

$$\mathrm{Con}(V) \ni \rho \mapsto U_\rho \in \mathrm{Lat}(V) \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{Lat}(V) \ni U \mapsto \rho_U \in \mathrm{Con}(V)$$

są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami (a nawet *izomorfizmami krat*).

Zadanie 4.31. Które ze zbiorów są liniowo niezależne w odpowiedniej przestrzeni?

(1) $\varnothing$ w przestrzeni $\mathbb{Q}^2$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(2) $\{0, x\}$ w przestrzeni $\mathbb{Q}[x]$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(3) $\{(1, 2, 1), (1, 2, 1)\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

(4) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

(5) $\{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 2)\}$ w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ nad ciałem $\mathbb{C}$.

Zadanie 4.32. Z podanego podzbioru S przestrzeni wektorowej V wybierz maksymalny (względem inkluzji) podzbiór liniowo niezależny, gdy:

(1) $V = \mathbb{R}^4$ oraz $S = \{(3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1)\}$.

(2) $V = \mathbb{C}^3$ oraz $S = \{(2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6)\}$.

(3) $V = \mathbb{F}_3^3$ oraz $S = \{(1,1,1),(1,2,0),(0,1,2),(0,0,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$.

Zadanie 4.33. Dla jakich par $(s,t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wektory $v_1 = (5,7,s,2)$, $v_2 = (1,3,2,1)$ oraz $v_3 = (2,2,4,t)$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$?

Zadanie 4.34. Niech $n \geqslant 1$ oraz

$$S = \{A_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\},$$

gdzie A_{ij} to macierz, której (k,l)-ty wyraz dla $k,l \in \{i,j\}$ równy jest 1, zaś pozostałe wyrazy równe są 0. Uzasadnij, że zbiór S jest liniowo niezależny i opisz podprzestrzeń rozpiętą przez ten zbiór.

Zadanie 4.35. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $u_1, \ldots, u_n$ są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Czy wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ zdefiniowane formułą

$$v_i = u_1 + \cdots + u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

są liniowo niezależne? To samo pytanie dla wektorów $w_1, \ldots, w_n \in V$ danych jako

$$w_i = \begin{cases} u_i + u_{i+1} & \text{gdy } 1 \leqslant i < n, \\ u_n + u_1 & \text{gdy } i = n. \end{cases}$$

Zadanie 4.36. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Sprawdź, że dowolne wielomiany $0 \neq f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ spełniające $\deg f_i \neq \deg f_j$ dla $i \neq j$ są liniowo niezależne nad K.

Zadanie 4.37. Załóżmy, że $n \geqslant 1$. Czy istnieją takie wielomiany $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x]$ oraz $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}[y]$, że

$$1 + xy + \cdots + x^n y^n = f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y)?$$

Zadanie 4.38. Uzasadnij, że rodzina funkcji wymiernych $\{\frac{1}{x-a} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}(x)$ jest liniowo niezależna nad $\mathbb{R}$. Zaproponuj możliwie „małe” dopełnienie tej rodziny do układu rozpinającego przestrzeń $\mathbb{R}(x)$ nad $\mathbb{R}$. To samo zadanie dla rodziny $\{\frac{1}{x-a} : a \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}(x)$.

Zadanie 4.39. Sprawdź, że wektory $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ są liniowo niezależne. Dla dowolnego $n \geqslant 1$ zaproponuj n-elementowy zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$. Czy istnieje nieskończony i liniowo niezależny podzbiór $\mathbb{R}$?

Zadanie 4.40. Ustawmy liczby wymierne $\mathbb{Q}$ w ciąg $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (można to zrobić na wiele sposobów). Dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy liczbę

$$a_r = \sum_{n \in N(r)} \frac{1}{n!}, \qquad \text{gdzie } N(r) = \{n \in \mathbb{N} : q_n < r\}.$$

(1) Sprawdź, że szereg definiujący a_r jest zbieżny (czyli definicja jest poprawna).

(2) Wykaż, że dla dowolnych $r, s \in \mathbb{R}$ zachodzi $r \neq s \Longrightarrow a_r \neq a_s$.

(3) Udowodnij, że zbiór $A = \{a_r : r \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$ jest liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$.

Uwaga. Dowodzi się, że choć zbiór A jest tej samej mocy co $\mathbb{R}$ (tzn. $|A| = \mathfrak{c}$), to nie rozpina on $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Można też wykazać (patrz J. von Neumann, *Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*, Math. Ann. **99** (1928), 134–141), że liczby postaci

$$b_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^{\lfloor nr \rfloor}}}{2^{2^{n^2}}} \quad (r > 0)$$

($\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby $x \in \mathbb{R}$) są nie tylko liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, ale nawet *algebraicznie niezależne* nad $\mathbb{Q}$, tzn. dla dowolnego $n \geqslant 1$, dowolnych $0 < r_1 < \cdots < r_n$ oraz dowolnego wielomianu $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ zachodzi $f(b_{r_1}, \ldots, b_{r_n}) \neq 0$.

Zadanie 4.41. Udowodnij, że w przestrzeni wektorowej ciągów $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{F}_2)$ nad ciałem $\mathbb{F}_2$ istnieje nieprzeliczalny zbiór wektorów liniowo niezależnych.

Zadanie 4.42. Niech S, T będą liniowo niezależnymi i rozłącznymi (tzn. $S \cap T = \varnothing$) podzbiorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K oraz niech $v \in V$. Wykaż, że:

(1) zbiór $S \cup \{v\}$ jest liniowo niezależny $\Longleftrightarrow v \notin \mathrm{Lin}(S)$.

(2) zbiór $S \cup T$ jest liniowo niezależny $\Longleftrightarrow \mathrm{Lin}(S) \cap \mathrm{Lin}(T) = 0$.

Zadanie 4.43. Niech $n \geqslant 1$. Czy funkcje $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zdefiniowane wzorami:

(1) $f_j(x) = x - j$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$,

(2) $f_j(x) = |x - j|$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$,

(3) $f_j(x) = x^j$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$,

(4) $f_j(x) = e^{jx}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$,

(5) $f_j(x) = \sin jx$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$,

(6) $f_j(x) = \cos jx$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$

są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Zadanie 4.44. Uzasadnij, że w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ istnieje nieskończony zbiór wektorów, którego dowolne dwa różne elementy są liniowo niezależne. Sformułuj oraz wykaż podobne twierdzenie dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \geqslant 3$.

Zadanie 4.45. Niech $n \geqslant 1$. Udowodnij, że funkcje $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni $\mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, że wektory

$$v_i = (f_1(x_i), \ldots, f_n(x_i)) \in \mathbb{R}^n \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

są liniowo niezależne.

Zadanie 4.46. Załóżmy, że $1 \leqslant n \leqslant m$ oraz $v_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jm}) \in \mathbb{C}^m$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$. Pokaż, że gdy dla każdego $1 \leqslant p \leqslant n$ istnieje takie $1 \leqslant q \leqslant m$, że

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{jq}| < 2|a_{pq}|,$$

to wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowe niezależne.

Zadanie 4.47. Niech $V = l^\infty$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich ograniczonych ciągów o wyrazach rzeczywistych (z naturalnymi działaniami). Dla dowolnego $t \in (0,1)$ zdefiniujmy wektor $v_t = (t^{n-1})_{n=1}^{\infty} \in V$. Dowiedź, że zbiór $\{v_t : t \in (0,1)\} \subseteq V$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 4.48. Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 2 & 3a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ 2 & 2a+1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Zadanie 4.49. Niech

$$v_1 = (1,2,0), \qquad v_2 = (0,1,2), \qquad v_3 = (2,0,1).$$

Dla jakich $p \in \mathbb{P}$ zbiór $\{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{F}_p^3$?

Zadanie 4.50. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych zadanego macierzą

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Zadanie 4.51. Dopełnij wektory $v_1 = (1,2,3,-2,-4)$ oraz $v_2 = (6,4,-5,-4,-1)$ do bazy przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych zadanego macierzą

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Zadanie 4.52. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

i dopełnij ją do bazy przestrzeni

$$\mathrm{Lin}((1,-2,-1,2),(4,-1,5,-6),(2,-3,6,-5)).$$

Zadanie 4.53. Niech $X = \mathbb{F}_{13}^4$ oraz

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in X : x_1 + x_2 + x_4 = 0 \text{ oraz } x_3 - x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni U. Ile elementów ma ta przestrzeń? Opisz równaniem podprzestrzeń $V = U + \mathrm{Lin}((1,1,1,2)) \subseteq X$.

Zadanie 4.54. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni wektorowej

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$$

nad ciałem $\mathbb{C}$. Podaj współrzędne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & -1 \\ -2 & 1-i \end{bmatrix} \in V$$

w znalezionej bazie. Jaki jest wymiar V nad $\mathbb{R}$?

Zadanie 4.55. Przypuśćmy, że zbiór B jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{C}$. Dowiedź, że zbiór $B \cup iB$ (oczywiście $iB = \{iv : v \in B\}$) jest bazą przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$. W szczególności $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V$.

Zadanie 4.56. Załóżmy, że K jest podciałem ciała L oraz, że V jest przestrzenią liniową nad L. Pokaż, że gdy zbiór A jest bazą L nad K, zaś zbiór B jest bazą V nad L, to zbiór $\{\alpha v : (\alpha, v) \in A \times B\}$ jest bazą V nad K. W szczególności $\dim_K V = (\dim_K L)(\dim_L V)$.

Zadanie 4.57. Przypuśćmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $V = K^n$ i zdefiniujmy funkcję $f\colon V \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ wzorem

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}.$$

Pokaż, że gdy $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to istnieje taka baza $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ przestrzeni V, że $v_i \in \operatorname{Lin}(e_1, \dots, e_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $f(B) = \{1, \dots, n\}$ (tzn. liczby $f(v_1), \dots, f(v_n)$ są parami różne).

Zadanie 4.58. Niech $V = \mathbb{R}^4$ oraz

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + 2x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni V/U.

Zadanie 4.59. Niech $V = \mathbb{R}^5$ oraz

$$U = \operatorname{Lin}((1, 2, 3, 2, 1), (5, 1, 7, 10, 1), (-1, 2, 1, -2, 1)).$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni V/U.

Zadanie 4.60. Niech $X = \mathbb{R}[x]$ oraz

$$U = \{f \in X : f(0) = f(1) = 0\}, \qquad V = \{f \in X : f(0) = f(1)\}.$$

Uzasadnij, że $U \subseteq V$ są podprzestrzeniami przestrzeni X i oblicz wymiary przestrzeni X/U, X/V oraz V/U.

Zadanie 4.61. Niech $V = C(\mathbb{R})$ oraz $X = [0, 1]$. Sprawdź, że

$$U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in X\}$$

jest podprzestrzenią V oraz $C(X) \cong V/U$.

Zadanie 4.62. Rozważmy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$. Wykaż, że:

(1) gdy $V = \mathbb{R}^2$ oraz $U = \{(x, y) \in V : x + y \in \mathbb{Q}\}$, to $V/U \cong \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
(2) gdy $V = \mathbb{R}^3$ oraz $U = \{(x, y, z) \in V : x - y, y - z \in \mathbb{Q}\}$, to $V/U \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Q})^2$.

Zadanie 4.63. Rozważmy $\mathbb{C}$ jako przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathbb{Q}$. Uzasadnij, że

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = y = z\},$$
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q} = z + \mathbb{Q}\}$$

są $\mathbb{Q}$-podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{C}^3$ oraz sprawdź, że $V/U \cong \mathbb{Q}^2$.

Zadanie 4.64. Załóżmy, że U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(1) Udowodnij, że $\dim V = \dim U + \dim V/U$. W szczególności gdy $\dim V < \infty$, to $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

(2) Wskaż przykład takiej przestrzeni wektorowej V oraz jej podprzestrzeni U, że zachodzi $\dim U = \dim V/U = \dim V$.

Uwaga. Liczba

$$\operatorname{codim} U = \dim V/U$$

bywa często nazywana *kowymiarem* podprzestrzeni U w przestrzeni V.

Zadanie 4.65. Niech S będzie zbiorem skończonym. Rozważmy przestrzeń wektorową $V = \mathcal{P}(S)$ nad ciałem $\mathbb{F}_2$ z działaniami

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \cdot A = \begin{cases} \varnothing & \text{gdy } \lambda = 0, \\ A & \text{gdy } \lambda = 1. \end{cases}$$

Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni V. Zinterpretuj w języku teorii zbiorów co znaczy, że wektory $A, B, C \in V$ są liniowo niezależne.

Zadanie 4.66. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Sprawdź, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $B = \{(x-a)^j : 0 \leqslant j \leqslant n\}$ (gdy $j = 0$, to $(x-a)^j = 1$) jest bazą przestrzeni liniowej V. Znajdź współrzędne wielomianu $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in V$ w bazie B.

Zadanie 4.67. Wyznacz bazę podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}[x]$, gdy:

(1) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1) = f(2) = 0\}$.

(2) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(2-3i) = 0\}$.

(3) $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : f'(3) = f''(3) = 0\}$.

Zadanie 4.68. Załóżmy, że U jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V nad ciałem K. Dowiedź, że liniowo niezależny podzbiór $S \subseteq V$ można dopełnić do bazy przestrzeni V wektorami z U wtedy i tylko wtedy, gdy $U + \operatorname{Lin}(S) = V$.

Zadanie 4.69. Niech U, V, W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X nad ciałem K. Wykaż, że gdy $X = U \oplus W = V \oplus W$ oraz $\{v_i : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni V, to $\dim U = \dim V$ i istnieje taki podzbiór $\{w_i : i \in I\} \subseteq W$, że zbiór $\{v_i + w_i : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni U.

Zadanie 4.70. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $n \geqslant 1$ oraz $v_0, \ldots, v_n \in V$. Pokaż, że gdy $v_0 \notin \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$ oraz $v_0 + v_n \in \operatorname{Lin}(v_0, \ldots, v_{n-1})$, to $\dim \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) < n$.

Zadanie 4.71. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykaż, że gdy $n > \dim V$, to dla dowolnych wektorów $v_0, \ldots, v_n \in V$ istnieją takie, nie wszystkie równe zeru, skalary $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K$, że $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ oraz $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = 0$.

Zadanie 4.72. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową spełniającą $\dim V \geqslant n$. Uzasadnij, że istnieją takie liniowo zależne wektory $v_0, \ldots, v_n \in V$, że każdy właściwy podzbiór zbioru $\{v_0, \ldots, v_n\}$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 4.73. Dla jakich $t \in \mathbb{C}$ układ wektorów $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ oraz $v_3 = (1, t, -3)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}^3$? Dla każdego takiego t wyznacz współrzędne wektora $v = (1, 2, i) \in \mathbb{C}^3$ w tej bazie.

Zadanie 4.74. Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{Q}^3$, w której wektory $v_1 = (0, 2, 1)$ oraz $v_2 = (1, 1, 2)$ mają współrzędne, odpowiednio, $(1, 2, -1)$ oraz $(0, 0, 1)$?

Zadanie 4.75. Niech X będzie przestrzenią liniową spełniającą $\dim X = n < \infty$. Dla jakich trójek $(p, q, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ istnieją takie podprzestrzenie U, V przestrzeni X, że $\dim U = p$, $\dim V = q$ oraz $\dim(U \cap V) = r$?

Zadanie 4.76. Załóżmy, że U, V skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami pewnej przestrzeni liniowej. Pokaż, że:

(1) gdy $\dim U \leqslant \dim V$ oraz $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$, to $U \subseteq V$.

(2) gdy $\dim U < \dim V$ oraz $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 2$, to $U \subseteq V$.

Zadanie 4.77. Załóżmy, że $U, V \neq 0$ są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X. Przypuśćmy, iż istnieje taka funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$, że $f(u) < f(v)$ dla dowolnych $0 \neq u \in U$ oraz $0 \neq v \in V$. Uzasadnij, że $\dim U + \dim V \leqslant \dim X$.

Zadanie 4.78. Załóżmy, że K jest ciałem zawierającym $\mathbb{C}$. Udowodnij, że gdy wymiar przestrzeni liniowej K nad ciałem $\mathbb{C}$ jest skończony, to $K = \mathbb{C}$.

Zadanie 4.79. Niech $U = \mathrm{Lin}((1, 3, 2, 5), (3, 5, 1, 7), (1, 3, s, 8)) \subseteq \mathbb{R}^4$, zaś $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + tx_4 = 0. \end{cases}$$

Wyznacz wymiary przestrzeni U oraz V w zależności od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$. Dla jakich par $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zachodzi $U + V = \mathbb{R}^4$?

Zadanie 4.80. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że zbiory $A_0, \ldots, A_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$ są niepuste. Dowiedź, iż istnieją niepuste oraz rozłączne podzbiory $I, J \subseteq \{0, \ldots, n\}$ o tej własności, że $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$.

Zadanie 4.81. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *addytywną*, gdy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że każda ciągła funkcja addytywna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *liniowa*, tzn. postaci $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Czy pomijając założenie ciągłości funkcji f teza o jej liniowości pozostanie prawdziwa?

Zadanie 4.82. Załóżmy, że $f \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Uzasadnij, że:

(1) gdy $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$, to f jest sumą dwóch funkcji okresowych.

(2) gdy $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$, to f jest sumą trzech funkcji okresowych, ale nie jest sumą dwóch funkcji okresowych.

Zadanie 4.83. Niech K będzie właściwym podciałem ciała L. Czy istnieje taka baza B przestrzeni L nad K, że:

(1) $xy \in B$ dla dowolnych $x, y \in B$?

(2) $x/y \in B$ dla dowolnych $x, y \in B$?

Uwaga. Niektóre *bazy Hamela* (tzn. bazy $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$) mają ciekawe własności. Przykładowo istnieje baza Hamela B spełniająca $x^n \in B$ dla dowolnego $x \in B$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4.84. Niech U, V będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X. Dowiedź, że gdy $\dim U + \dim V = \dim X < \infty$, to $U \cap V = 0 \iff U + V = X$. Czy równoważność pozostanie prawdziwa bez założenia $\dim X < \infty$?

Zadanie 4.85. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) wymiar przestrzeni V jest nieskończony.

(2) dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje układ n liniowo niezależnych wektorów w V.

(3) istnieje taki zbiór $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4.86. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Załóżmy, że zbiór $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest bazą przestrzeni V i zdefiniujmy $V_n = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(1) Uzasadnij, że gdy podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest skończonego wymiaru, to $U \subseteq V_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

(2) Skonstruuj taką podprzestrzeń $U \subseteq V$, że $U \neq V$ oraz $U + \mathrm{Lin}(v) = V$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

Zadanie 4.87. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $\dim V < \infty$.

(2) dla dowolnej rodziny podprzestrzeni $(V_i)_{i\in I}$ przestrzeni V z warunku $\sum_{i\in I} V_i = V$ wynika, że $\sum_{i\in F} V_i = V$ dla pewnego skończonego podzbioru $F \subseteq I$.

(3) dla dowolnej rodziny podprzestrzeni $(V_i)_{i\in I}$ przestrzeni V z warunku $\bigcap_{i\in I} V_i = 0$ wynika, że $\bigcap_{i\in F} V_i = 0$ dla pewnego skończonego podzbioru $F \subseteq I$.

Uwaga. Warunki (2) oraz (3) definiują pojęcia *skończonej generowalności* oraz *skończonej kogenerowalności*, odpowiednio. Powyższe zadanie pokazuje, że w kategorii przestrzeni liniowych warunki te są równoważne ze skończonością wymiaru. Warunki (2) oraz (3) nie są jednak równoważne w innych kategoriach modułów (np. w kategorii grup abelowych).

Zadanie 4.88. Załóżmy, że K jest ciałem spełniającym $|K| = q < \infty$. Niech $1 \leqslant d \leqslant n$.

(1) Ile jest baz uporządkowanych/nieuporządkowanych w przestrzeni K^n?

(2) Ile jest d-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w przestrzeni K^n?

(3) Ile jest wszystkich podprzestrzeni liniowych w przestrzeni K^n?

Zadanie 4.89. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Wykaż, że gdy $\dim V > 1$ oraz $|K| = q < \infty$, to istnieją takie właściwe podprzestrzenie $V_0, \ldots, V_q$ przestrzeni V, że $V = V_0 \cup \cdots \cup V_q$.

Zadanie 4.90. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest przestrzenią wektorową, natomiast $T \subseteq V$ jest takim podzbiorem, że $\mathrm{Lin}(T \setminus F) = V$ dla dowolnego skończonego podzbioru $F \subseteq T$. Udowodnij, że istnieje nieskończony podzbiór $S \subseteq T$ spełniający $\mathrm{Lin}(T \setminus S) = V$.

Zadanie 4.91. Załóżmy, że X jest przestrzenią wektorową nad ciałem K spełniającym $|K| > 2$. Wykaż, że gdy U, V są podprzestrzeniami właściwymi w X, to istnieje taka baza B przestrzeni X, że $B \cap (U \cup V) = \varnothing$. Czy teza pozostaje prawdziwa gdy $|K| = 2$?

Zadanie 4.92. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że U, V, W są n-wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X. Pokaż, że gdy $\dim(U \cap V) = \dim(V \cap W) = \dim(W \cap U) = n - 1$, to $\dim(U + V + W) = n + 1$ lub $U \cap V = V \cap W = W \cap U$.

Zadanie 4.93. Niech X będzie przestrzenią liniową spełniającą $2 \leqslant \dim X = n < \infty$. Załóżmy, że $U \neq V$ są podprzestrzeniami przestrzeni X. Dowiedź, że:

(1) gdy $\dim U = \dim V = n - 1$, to $\dim(U \cap V) = n - 2$.
(2) gdy $\dim U = \dim V$ oraz $\dim(U \cap V) = n - 2$, to $X = U + V$.

Zadanie 4.94. Niech $d \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest taką rodziną d-wymiarowych podprzestrzeni pewnej przestrzeni liniowej, że $\dim(V_i \cap V_j) = d - 1$ dla dowolnych $i \neq j$. Uzasadnij, że $\dim(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) = d - 1$ lub $\dim(\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n) = d + 1$.

Zadanie 4.95. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem nieprzeliczalnym K (tzn. spełniającym $|K| > \aleph_0$). Dowiedź, że gdy $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną właściwych podprzestrzeni V, to $V \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Czy teza pozostaje prawdziwa gdy wymiar przestrzeni V jest nieskończony lub gdy ciało K jest co najwyżej przeliczalne?

Zadanie 4.96. Pokaż, że gdy V jest przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $\dim V = 2n$ dla pewnego $n \geqslant 1$, to istnieje taka rodzina $(V_\lambda)_{\lambda\in K}$ podprzestrzeni przestrzeni V, że $\dim V_\lambda = n$ dla $\lambda \in K$ oraz $V_\lambda \cap V_\mu = 0$ dla $\lambda \neq \mu$.

Zadanie 4.97. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nieskończonego wymiaru. Udowodnij, iż istnieje taka rodzina $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni V, że $V_i \cap V_j = 0$ dla $i \neq j$.

Zadanie 4.98. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Dowiedź, że gdy $U \subseteq V$ jest taką podprzestrzenią, że przestrzeń V/U jest nieskończonego wymiaru, to istnieje taka rodzina $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podprzestrzeni V, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq U$, ale $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \nsubseteq U$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4.99. Załóżmy, że X jest przestrzenią wektorową. Oznaczmy przez $\mathrm{Lat}_0(X)$ rodzinę wszystkich skończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni X i zdefiniujmy funkcję $\rho\colon \mathrm{Lat}_0(X) \times \mathrm{Lat}_0(X) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\begin{aligned}\rho(U, V) &= \dim(U + V) - \dim(U \cap V)\\ &= \dim U + \dim V - 2\dim(U \cap V).\end{aligned}$$

Uzasadnij, że:

(1) $\rho(U, V) = 0 \iff U = V$ dla $U, V \in \mathrm{Lat}_0(X)$.

(2) $\rho(U, V) = \rho(V, U)$ dla $U, V \in \mathrm{Lat}_0(X)$.

(3) $\rho(U, W) \leqslant \rho(U, V) + \rho(V, W)$ dla $U, V, W \in \mathrm{Lat}_0(X)$.

Uwaga. Para $(\mathrm{Lat}_0(X), \rho)$ jest przykładem struktury nazywanej *przestrzenią metryczną*.

Zadanie 4.100 (a co jeśli K nie jest ciałem?)**.** Trójkę $(R, +, \cdot)$ nazywamy *pierścieniem* (łącznym, przemiennym i z jedynką), gdy $(R, +, \cdot)$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała prócz (ewentualnie) wymagania, by dla dowolnego $0 \neq a \in R$ istniał taki element $b \in R$, że $ab = 1$ (0 i 1 oznaczają, odpowiednio, element neutralny dodawania i mnożenia w R). Tak samo jak przestrzeń wektorową nad ciałem definiujemy *moduł* nad pierścieniem R (spełniony ma być ten sam zestaw aksjomatów). Pojęcia kombinacji liniowej oraz liniowej niezależności wektorów (elementy modułu także nazywamy wektorami) definiujemy tak, jak dla przestrzeni wektorowych.

(1) Wiadomo, że każdy minimalny zbiór generatorów przestrzeni wektorowej V jest bazą tej przestrzeni, zatem ma $\dim V$ elementów. Sprawdź, że $\mathbb{Z}$ jako moduł nad $\mathbb{Z}$ posiada minimalne zbiory generatorów o dowolnej skończonej mocy.

(2) Wiadomo, że każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór przestrzeni liniowej jest jej bazą. Udowodnij, że $\mathbb{Z}$ jako moduł nad $\mathbb{Z}$ posiada maksymalny liniowo niezależny podzbiór, który nie jest bazą.

(3) Wiadomo, że każda przestrzeń wektorowa posiada bazę. Podaj przykład pierścienia R oraz modułu M nad R, który nie posiada bazy.

Uwaga. Jeśli moduł nad pierścieniem posiada bazę, to każde dwie bazy tego modułu są równoliczne. Fakt ten przestaje być prawdziwy, gdy zrezygnujemy w definicji pierścienia z przemienności mnożenia (mówi się wtedy o *pierścieniach nieprzemiennych*), tzn. istnieje taki pierścień nieprzemienny R oraz moduł nad R, który ma bazy skończone różnej mocy (o takim pierścieniu mówimy, że nie ma własności *Invariant Basis Number*).

5 Macierze

Zadanie 5.1. Oblicz rzędy macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1+i & -1 & 3-2i \\ 0 & 2+3i & -1 \\ 0 & 5-i & 9 \\ -1 & 8 & 7i \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.2. Wyznacz rzędy macierzy:

$$\begin{bmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 3 \\ 2s & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & t+3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & t^2-2t & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -t & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $s, t \in \mathbb{C}$.

Zadanie 5.3. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 3?$$

Zadanie 5.4. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Udowodnij lub podaj kontrprzykład:

(1) jeśli $A^2 = B^2$, to $A = B$ lub $A = -B$.

(2) jeśli $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, to $\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} B^2$.

(3) jeśli $\operatorname{rank} AB = 0$, to $\operatorname{rank} BA = 0$.

(4) jeśli $\operatorname{rank} AB = 0$, to $\operatorname{rank} A = 0$ lub $\operatorname{rank} B = 0$.

Zadanie 5.5. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ zachodzi:

(1) $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

(2) $\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

(3) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank}(AB) + n$.

Zadanie 5.6. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Niech $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$. Dowiedź, że $\operatorname{rank} A = r \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ oraz $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$, że $A = PBQ$, gdzie macierz $B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ ma postać blokowo-diagonalną

$$B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.7. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Udowodnij, że gdy $AB = 0$, to $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n$.

Zadanie 5.8. Niech $n \geqslant 1$ oraz K będzie ciałem. Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ istnieje taka macierz $B \in \mathrm{M}_n(K)$, że $AB = 0$ oraz $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = n$.

Zadanie 5.9. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierze $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$ spełniają oraz $AB = AC$. Jaki jest największy możliwy rząd macierzy $B - C$?

Zadanie 5.10. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Dowiedź, że macierz $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ spełnia $\operatorname{rank} A = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = BC$ dla pewnych $0 \neq B \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$ oraz $0 \neq C \in \mathrm{M}_{1,m}(K)$.

Zadanie 5.11. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m, p, q \geqslant 1$. Niech $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$. Udowodnij, że $\operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = PBQ$ dla pewnych macierzy $P \in \mathrm{M}_{n,p}(K)$ oraz $Q \in \mathrm{M}_{q,m}(K)$.

Zadanie 5.12. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ spełnia $\operatorname{rank} A = r \geqslant 1$, to istnieją takie macierze $A_1, \ldots, A_r \in \mathrm{M}_n(K)$, że zachodzi $A = A_1 + \cdots + A_r$ oraz $\operatorname{rank} A_i = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant r$.

Zadanie 5.13. Niech $n \geqslant 1$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Rozważmy macierz A rozmiaru $n! \times n$, której wierszami są wszystkie możliwe permutacje ciągu $a_1, \ldots, a_n$. Wyznacz możliwe wartości liczby $\operatorname{rank} A$.

Zadanie 5.14. Niech $n, m \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Wykaż, że

$$\operatorname{rank}(A^t A) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AA^t).$$

Czy powyższa równość pozostaje prawdziwa gdy ciało $\mathbb{R}$ zastąpimy przez $\mathbb{C}$?

Uwaga. Mówimy, że ciało F jest *formalnie rzeczywiste*, gdy dla dowolnego $n \geqslant 1$ oraz dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in F$ zachodzi $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$. Łatwo się przekonać, że ciało K jest formalnie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $n, m \geqslant 1$ oraz dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ jest $\operatorname{rank}(A^t A) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AA^t)$.

Zadanie 5.15. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Rozważmy macierz $M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ daną w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

Zadanie 5.16. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ oznaczmy przez $E_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$ macierz, której (i, j)-ty wyraz równy jest 1, natomiast pozostałe wyrazy równe są 0 (macierze E_{ij} nazywamy *jedynkami macierzowymi*).

(1) Sprawdź, że zbiór $\{E_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ stanowi bazę przestrzeni $\mathrm{M}_n(K)$ nad K.

(2) Udowodnij, że $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ dla dowolnych $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

(3) Niech $0 \neq \lambda \in K$ oraz $i \neq j$. Jakiej operacji elementarnej odpowiada mnożenie danej macierzy z lewej/prawej strony przez macierz $E_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ (macierze $E_{ij}(\lambda)$ nazywane są *transwekcjami*)?

(4) Niech $0 \neq \lambda \in K$ oraz $1 \leqslant i \leqslant n$. Jakiej operacji elementarnej odpowiada mnożenie danej macierzy z lewej/prawej strony przez macierz $D_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii}$?

(5) Niech $i \neq j$. Jakiej operacji elementarnej odpowiada mnożenie danej macierzy z lewej/prawej strony przez macierz $T_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$?

(6) Wykaż, że każda macierz T_{ij} dla $i \neq j$ da się przedstawić jako iloczyn transwekcji oraz macierzy z punktu (4).

Zadanie 5.17. Przedstaw macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

Zadanie 5.18. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Oblicz A^n dla $n \geqslant 1$. Jakie tożsamości wynikają z równości $A^{n+m} = A^n A^m$ dla $n, m \geqslant 1$?

Zadanie 5.19. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Oblicz A^n dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 5.20. Rozważmy macierze $A, B, C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $AB^n = C$?

Zadanie 5.21. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

Dowiedź, iż dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieją takie liczby $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$, że $A^n = a_n A^2 + b_n A$. Spróbuj wyznaczyć ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zadanie 5.22. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{bmatrix} 2a & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ macierze A, B są *przemienne* (tzn. spełniają $AB = BA$)?

Zadanie 5.23. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Opisz wszystkie macierze $A \in \mathrm{M}_n(K)$ o tej własności, że $AB = BA$ dla dowolnej macierzy $B \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 5.24. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zbiór

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ nb & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

z działaniami dziedziczonymi z $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$, jest ciałem?

Zadanie 5.25. Twierdzenie Fermata o sumie dwóch kwadratów mówi, że liczba $p \in \mathbb{P}$ jest sumą dwóch kwadratów (tzn. $p = n^2 + m^2$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p \not\equiv 3 \pmod 4$. Natomiast Małe Twierdzenie Fermata orzeka, że gdy $p \in \mathbb{P}$, to $a^p \equiv a \pmod p$ dla dowolnego $a \in \mathbb{Z}$. Wykorzystując te twierdzenia wyznacz te liczby $p \in \mathbb{P}$, dla których zbiór

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_p \right\},$$

z działaniami dziedziczonymi z $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_p)$, jest ciałem.

Uwaga. Bardzo pomysłowy dowód twierdzenia Fermata o sumie dwóch kwadratów można znaleźć w artykule D. Zagier, *A One-Sentence Proof That Every Prime* $p \equiv 1 \pmod 4$ *Is a Sum of Two Squares*, Amer. Math. Monthly **97** (1990), 144.

Zadanie 5.26. Rozważmy macierze zespolone:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 1 & 2 & i \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiąż równanie $AX + XB = C$ o niewiadomej $X \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

Zadanie 5.27. Rozwiąż w zbiorze $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ równania kwadratowe:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.28. Niech $n \geqslant 1$. Czy istnieją takie macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, że $AB - BA = I$? Co w przypadku, gdy ciało $\mathbb{R}$ zastąpimy innym ciałem?

Zadanie 5.29. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Wprowadźmy *komutator* macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ formułą

$$[A, B] = AB - BA.$$

Zdefiniujmy $S = \{[A, B] : A, B \in \mathrm{M}_n(K)\}$. Wyznacz bazę oraz wymiar podprzestrzeni $V = \mathrm{Lin}(S) \subseteq \mathrm{M}_n(K)$.

Uwaga. Okazuje się, że $V = S$ (gdy $\operatorname{char} K = 0$, to dowód tego faktu jest prostszy). Warto zajrzeć do pracy A. A. Albert, B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J. **4** (1957), 1–3.

Zadanie 5.30. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$ oraz $A \in \mathrm{M}_2(K)$. Wykaż, że $\operatorname{tr} A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B + C$ dla pewnych macierzy $B, C \in \mathrm{M}_2(K)$ spełniających $B^2 = C^2 = 0$. Czy teza pozostanie prawdziwa, gdy $\operatorname{char} K = 2$?

Uwaga. Załóżmy, że K jest dowolnym ciałem. Niech $\operatorname{char} K = p \geqslant 0$ oraz $n \geqslant 1$. Macierz *bezśladowa* $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (tzn. spełniająca $\operatorname{tr} A = 0$) da się zapisać jako suma dwóch macierzy nilpotentnych gdy $p \nmid n$ lub gdy A nie jest macierzą *skalarną* (tzn. postaci $A = \lambda I$ dla pewnego $\lambda \in K$). W przeciwnym wypadku (tzn. $p \mid n$ oraz $A = \lambda I$ dla pewnego $\lambda \in K$) macierz A da się zapisać jako suma trzech macierzy nilpotentnych. Warto zajrzeć do prac J. D. Botha, *Sums of two square-zero matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 516–524 oraz S. Breaz, G. Călugăreanu, *Sums of nilpotent matrices*, Linear Multilinear Algebra **65** (2017), 67–78.

Zadanie 5.31. Niech $S = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : A^2 = 0\}$. Czy S jest podprzestrzenią $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Jeśli nie, to wyznacz $\operatorname{Lin}(S)$ i policz wymiar tej podprzestrzeni.

Zadanie 5.32. Niech $S = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : A^2 = A\}$. Czy S jest podprzestrzenią $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Jeśli nie, to wyznacz $\operatorname{Lin}(S)$ i policz wymiar tej podprzestrzeni.

Uwaga. Warto zajrzeć do artykułu R. E. Hartwig, M. S. Putcha, *When is a matrix a sum of idempotents?*, Linear Multilinear Algebra **26** (1990), 279–286.

Zadanie 5.33. Ustalmy $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ oraz zdefiniujmy $V = \{X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$. Udowodnij, że V jest podprzestrzenią w $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ parzystego wymiaru.

Uwaga. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. *Centralizator* macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ określamy jako

$$\mathrm{C}(A) = \{X \in \mathrm{M}_n(K) : AX = XA\}.$$

Twierdzenie Frobeniusa o centralizatorze mówi, że

$$\dim \mathrm{C}(A) = n + 2\sum_{k=1}^{n} \deg f_k,$$

gdzie $f_k \in K[x]$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich k-tych minorów macierzy charakterystycznej $A - xI \in \mathrm{M}_n(K(x))$ dla A. W szczególności gdy n jest parzyste, to także wymiar $\dim \mathrm{C}(A)$ jest liczbą parzystą.

Zadanie 5.34. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Załóżmy, że równanie $Ax = 0$ ma niezerowe rozwiązanie zespolone. Czy dla pewnego $b \in \mathbb{C}^n$ równanie $A^t x = b$ może mieć dokładnie jedno rozwiązanie zespolone?

Zadanie 5.35. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ (suma po wszystkich $1 \leqslant j \leqslant n$ różnych od i) dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$. Wykaż, że jednorodny układ równań $Ax = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 5.36. Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego określ liczbę rozwiązań układu równań liniowych zadanego macierzą

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & t \end{array}\right]$$

w zależności od parametrów $s, t \in \mathbb{F}_7$.

Zadanie 5.37. Rozważmy układ równań liniowych zadany macierzą

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & t \\ 5 & s & 11 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Dla jakich par $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ układ ten:

(1) jest sprzeczny?

(2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie? Wyznacz to rozwiązanie.

(3) posiada nieskończenie wiele rozwiązań?

Zadanie 5.38. Załóżmy, że macierze $A \in \mathrm{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ oraz $B \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ spełniają

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz macierz BA. Dlaczego da się to zrobić?

(2) Podaj przykład macierzy $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ oraz $B_1, B_2 \in \mathrm{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ spełniających $A_1B_1 = A_2B_2$, ale $B_1A_1 \neq B_2A_2$.

Zadanie 5.39. Niech $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$. Wykaż, że $A^5 = I \implies A = I$. Czy teza będzie prawdziwa, gdy zamienimy ciało $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$?

Zadanie 5.40. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując powyższy wzór uzasadnij, że gdy $\varphi \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$$

dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 5.41. Zdefiniujmy odwzorowanie $D\colon \mathbb{C} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ wzorem

$$D(x+iy) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, że:

(1) $D(0) = 0$ oraz $D(z_1 + z_2) = D(z_1) + D(z_2)$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(2) $D(1) = I$ oraz $D(z_1z_2) = D(z_1)D(z_2)$ dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(3) $D(\overline{z}) = D(z)^t$ dla $z \in \mathbb{C}$.

(4) $\det D(z) = |z|^2$ dla $z \in \mathbb{C}$.

(5) $D(z^{-1}) = D(z)^{-1}$ dla $0 \neq z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 5.42. Załóżmy, że $n, m \geqslant 1$. *Sprzężenie hermitowskie* macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ definiujemy wzorem $A^h = \overline{A}^t$, gdzie $\overline{A}$ oznacza *sprzężenie zespolone* macierzy A, tzn. $\overline{A} = [\overline{a}_{jk}]$ gdy $A = [a_{jk}]$. Uzasadnij, że $A = 0 \iff A^h A = 0 \iff \operatorname{tr}(A^h A) = 0$.

Zadanie 5.43. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Udowodnij, że gdy $x^h A x = x^h B x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{C}^n$, to $A = B$. Czy teza pozostanie prawdziwa gdy ciało $\mathbb{C}$ zastąpimy ciałem $\mathbb{R}$?

Zadanie 5.44 (dwumian Newtona)**.** Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Dowiedź, że gdy macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ są przemienne, to

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^j B^{m-j}$$

dla dowolnego $m \geqslant 1$. Czy powyższa równość pozostanie prawdziwa gdy pominiemy założenie $AB = BA$?

Uwaga. Gdy $s \geqslant 1$, zaś macierze $A_1, \ldots, A_s \in \mathrm{M}_n(K)$ są parami przemienne, to można dowieść, że

$$(A_1 + \cdots + A_s)^m = \sum_{j_1+\cdots+j_s=m} \frac{m!}{j_1! \cdots j_s!} A_1^{j_1} \cdots A_s^{j_s}$$

dla dowolnego $m \geqslant 1$ (jest to uogólnienie dwumianu Newtona).

Zadanie 5.45. Niech $m \geqslant 1$. *Eksponentę* macierzy $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ definiujemy wzorem

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(1) Sprawdź, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. szeregi definiujące wyrazy macierzy $\exp A$ są zbieżne).

(2) Pokaż, że $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ spełniających $AB = BA$. Czy równość $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$ pozostaje prawdziwa bez założenia $AB = BA$?

(3) Oblicz $\exp A$ dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Zadanie 5.46. Niech $n \geqslant 1$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Udowodnij, że gdy $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$, to macierz $f(A) = \sum_{j=0}^{m} a_j A^j$ jest postaci

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-4)}(\lambda)}{(n-4)!} & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.47 (macierze Pauliego)**.** Niech

$$H = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) : A^h = A\}.$$

(1) Wykaż, że H jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ o bazie $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, gdzie

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) Sprawdź, że $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = I$.

(3) Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. *Antykomutator* macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ definiujemy formułą

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Uzasadnij, że $\{A, B\} \in H$ dla dowolnych $A, B \in H$.

(4) Udowodnij, że

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\sigma_c \qquad \text{oraz} \qquad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}I$$

dla dowolnych $1 \leqslant a, b \leqslant 3$, gdzie *symbol Levi-Civity* ε_{abc} definiujemy jako

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{smallmatrix}\right) & \text{gdy } \{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{gdy } \{a, b, c\} \neq \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

W szczególności $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}I + i\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\sigma_c$.

(5) Dowiedź, że:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\sigma_a &= 0, \\ \operatorname{tr}(\sigma_a\sigma_b) &= 2\delta_{ab}, \\ \operatorname{tr}(\sigma_a\sigma_b\sigma_c) &= 2i\varepsilon_{abc}, \\ \operatorname{tr}(\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d) &= 2(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \end{aligned}$$

dla dowolnych $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 3$.

Uwaga. Macierze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazywane są *macierzami Pauliego* i grają ważną rolę, między innymi, w fizyce kwantowej przy opisie zjawisk związanych ze spinem.

Zadanie 5.48 (iloczyn Kroneckera)**.** Niech K będzie ciałem oraz $p, q, r, s \geqslant 1$. *Iloczynem Kroneckera* macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$ oraz $B = [b_{kl}] \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$ nazywamy macierz $A \otimes B \in \mathrm{M}_{pr,qs}(K)$ daną w postaci blokowej

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}.$$

Niech $p, q, r, s, n, m \geqslant 1$. Wykaż, że:

(1) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ dla $A \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$ oraz $C \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$.

(2) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ dla $A \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$ oraz $B, C \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$.

(3) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ dla $A, B \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$ oraz $C \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$.

(4) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(B \otimes A) = (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B)$ dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$.

(5) $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = (\det A)^m (\det B)^n$ dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$.

(6) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ dla $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{m,r}(K)$ oraz $D \in \mathrm{M}_{q,s}(K)$. W szczególności gdy $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{GL}_m(K)$, to $A \otimes B \in \mathrm{GL}_{nm}(K)$ oraz $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

Zdefiniujmy *sumę Kroneckera* macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$ jako

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B.$$

Dowiedź, że gdy $K = \mathbb{C}$, to $\exp(A \oplus B) = (\exp A) \otimes (\exp B)$ (porównaj Zadanie 5.45).

Zadanie 5.49. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Załóżmy, że $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$.

(1) Wskaż przykład, w którym $A \otimes B \neq B \otimes A$.

(2) Udowodnij, że istnieje taka *macierz permutacyjna* $P \in \mathrm{GL}_{nm}(K)$ (tzn. macierz mająca w każdym wierszu i w każdej kolumnie dokładnie jeden niezerowy wyraz równy 1), że $B \otimes A = P(A \otimes B)P^{-1}$.

Zadanie 5.50. Niech $n \geqslant 1$. Mówimy, że $X \in \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ jest *R-macierzą*, gdy X spełnia *równanie Yanga–Baxtera*

$$(X \otimes I_n)(I_n \otimes X)(X \otimes I_n) = (I_n \otimes X)(X \otimes I_n)(I_n \otimes X).$$

(1) Uzasadnij, że gdy $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, to $X = A \otimes B \in \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ jest R-macierzą wtedy i tylko wtedy, gdy
$$A^2 \otimes BAB \otimes B = A \otimes ABA \otimes B^2.$$

(2) Pokaż, że gdy $E, F \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ są *komutującymi idempotentami* (tzn. $E^2 = E$, $F^2 = F$ oraz $EF = FE$), to $X = E \otimes F \in \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ jest R-macierzą.

(3) Sprawdź, że

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$$

jest R-macierzą. Czy $X = A \otimes B$ dla pewnych $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?

Uwaga. Problem klasyfikacji wszystkich R-macierzy, związany z tzw. teorio-zbiorowymi rozwiązaniami równania Yanga–Baxtera oraz dynamicznie rozwijającymi się wokół tego równania strukturami algebraicznymi, jest otwarty i znajduje się w obszarze intensywnie prowadzonych badań. Warto zajrzeć np. do artykułu A. Smoktunowicz, A. Smoktunowicz, *Set-theoretic solutions of the Yang–Baxter equation and new classes of R-matrices*, Linear Algebra Appl. **546** (2018), 86–114.

6 Odwzorowania liniowe

Zadanie 6.1. Niech $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ będzie podprzestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Znajdź taką podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{Q}^4$, że $(1,0,0,0) \in V$ oraz $\mathbb{Q}^4 = U \oplus V$.

Zadanie 6.2. Niech

$$U = \mathrm{Lin}((1,2,3,4),(4,3,2,1),(2,3,4,5)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Wyznacz takie podprzestrzenie $V, W \subseteq \mathbb{R}^4$, że $U \oplus V = V \oplus W = W \oplus U = \mathbb{R}^4$ lub udowodnij, iż takie podprzestrzenie nie istnieją.

Zadanie 6.3. Załóżmy, iż $U \neq 0$ jest taką podprzestrzenią przestrzeni wektorowej X, że istnieje dokładnie jedna podprzestrzeń $V \subseteq X$ spełniająca $X = U \oplus V$. Pokaż, że $U = X$.

Zadanie 6.4. Załóżmy, że $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną jednowymiarowych podprzestrzeni $\mathbb{R}^2$. Dowiedź, iż istnieje taka podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^2$, że $U_n \oplus V = \mathbb{R}^2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Czy zastępując ciało $\mathbb{R}$ ciałem $\mathbb{Q}$ teza pozostanie prawdziwa?

Zadanie 6.5. Niech $n \geqslant 1$ oraz K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$. Niech $V = \mathrm{M}_n(K)$. Wykaż, że $V = V_+ \oplus V_-$, gdzie $V_\pm = \{A \in V : A^t = \pm A\}$. Co w przypadku $\mathrm{char}\, K = 2$?

Zadanie 6.6. Niech $X \neq \varnothing$ oraz $V = \mathrm{Map}(X \times X, \mathbb{R})$. Powiemy, że funkcja $f \in V$ jest *symetryczna* (odpowiednio *antysymetryczna*), gdy $f(x,y) = f(y,x)$ (odpowiednio $f(x,y) = -f(y,x)$) dla dowolnych $x, y \in X$. Udowodnij, że $V = V_s \oplus V_a$, gdzie V_s (odpowiednio V_a) jest podprzestrzenią V złożoną z funkcji symetrycznych (odpowiednio antysymetrycznych).

Zadanie 6.7. Niech $U = C^\infty(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią *funkcji gładkich* (tzn. dowolnie wiele razy różniczkowalnych) z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, natomiast $V = \mathbb{R}[[x]]$ przestrzenią *szeregów formalnych* (przestrzeń V można utożsamiać z $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Uzasadnij, że *rozwinięcie w szereg MacLaurina* (tzn. *szereg Taylora* w zerze), czyli odwzorowanie $T\colon U \to V$ dane wzorem

$$T(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

jest liniowe. Czy T jest monomorfizmem? Jeśli nie to podaj stosowny przykład.

Uwaga. Okazuje się, że T jest epimorfizmem (jest to treść słynnego twierdzenia Borela).

Zadanie 6.8. Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$. Zdefiniujmy odwzorowania $X, D, I\colon V \to V$ wzorami

$$X(f)(x) = xf(x), \qquad D(f)(x) = f'(x), \qquad I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

dla $f \in V$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Czy X, D, I są liniowe? Sprawdź, że $D \circ X - X \circ D = \mathrm{id}_V$ oraz $D \circ I = \mathrm{id}_V$, ale $I \circ D \neq \mathrm{id}_V$. Czy potrafisz opisać funkcje $f \in V$ spełniające jedno z równań: $X(f) = D(f)$ lub $D(f) = I(f)$ lub $I(f) = X(f)$?

Zadanie 6.9. Czy istnieje takie odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^8 \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, że

$$\{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : \operatorname{rank} A = 2\} \subseteq \operatorname{Im} f?$$

Zadanie 6.10. Załóżmy, że U jest podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V. Czy jeśli $\dim U = n$ oraz $\dim V = 2n$ dla pewnego $n \geqslant 1$, to zawsze istnieje taki endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$, że $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = U$?

Zadanie 6.11. Załóżmy, że U, V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X. Czy jeśli $\dim U = \dim V$, to zawsze istnieje taki automorfizm $f \in \operatorname{Aut}(X)$, że $f(U) = V$?

Zadanie 6.12. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_n$ są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V nad ciałem K. Zbiór $V_1 \times \cdots \times V_n$ z działaniami

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n),$$
$$\lambda(v_1, \ldots, v_n) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$$

dla $u_1, v_1 \in V_1, \ldots, u_n, v_n \in V_n$ oraz $\lambda \in K$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K (sprawdź to) zwaną *produktem* przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) odwzorowanie $f\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to V$, zadane wzorem

$$f(v_1, \ldots, v_n) = v_1 + \cdots + v_n,$$

jest izomorfizmem.

(2) $V = V_1 + \cdots + V_n$ oraz $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$.

(3) $V = V_1 + \cdots + V_n = V$ oraz $(V_1 + \cdots + V_i) \cap V_{i+1} = 0$ dla dowolnego $1 \leqslant i < n$.

Uwaga. Gdy spełniony jest jeden (lub, równoważnie, wszystkie) z powyższych warunków, to mówimy, że V jest *sumą prostą* podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$ i piszemy $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Zadanie 6.13. Niech $n, m \geqslant 1$. Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_m$ oraz $Y_1, \ldots, Y_n$ są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Rozważmy przestrzeń wektorową

$$H = \begin{bmatrix} \operatorname{Hom}(X_1, Y_1) & \operatorname{Hom}(X_2, Y_1) & \cdots & \operatorname{Hom}(X_m, Y_1) \\ \operatorname{Hom}(X_1, Y_2) & \operatorname{Hom}(X_2, Y_2) & \cdots & \operatorname{Hom}(X_m, Y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Hom}(X_1, Y_n) & \operatorname{Hom}(X_2, Y_n) & \cdots & \operatorname{Hom}(X_m, Y_n) \end{bmatrix}$$

(elementy przestrzeni H traktujemy jako macierze postaci $[f_{ij}]$, gdzie $f_{ij} \in \operatorname{Hom}(X_j, Y_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j \leqslant m$) z naturalnymi działaniami (doprecyzuj znaczenie tego stwierdzenia). Zdefiniujmy $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ oraz $Y = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$. Niech ponadto $p_i \in \operatorname{Hom}(Y, Y_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $s_j \in \operatorname{Hom}(X_j, X)$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$ będą dane wzorami

$$p_i(y_1, \ldots, y_n) = y_i \qquad \text{oraz} \qquad s_j(x_j) = (0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0).$$

(1) Dowiedź, że odwzorowanie $\Phi\colon \operatorname{Hom}(X, Y) \to H$, dane wzorem $\Phi(f) = [f_{ij}]$, gdzie

$$f_{ij} = p_i \circ f \circ s_j \in \operatorname{Hom}(X_j, Y_i)$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j \leqslant m$, jest izomorfizmem.

(2) Utożsamiając elementy przestrzeni X oraz Y ze stosownymi macierzami o jednej kolumnie udowodnij, że gdy $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$, to

$$\Phi(f) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = f(x)$$

dla dowolnego $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ (wyjaśnij najpierw jak należy interpretować iloczyn macierzy po lewej stronie powyższej równości).

Zadanie 6.14. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{End}(V)$ spełniają $f_i \circ f_j = \delta_{ij} f_j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ oraz $f_1 + \cdots + f_n = \mathrm{id}_V$. Uzasadnij, że $V = \operatorname{Im} f_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} f_n$.

Zadanie 6.15. Przypuśćmy, że odwzorowania liniowe $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ oraz $g \in \operatorname{End}(V)$ spełniają $g \circ f = 0$ oraz $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_V - g) \subseteq \operatorname{Im} f$. Wykaż, że $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Zadanie 6.16. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Załóżmy, iż endomorfizmy $f, g \in \operatorname{End}(V)$ są *przemienne* (tzn. $f \circ g = g \circ f$) oraz, że $f - g$ jest monomorfizmem. Dowiedź, że $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

Zadanie 6.17. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla $f \in \operatorname{End}(V)$ oraz $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in K[x]$ zdefiniujmy $p(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j f^j \in \operatorname{End}(V)$. Uzasadnij, że gdy wielomiany $p, q \in K[x]$ są *względnie pierwsze* (tzn. gdy p oraz q nie mają wspólnego dzielnika w $K[x]$ dodatniego stopnia), to $\operatorname{Ker}(p(f) \circ q(f)) = \operatorname{Ker} p(f) \oplus \operatorname{Ker} q(f)$.

Zadanie 6.18 (lemat Fittinga)**.** Załóżmy, że X jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz $f \in \operatorname{End}(X)$.

(1) Dowiedź, iż istnieje takie $n \geqslant 0$, że $X = \operatorname{Ker} f^j \oplus \operatorname{Im} f^j$ dla dowolnego $j \geqslant n$. Sprawdź, że można przyjąć $n = \dim X$.

(2) Niech $N = \operatorname{Ker} f^n$ oraz $A = \operatorname{Im} f^n$, gdzie $n \geqslant 0$ jest takie, jak w punkcie (1). Udowodnij, że endomorfizm $f|_N \in \operatorname{End}(N)$ jest *nilpotentny* (tzn. $(f|_N)^k = 0$ dla pewnego $k \geqslant 1$), zaś $f|_A \in \operatorname{End}(A)$ jest automorfizmem.

(3) Przypuśćmy, że U, V są f-niezmienniczymi podprzestrzeniami X spełniającymi $X = U \oplus V$. Uzasadnij, że jeżeli endomorfizm $f|_U \in \operatorname{End}(U)$ jest nilpotentny, zaś $f|_V \in \operatorname{End}(V)$ jest automorfizmem, to $U = N$ oraz $V = A$.

Uwaga. Przypomnijmy, że podprzestrzeń $X_0 \subseteq X$ jest f-niezmiennicza, gdy $f(X_0) \subseteq X_0$.

Zadanie 6.19. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Pokaż, że gdy dla dowolnego $v \in V$ istnieje takie $j = j(v) \geqslant 0$, że $f^j(v) = 0$, to istnieje takie $n \geqslant 0$, że $f^n = 0$. Udowodnij, że można przyjąć $n = \dim V$. Czy teza pozostaje prawdziwa gdy wymiar przestrzeni V jest nieskończony?

Zadanie 6.20. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową. Dowiedź, że gdy $\dim V > 1$, to $f \circ g \neq g \circ f$ dla pewnych $f, g \in \operatorname{End}(V)$.

Zadanie 6.21. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Wykaż, że gdy $f_1, f_2 \in \operatorname{End}(V)$ oraz $f_1 \pm f_2 \in \operatorname{Aut}(V)$, to dla dowolnych $h_1, h_2 \in \operatorname{End}(V)$ istnieją takie $g_1, g_2 \in \operatorname{End}(V)$, że $h_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$ oraz $h_2 = g_1 \circ f_2 + g_2 \circ f_1$.

Zadanie 6.22. Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową. Udowodnij, że gdy $f \in \operatorname{End}(X)$, to istnieje takie $g \in \operatorname{End}(X)$, że $f = f \circ g \circ f$. Pokaż, że endomorfizm g można dobrać tak, by dodatkowo $g = g \circ f \circ g$.

Zadanie 6.23. Niech $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Udowodnij, że gdy $\dim U \geqslant \dim V$, to istnieje taki homomorfizm $g \in \operatorname{Hom}(V, U)$, że $g \circ f = 0$ oraz $\operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g = \dim V$.

Zadanie 6.24. Przypuśćmy, że $f_1 \in \operatorname{Hom}(X_1, Y_1)$ oraz $f_2 \in \operatorname{Hom}(X_2, Y_2)$. Uzasadnij, że $\operatorname{rank} f_1 \leqslant \operatorname{rank} f_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1 = h \circ f_2 \circ g$ dla pewnych $g \in \operatorname{Hom}(X_1, X_2)$ oraz $h \in \operatorname{Hom}(Y_2, Y_1)$.

Zadanie 6.25. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Podprzestrzeń $I \subseteq E = \operatorname{End}(V)$ nazywamy *ideałem*, gdy $p \circ f \circ q \in I$ dla dowolnych $f \in I$ oraz $p, q \in E$.

(1) Pokaż, że gdy $\dim V < \infty$, to $I = 0$ oraz $I = E$ są jedynymi ideałami w E.

(2) Przypuśćmy, że wymiar przestrzeni V jest nieskończony. Dowiedź, że zbiory

$$I_\kappa = \{f \in E : \operatorname{rank} f < \kappa\} \quad (\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \dim V)$$

są ideałami w E. Udowodnij ponadto, że gdy $0 \neq I \neq E$ jest ideałem w E, to $I = I_\kappa$ dla pewnej liczby kardynalnej $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \dim V$.

Uwaga. Punkt (1) oznacza, że gdy $\dim V = n < \infty$, to algebra $\operatorname{End}(V) \cong \mathrm{M}_n(K)$ jest *prosta*. Natomiast punkty (1) i (2) pokazują, iż ideały algebry $\operatorname{End}(V)$ tworzą *łańcuch*.

Zadanie 6.26. Załóżmy, że U, V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X. Pokaż, że:

(1) $(U + V)/V \cong U/(U \cap V)$.

(2) gdy $U \subseteq V$, to V/U jest podprzestrzenią X/U oraz $(X/U)/(V/U) \cong X/V$.

Zadanie 6.27. Załóżmy, że $(V_i)_{i \in I}$ jest rodziną przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Dowiedź, że:

(1) $\operatorname{Hom}(\bigoplus_{i \in I} V_i, X) \cong \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(V_i, X)$ dla dowolnej przestrzeni K-liniowej X.

(2) $\operatorname{Hom}(X, \prod_{i \in I} V_i) \cong \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}(X, V_i)$ dla dowolnej przestrzeni K-liniowej X.

Zadanie 6.28. Załóżmy, że U, V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Pokaż, że gdy $\dim W < \infty$, to $U \cong V \iff U \oplus W \cong V \oplus W$. Czy równoważność ta pozostanie prawdziwa gdy pominiemy założenie $\dim W < \infty$?

Zadanie 6.29. Udowodnij, że przestrzeń wektorowa $V \neq 0$ ma nieskończony wymiar wtedy i tylko wtedy, gdy $V \oplus V \cong V$.

Zadanie 6.30. Załóżmy, że U, V, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $p \in \operatorname{Hom}(U, V)$ oraz $f \in \operatorname{Hom}(U, W)$. Udowodnij, że gdy p jest epimorfizmem oraz $\operatorname{Ker} p \subseteq \operatorname{Ker} f$, to istnieje jedyny taki homomorfizm $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$, że $f = g \circ p$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\
V \arrow[rr, dashed, "g"'] & & W
\end{tikzcd}$$

Uwaga. W szczególności jeżeli $U_0 \subseteq U$ jest podprzestrzenią, $V = U/U_0$, zaś $p\colon U \to V$ jest *epimorfizmem kanonicznym* zdefiniowanym jako $p(u) = u + U_0$, to dla dowolnego $f \in \operatorname{Hom}(U, W)$ spełniającego $U_0 \subseteq \operatorname{Ker} f$ istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$, że $f = g \circ p$.

Zadanie 6.31. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K oraz $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Parę (U, j) złożoną z przestrzeni K-liniowej U oraz $j \in \operatorname{Hom}(U, X)$ nazywamy *jądrem* odwzorowania f, gdy $f \circ j = 0$ oraz dla dowolnego $k \in \operatorname{Hom}(V, X)$ spełniającego $f \circ k = 0$ istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie $g \in \operatorname{Hom}(V, U)$, że $k = j \circ g$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "j"] & & \\
 & X \arrow[r, "f"] & Y \\
V \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Uzasadnij, że:

(1) para (U, j), gdzie $U = \operatorname{Ker} f$ oraz $j \in \operatorname{Hom}(U, X)$ jest naturalnym zanurzeniem spełnia powyższe warunki.

(2) jeśli para (V, k) również spełnia powyższe warunki, to istnieje wtedy jedyny taki izomorfizm $g \in \operatorname{Hom}(V, U)$, że $k = j \circ g$.

Kojądro odwzorowania $f \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ definiujemy jako przestrzeń ilorazową

$$\operatorname{Coker} f = Y / \operatorname{Im} f.$$

Bazując na powyższym opisie jądra podaj analogiczny opis kojądra.

Zadanie 6.32. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$.

(1) Wykaż, że $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$.

(2) Wykaż, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$.

Zadanie 6.33. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

(2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

(3) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$.

(4) $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$.

Czy warunki (1)–(4) pozostaną równoważne bez założenia $\dim V < \infty$?

Zadanie 6.34. Podaj przykład takiej przestrzeni wektorowej V oraz $f \in \operatorname{End}(V)$, że V posiada tylko jedną *nietrywialną* (tzn. różną od 0 oraz V) podprzestrzeń f-niezmienniczą.

Zadanie 6.35. Niech $n \geqslant 1$ oraz

$$V_j = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_1 = \cdots = x_j = 0\} \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Opisz wszystkie automorfizmy $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ spełniające $f(V_j) \subseteq V_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$.

Zadanie 6.36. Niech X, Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Załóżmy, że U jest podprzestrzenią X, zaś V jest podprzestrzenią Y. Pokaż, że

$$H = \{f \in \mathrm{Hom}(X, Y) : f(U) \subseteq V\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Hom}(X, Y)$ i oblicz $\dim H$ zakładając, że znamy wymiary wszystkich czterech przestrzeni U, V oraz X, Y.

Zadanie 6.37. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim V = n \geqslant 2$ oraz przypuśćmy, iż dla endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ istnieje taki skalar $\lambda \in K$ i baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ przestrzeni V, że

$$f(e_i) = \begin{cases} \lambda e_1 & \text{gdy } i = 1, \\ \lambda e_i + e_{i-1} & \text{gdy } 1 < i \leqslant n. \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie podprzestrzenie f-niezmiennicze przestrzeni V.

Zadanie 6.38. Niech $n \geqslant 1$ oraz $X = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Rozważmy *operator różniczkowania* $D\colon X \to X$ zdefiniowany wzorem

$$D\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\Big) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}.$$

Wykaż, że gdy $X = U \oplus V$ dla pewnych D-niezmienniczych podprzestrzeni $U, V \subseteq X$, to $U = 0$ lub $V = 0$.

Zadanie 6.39. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że istnieje endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ spełniający $f \circ f = -\mathrm{id}_V$.

(1) Wykaż, że $\dim V$ jest liczbą parzystą.

(2) Udowodnij, iż istnieje taka baza B przestrzeni V, że macierz $M_B(f)$ ma postać blokowo-diagonalną $M_B(f) = \mathrm{diag}(J, \ldots, J)$, gdzie

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.40. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Niech $\dim V = n \geqslant 2$ oraz przypuśćmy, że $f \in \mathrm{End}(V)$ spełnia $f^n = 0$, ale $f^{n-1} \neq 0$. Dowiedź, iż istnieje taka baza B przestrzeni V, że

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje taki endomorfizm $g \in \mathrm{End}(V)$, że $f = g \circ g$?

Zadanie 6.41. Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Wykaż, że:

(1) gdy $\dim V = 6$ oraz $\operatorname{Im} f^6 = V$, to $\operatorname{Im} f^3 = V$.

(2) gdy $\dim V = 7$ oraz $\operatorname{Ker} f^{14} = V$, to $\operatorname{Ker} f^7 = V$.

(3) gdy $\dim V = 8$ oraz $\operatorname{Im} f^{i+1} \neq \operatorname{Im} f^i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 4$, to $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant 4$.

(4) gdy $f^3 = f$, to $V = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2$.

Zadanie 6.42. Rozważmy odwzorowanie $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4).$$

(1) Wyznacz wymiar przestrzeni $E = \{u \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4) : f \circ u = 0\}$.

(2) Podaj przykład takiego odwzorowania $u \in E$, że $\operatorname{rank} u = 2$.

Zadanie 6.43. Załóżmy, że $n \geqslant 0$ oraz $V = \{f \in \mathbb{C}[x] : \deg f \leqslant 2n+1\}$. Zdefiniujmy endomorfizm $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ określając go na bazie $\{x^j : 0 \leqslant j \leqslant 2n+1\}$ przestrzeni V wzorem

$$\Phi(x^j) = (-1)^j x^{\lfloor j/2 \rfloor} = \begin{cases} x^k & \text{gdy } j = 2k, \\ -x^k & \text{gdy } j = 2k+1 \end{cases} \qquad (0 \leqslant j \leqslant 2n+1).$$

Wyznacz bazy i wymiary przestrzeni $\operatorname{Ker} \Phi$ oraz $\operatorname{Im} \Phi$.

Zadanie 6.44. Podaj przykład endomorfizmu $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ spełniającego:

$$(1,1,2) \in \operatorname{Im} f, \qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Lin}((-1,2,1)), \qquad f^3 = f \circ f \circ f = 0.$$

Zadanie 6.45. Załóżmy, że U, V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Niech $f, g \in \operatorname{Hom}(U, V)$ i przypuśćmy, że dla dowolnego wektora $u \in U$ istnieje taki skalar $\lambda(u) \in K$, że $f(u) = \lambda(u) g(u)$. Wykaż, że istnieje wtedy taki skalar $\lambda \in K$, że $f = \lambda g$.

Zadanie 6.46. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Dowiedź, że gdy endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ jest przemienny z dowolnym rzutem w $\operatorname{End}(V)$, to f jest *homotetią* (tzn. $f = \lambda \operatorname{id}_V$ dla pewnego $\lambda \in K$).

Zadanie 6.47. Niech

$$A = \{(3,1,1), (1,0,0), (5,1,0)\}, \qquad B = \{(3,4,5), (4,1,1), (2,0,1)\}.$$

(1) Wyznacz macierz $M_{AB}(f)$ odwzorowania $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ danego wzorem

$$f(x,y,z) = (4x + y + z, 3x + 2y + z, 3x + 2y + z).$$

(2) Podaj wzór endomorfizmu $g \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ o macierzy

$$M_{AB}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.48. Załóżmy, że homomorfizmy $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ oraz $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ spełniają

$$M_{\mathrm{st}\,\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad M_{AB}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$A = \{(1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}, \qquad B = \{(1,-1), (1,0)\}.$$

Podaj wzór odwzorowania liniowego $g \circ f$.

Zadanie 6.49. Niech

$$\begin{aligned} A &= \{(1,-2,0), (1,1,1), (0,0,-1)\}, \\ B &= \{(1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,1,1)\}, \\ C &= \{(1,1), (-1,0)\}. \end{aligned}$$

Odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ dane jest wzorem

$$f(x,y,z) = (3x - y - 2z, x + y + z, -x + 2z, x + 2y - z),$$

zaś $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ wyznaczone jest warunkiem

$$M_{BC}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oblicz $M_{AC}(g \circ f)$ oraz $M_{\mathrm{st}\,\mathrm{st}}(g \circ f)$.

Zadanie 6.50. Niech $V = \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}), \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

Czy odwzorowanie $f\colon V \to V$, dane wzorem $f(X) = AX + XB$, jest liniowe? Jeśli tak, to wyznacz macierz $M_E(f)$ w bazie $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, gdzie $E_{ij} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$ jest macierzą, której (i,j)-ty wyraz równy jest 1, zaś pozostałe wyrazy równe są 0.

Zadanie 6.51. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierze $M_1, M_2 \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ spełniają $\operatorname{rank} M_1 = \operatorname{rank} M_2$.

(1) Wykaż, iż istnieje takie odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$, bazy A_1, A_2 przestrzeni K^m oraz bazy B_1, B_2 przestrzeni K^n, że $M_{A_1B_1}(f) = M_1$ oraz $M_{A_2B_2}(f) = M_2$.

(2) Czy zawsze istnieje takie odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$, baza A przestrzeni K^m oraz bazy B_1, B_2 przestrzeni K^n, że $M_{AB_1}(f) = M_1$ oraz $M_{AB_2}(f) = M_2$?

Zadanie 6.52. Rozważmy odwzorowanie $\mathbb{R}$-linowe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wyznaczone przez macierz

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

gdzie $B = \{1, i\}$ jest bazą kanoniczną $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

(1) Pokaż, że $f(z) = pz + q\overline{z}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{C}$. Jakie relacje zachodzą pomiędzy liczbami p, q oraz a, b, c, d?

(2) Jakie warunki muszą spełniać liczby p, q (lub a, b, c, d), aby odwzorowanie f było $\mathbb{C}$-liniowe?

Zadanie 6.53. Rozważmy kwaterniony $\mathbb{H}$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Niech $0 \neq q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$. Zdefiniujmy $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}(\mathbb{H})$ wzorami

$$f_1(x) = qx, \qquad f_2(x) = xq^{-1}, \qquad f_3(x) = qxq^{-1}.$$

Wyznacz macierze endomorfizmów f_1, f_2, f_3 w bazie kanonicznej $B = \{1, i, j, k\}$.

Zadanie 6.54. Niech $K = \mathbb{F}_{13}$. Załóżmy, że odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(K^4, K^3)$ jest dane za pomocą macierzy

$$M_{\mathrm{st}\,\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{Lin}((1,1,1,1), (4,0,-1,1), (3,2,1,1)) \subseteq K^4, \\ V &= \mathrm{Lin}((1,0,0), (3,1,1), (0,2,2)) \subseteq K^3. \end{aligned}$$

Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $f(U)$ oraz $f^{-1}(V)$.

Zadanie 6.55. Wyznacz bazy jądra i obrazu endomorfizmu $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y + 2z, 2x + 3y + z).$$

Zadanie 6.56. Wyznacz bazy i wymiary jądra oraz obrazu endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ zadanego macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.57. Niech $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,0)\}$ oraz

$$M = \begin{bmatrix} i & 2 & 3 \\ 1 & -i & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

Znajdź bazy jąder i obrazów dla $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ spełniających

$$M_{\mathrm{st}\,B}(f) = M^h \qquad \text{oraz} \qquad M_{B\,\mathrm{st}}(g) = M.$$

Zadanie 6.58. Niech $f\colon \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ będzie odwzorowaniem liniowym danym jako

$$f(X) = AX - XA, \qquad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

(1) Wyznacz macierz $M_B(f)$ endomorfizmu f w bazie $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, której elementami są jedynki macierzowe.

(2) Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\operatorname{Ker} f$ oraz $\operatorname{Im} f$.

Zadanie 6.59. Załóżmy, że $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ oraz $g \in \operatorname{Hom}(V, U)$. Udowodnij, że:

(1) jeśli $g \circ f = \mathrm{id}_U$, to $f \circ g$ jest rzutem.

(2) jeśli $g \circ f$ jest rzutem, to $(f \circ g)^2$ jest rzutem.

(3) gdy $U = V = \mathbb{R}^2$, to podaj przykład takich homomorfizmów f, g, że $g \circ f$ jest rzutem, ale $f \circ g$ nie jest rzutem.

Zadanie 6.60. Niech $X = \{f \in \mathbb{C}[x] : \deg f \leqslant 3\}$ oraz $U = \{f \in X : f(0) = f'(0) = 0\}$.

(1) Znajdź taką podprzestrzeń $V \subseteq X$, że $X = U \oplus V$.

(2) Wyznacz wzór opisujący rzut $p \in \operatorname{End}(X)$ na U wzdłuż V.

(3) Wyznacz wzór opisujący symetrię $s \in \operatorname{End}(X)$ względem U wzdłuż V.

Zadanie 6.61. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Zdefiniujmy $V_\pm = \{A \in V : A^h = \pm A\}$.

(1) Sprawdź, że $V = V_+ \oplus V_-$. Podaj bazy przestrzeni $V_\pm$.

(2) Opisz rzut $p \in \operatorname{End}(V)$ na V_+ wzdłuż V_-.

(3) Opisz symetrię $s \in \operatorname{End}(V)$ względem V_- wzdłuż V_+.

Zadanie 6.62. Niech $U = \operatorname{Lin}((1, i, 1), (2, 1 - i, 0)) \subseteq \mathbb{C}^3$.

(1) Znajdź taką podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{C}^3$, że $\mathbb{C}^3 = U \oplus V$.

(2) Wyznacz macierz rzutu p na U wzdłuż V w bazach standardowych.

(3) Wyznacz macierz symetrii s względem U wzdłuż V w bazach standardowych.

Zadanie 6.63. Niech $n \geqslant 1$. Pokaż, że gdy $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ jest rzutem, to $\operatorname{rank} f = \operatorname{tr} f$.

Zadanie 6.64. Przypuśćmy, że $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5)$ spełnia $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Lin}((1, 2, 3, 4))$. Znajdź takie homomorfizmy $u, v \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, że $u \neq v$ oraz $f \circ u = f \circ v$.

Zadanie 6.65. Niech $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$ będzie dane wzorem

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 4z, x + 3y + 7z, -x + y + az, 2x + 2y + 2z).$$

(1) Dla jakich $a \in \mathbb{C}$ odwzorowanie f jest monomorfizmem?

(2) Czy istnieje takie $a \in \mathbb{C}$, że f jest epimorfizmem?

Zadanie 6.66. Niech $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) f jest monomorfizmem.

(2) istnieje takie $r \in \operatorname{Hom}(V, U)$, że $r \circ f = \mathrm{id}_U$.

(3) jeśli $f \circ u = 0$ dla pewnego $u \in \operatorname{Hom}(X, U)$, to $u = 0$.

(4) jeśli $f \circ u = f \circ v$ dla pewnych $u, v \in \operatorname{Hom}(X, U)$, to $u = v$.

Sformułuj i udowodnij równoważność analogicznych warunków dotyczących epimorfizmu.

Zadanie 6.67. Niech $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) odwzorowanie f jest epimorfizmem.

(2) istnieją takie homomorfizmy $u_1, u_2 \in \mathrm{Hom}(X, U)$, że $f \circ u_1 = f \circ u_2$ oraz dla dowolnego $g \in \mathrm{Hom}(U, W)$ spełniającego $g \circ u_1 = g \circ u_2$ istnieje dokładnie jeden taki homomorfizm $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$, że $g = h \circ f$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & & V \arrow[dd, dashed, "h"] \\ X \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & U \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

(3) dla dowolnych homomorfizmów $u \in \mathrm{Hom}(U, X)$, $v \in \mathrm{Hom}(V, Y)$ i monomorfizmu $g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, jeśli $v \circ f = g \circ u$, to istnieje taki homomorfizm $h \in \mathrm{Hom}(V, X)$, że $u = h \circ f$ oraz $v = g \circ h$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(4) dla dowolnych homomorfizmów $p \in \mathrm{Hom}(U, X)$ oraz $u \in \mathrm{Hom}(X, V)$ z faktu, że u jest monomorfizmem oraz $f = u \circ p$ wynika, że u jest izomorfizmem.

Uwaga. Epimorfizm $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ spełniający (2), (3) lub (4) nazywamy, odpowiednio, *regularnym*, *silnym* lub *ekstremalnym*. Zadanie to pokazuje, że w kategorii przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem) pojęcia te są równoważne. Nie jest tak jednak w innych kategoriach (np. w kategorii grup).

Zadanie 6.68. Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

jest *krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych* nad ciałem K; co oznacza, że f jest monomorfizmem, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ oraz g jest epimorfizmem.

(1) Dowiedź, że $\dim V = \dim U + \dim W$.

(2) Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś odwzorowanie $f_*\colon \mathrm{Hom}(X, U) \to \mathrm{Hom}(X, V)$ zdefiniujemy jako $f_*(u) = f \circ u$ dla $u \in \mathrm{Hom}(X, U)$ (analogicznie definiujemy g_*), to ciąg indukowany

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, U) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, V) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X, W) \longrightarrow 0$$

jest dokładny.

(3) Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś odwzorowanie $f^*\colon \operatorname{Hom}(V,X) \to \operatorname{Hom}(U,X)$ zdefiniujemy jako $f^*(v) = v \circ f$ dla $v \in \operatorname{Hom}(V,X)$ (analogicznie definiujemy g^*), to ciąg indukowany

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(W,X) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(V,X) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(U,X) \longrightarrow 0$$

jest dokładny.

Uwaga. Dokładność ciągów indukowanych z punktów (2) oraz (3) wiąże się z pojęciami, odpowiednio, *projektywności* oraz *injektywności*. Zadanie to pokazuje, że każda przestrzeń wektorowa X jest jednocześnie tzw. projektywnym i injektywnym K-modułem. Nie jest tak w innych kategoriach modułów (np. w kategorii grup abelowych).

Zadanie 6.69. Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni liniowych. Dowiedź, że następujące warunki są równoważne:

(1) istnieje takie $r \in \operatorname{Hom}(V,U)$, że $r \circ f = \mathrm{id}_U$.

(2) istnieje takie $s \in \operatorname{Hom}(W,V)$, że $g \circ s = \mathrm{id}_W$.

(3) istnieją takie $r \in \operatorname{Hom}(V,U)$ oraz $s \in \operatorname{Hom}(W,V)$, że $r \circ f = \mathrm{id}_U$, $g \circ s = \mathrm{id}_W$, $r \circ s = 0$ oraz $f \circ r + s \circ g = \mathrm{id}_V$.

(4) istnieje taki izomorfizm $h \in \operatorname{Hom}(V, U \oplus W)$, że diagram o dokładnych wierszach

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "h"] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & U \oplus W \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

jest przemienny (nieoznaczone odwzorowania w dolnym wierszu, to kanoniczne zanurzenie i rzutowanie).

Uwaga. Gdy ciąg dokładny spełnia powyższe warunki, to mówimy, że *rozszczepia się*. Zatem w kategorii przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem) każdy ciąg dokładny rozszczepia się (nie jest tak np. w kategorii grup abelowych). Ponadto powyższe warunki nie są równoważne w innych kategoriach (np. w kategorii grup).

Zadanie 6.70. Niech $n \geqslant 2$. Mówimy, że ciąg odwzorowań liniowych postaci

$$0 \longrightarrow V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} V_n \longrightarrow 0$$

jest *dokładny*, gdy f_1 jest monomorfizmem, $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ dla $1 \leqslant i < n$ oraz f_n jest epimorfizmem. Pokaż, że gdy powyższy ciąg jest dokładny, zaś przestrzenie $V_0, \ldots, V_n$ są skończonego wymiaru, to $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.

Zadanie 6.71. Załóżmy, że U, V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X. Wykaż, że istnieje krótki ciąg dokładny postaci

$$0 \longrightarrow X/(U \cap V) \longrightarrow (X/U) \oplus (X/V) \longrightarrow X/(U+V) \longrightarrow 0$$

i wywnioskuj stąd, że $\operatorname{codim} U + \operatorname{codim} V = \operatorname{codim}(U \cap V) + \operatorname{codim}(U+V)$.

Zadanie 6.72. Załóżmy, że w diagramie

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_1 \arrow[r, "f_1"] & V \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, equal] & W_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_2 \arrow[r, "f_2"] & V \arrow[r, "g_2"] & W_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wiersze są krótkimi ciągami dokładnymi przestrzeni liniowych nad ciałem K. Pokaż, że:

(1) $\operatorname{Ker}(g_2 \circ f_1) \cong \operatorname{Ker}(g_1 \circ f_2)$.

(2) $\operatorname{Coker}(g_2 \circ f_1) \cong \operatorname{Coker}(g_1 \circ f_2)$.

Zadanie 6.73 (lemat o wężu)**.** Przypuśćmy, że w diagramie przemiennym

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & U_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "h_1"] & V_2 \arrow[r, "h_2"] & V_3 &
\end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi przestrzeni liniowych nad ciałem K. Udowodnij, że istnieje ciąg dokładny

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g_1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_1 \arrow[r, "\overline{g}_1"] & \operatorname{Ker} f_2 \arrow[r, "\overline{g}_2"] & \operatorname{Ker} f_3 \arrow[dlll, rounded corners] & \\
 & \operatorname{Coker} f_1 \arrow[r, "\overline{h}_1"] & \operatorname{Coker} f_2 \arrow[r, "\overline{h}_2"] & \operatorname{Coker} f_3 \arrow[r] & \operatorname{Coker} h_2 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

w którym homomorfizmy $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \overline{h}_1, \overline{h}_2$ są indukowane przez, odpowiednio, g_1, g_2, h_1, h_2 (wyjaśnij precyzyjnie co to znaczy). Czym są nienazwane odwzorowania z powyższego ciągu dokładnego?

Zadanie 6.74. Załóżmy, że $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ oraz $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(1) Dowiedź, że istnieje ciąg dokładny postaci

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] & \operatorname{Ker}(g \circ f) \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[dll, rounded corners] & \\
 & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & \operatorname{Coker}(g \circ f) \arrow[r] & \operatorname{Coker} g \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Wyjaśnij precyzyjnie czym są nieopisane odwzorowania w powyższym ciągu.

(2) Wywnioskuj z punktu (1), że $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$. Sformułuj i wykaż podobną nierówność dla wymiarów kojąder.

(3) Wykorzystując punkt (2) udowodnij, że $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank}(AB) + n$ dla dowolnych macierzy $A \in \mathrm{M}_{p,n}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{n,q}(K)$ nad ciałem K.

Zadanie 6.75 (lemat piątkowy)**.** Załóżmy, że w diagramie przemiennym odwzorowań liniowych

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & U_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & U_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & U_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & U_5 \arrow[d, "f_5"] \\
V_1 \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & V_3 \arrow[r] & V_4 \arrow[r] & V_5
\end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi. Wykaż, że:

(1) gdy f_2 oraz f_4 są monomorfizmami, natomiast f_1 jest epimorfizmem, to f_3 jest monomorfizmem.

(2) gdy f_2 oraz f_4 są epimorfizmami, natomiast f_5 jest monomorfizmem, to f_3 jest epimorfizmem.

(3) gdy f_2 oraz f_4 są izomorfizmami, f_1 jest epimorfizmem, zaś f_5 jest monomorfizmem (w szczególności gdy wszystkie odwzorowania f_1, f_2, f_4, f_5 są izomorfizmami), to f_3 jest izomorfizmem.

Zadanie 6.76 (3×3 lemat/lemat dziewiątkowy)**.** Załóżmy, że w diagramie przemiennym odwzorowań liniowych

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U_1 \arrow[r] \arrow[d] & U_2 \arrow[r] \arrow[d] & U_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & W_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

kolumny są krótkimi ciągami dokładnymi. Dowiedź, że:

(1) gdy pierwszy i drugi wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi, to trzeci wiersz także.

(2) gdy drugi i trzeci wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi, to pierwszy wiersz także.

(3) gdy pierwszy i trzeci wiersz są krótkimi ciągami dokładnymi oraz $g \circ f = 0$, to drugi wiersz jest również krótkim ciągiem dokładnym.

Zadanie 6.77. Mówimy, że nieskończony ciąg C odwzorowań liniowych postaci

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

jest *kompleksem łańcuchowym*, gdy $d_n \circ d_{n+1} = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Jeśli zdefiniujemy

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_n(C) &= \operatorname{Im} d_{n+1} \quad &&(\text{przestrzeń } n\text{-tych } \textit{brzegów} \text{ kompleksu } C), \\ \mathrm{Z}_n(C) &= \operatorname{Ker} d_n &&(\text{przestrzeń } n\text{-tych } \textit{cykli} \text{ kompleksu } C), \end{aligned}$$

to $\mathrm{B}_n(C) \subseteq \mathrm{Z}_n(C)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ (sprawdź to). Inkluzja ta pozwala zdefiniować przestrzeń n-tych *homologii* kompleksu C jako przestrzeń ilorazową

$$\mathrm{H}_n(C) = \mathrm{Z}_n(C)/\,\mathrm{B}_n(C).$$

Mówimy, że rodzina odwzorowań liniowych $f = (f_n\colon C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest *morfizmem kompleksów łańcuchowych* C oraz D (piszemy wtedy $f\colon C \to D$), gdy diagram

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Jeśli wszystkie odwzorowania $f_n\colon C_n \to D_n$ dla $n \in \mathbb{Z}$ są izomorfizmami, to mówimy, że f jest izomorfizmem kompleksów łańcuchowych, a kompleksy C oraz D nazywamy izomorficznymi (i piszemy $C \cong D$).

(1) Załóżmy, że dany jest ciąg par przestrzeni wektorowych $(B_n, H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Zdefiniujmy

$$Z_n = B_n \oplus H_n \qquad \text{oraz} \qquad C_n = Z_n \oplus B_{n-1}$$

dla $n \in \mathbb{Z}$. Niech ponadto homomorfizm $d_{n+1} \in \operatorname{Hom}(C_{n+1}, C_n)$ dany będzie jako złożenie odwzorowań

$$C_{n+1} = Z_{n+1} \oplus B_n \longrightarrow B_n \longrightarrow B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1} = Z_n \oplus B_{n-1} = C_n,$$

gdzie pierwsze odwzorowanie jest naturalnym rzutowaniem, natomiast drugie jest naturalnym zanurzeniem. Sprawdź, że otrzymany w ten sposób ciąg

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

jest kompleksem łańcuchowym. Następnie wyznacz przestrzenie brzegów, cykli oraz homologii tego kompleksu.

(2) Udowodnij, że dowolny kompleks łańcuchowy C jest izomorficzny z kompleksem łańcuchowym o postaci opisanej w punkcie (1).

Zadanie 6.78. Załóżmy, że $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$ są morfizmami kompleksów łańcuchowych. Mówimy, że

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

jest *krótkim ciągiem dokładnym kompleksów łańcuchowych*, gdy w diagramie (wiemy, że jest on przemienny)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

wszystkie kolumny są krótkimi ciągami dokładnymi. Używając lematu o wężu wykaż, że krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

kompleksów łańcuchowych indukuje tzw. *długi ciąg dokładny homologii*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(A) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(B) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(C) \arrow[dll, rounded corners] & \\
 & \mathrm{H}_n(A) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(B) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(C) \arrow[dll, rounded corners] & \\
 & \mathrm{H}_{n-1}(A) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(B) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(C) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Zadanie 6.79. Załóżmy, że dla kompleksu łańcuchowego C postaci

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

ciąg $(\dim \mathrm{H}_n(C))_{n\in\mathbb{Z}}$ posiada tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów i wyrazy te są skończone. W takiej sytuacji mówimy, że dla kompleksu C istnieje *charakterystyka Eulera–Poincarégo* i definiujemy ją wzorem

$$\chi(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim \mathrm{H}_n(C).$$

(1) Udowodnij, że gdy dla kompleksu łańcuchowego C ciąg $(\dim C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ posiada tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów i wyrazy te są skończone, to dla C istnieje charakterystyka Eulera–Poincarégo oraz $\chi(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n \dim C_n$.

(2) Wykaż, że gdy

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

jest krótkim ciągiem dokładnym kompleksów łańcuchowych i dla A, B, C istnieje charakterystyka Eulera–Poincarégo, to $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$.

Zadanie 6.80. Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ spełnia $\dim \mathrm{Ker}\, f < \infty$ oraz $\dim \mathrm{Coker}\, f < \infty$, to *indeks* odwzorowania f definiujemy wzorem

$$\mathrm{ind}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f - \dim \mathrm{Coker}\, f.$$

(1) Dowiedź, że gdy $\dim U < \infty$ oraz $\dim V < \infty$, to $\mathrm{ind}\, f = \dim U - \dim V$.

(2) Dla każdej liczby $n \in \mathbb{Z}$ podaj przykład takiej przestrzeni V oraz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, że $\mathrm{ind}\, f = n$.

Zadanie 6.81. Załóżmy, że przestrzeń wektorowa V jest skończonego wymiaru. Wykaż, że każdy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ da się zapisać jako $f = p \circ j$, gdzie $j \in \mathrm{Aut}(V)$, zaś $p \in \mathrm{End}(V)$ jest rzutem. Czy teza pozostanie prawdziwa jeżeli zrezygnujemy z założenia $\dim V < \infty$?

Zadanie 6.82. Niech $V = \mathbb{C}^3$. Uzasadnij, że gdy $f \in \mathrm{End}(V)$, to istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że odwzorowanie $f - n\,\mathrm{id}_V$ jest izomorfizmem. Czy któreś z odwzorowań $f - k\,\mathrm{id}_V$ dla $1 \leqslant k \leqslant 4$ musi być izomorfizmem?

Zadanie 6.83. Mówimy, że $(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, gdy dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n = n(m) \in \mathbb{N}$, że $|x_p - x_q| \leqslant \frac{1}{m}$ dla wszystkich $p, q \geqslant n$. Niech

$$X = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{Q}^\mathbb{N} : (x_n)_{n=1}^\infty \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}.$$

(1) Sprawdź, że X jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(2) Udowodnij, że odwzorowanie $f\colon X \to \mathbb{R}$, dane wzorem $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$, jest dobrze określone i liniowe ($\mathbb{R}$ traktujemy jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$). Wyznacz jego jądro oraz obraz.

(3) Wykorzystując odwzorowanie f z punktu (2) wykaż, że przestrzenie $X/\mathrm{Ker}\, f$ oraz $\mathbb{R}$ są izomorficzne nad $\mathbb{Q}$.

Uwaga. Powyższy izomorfizm jest jedną z metod konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja ta pochodzi od G. Cantora oraz C. Méraya.

Zadanie 6.84. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Mówimy, że odwzorowanie $\varphi\colon U \times V \to W$ jest *dwuliniowe*, gdy odwzorowania $\varphi(u, -)\colon V \to W$ oraz $\varphi(-, v)\colon U \to W$ są liniowe dla dowolnych $u \in U$ oraz $v \in V$. Powiemy, że para (T, τ) jest *iloczynem tensorowym* przestrzeni U, V, gdy T jest przestrzenią liniową nad ciałem K, odwzorowanie $\tau\colon U \times V \to T$ jest dwuliniowe i dla dowolnego odwzorowania dwuliniowego $\varphi\colon U \times V \to W$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f\colon T \to W$ spełniające $\varphi = f \circ \tau$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & U \times V \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "f"'] & & W \end{tikzcd}$$

(1) Niech F będzie przestrzenią liniową nad K o bazie $U \times V$ (elementami przestrzeni F są formalne kombinacje liniowe postaci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u_i, v_i)$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, $u_1, \ldots, u_n \in U$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz $n \geqslant 1$). Rozważmy podprzestrzeń N w F rozpiętą przez wszystkie wektory postaci:

$$\begin{aligned} &(u + u', v) - (u, v) - (u', v), \qquad &&(\lambda u, v) - \lambda(u, v), \\ &(u, v + v') - (u, v) - (u, v'), \qquad &&(u, \lambda v) - \lambda(u, v), \end{aligned}$$

gdzie $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ oraz $\lambda \in K$. Niech $T = F/N$ będzie przestrzenią ilorazową, zaś $\tau\colon U \times V \to T$ będzie złożeniem odwzorowań kanonicznych

$$U \times V \longrightarrow F \longrightarrow F/N = T$$

(pierwsze odwzorowanie jest naturalnym zanurzeniem bazy $U \times V$ przestrzeni F w tę przestrzeń, natomiast drugie odwzorowanie jest naturalną projekcją). Wykaż, że para (T, τ) jest iloczynem tensorowym przestrzeni U, V.

(2) Udowodnij, że gdy para (S, σ) również jest iloczynem tensorowym przestrzeni U, V, to istnieje jedyny taki izomorfizm $f \in \mathrm{Hom}(T, S)$, że $\sigma = f \circ \tau$.

Uwaga. Skonstruowaną przestrzeń T oznaczamy przez $U \otimes V$. Jej elementy nazywamy *tensorami*, natomiast elementy zbioru $\tau(U \times V)$ nazywamy *tensorami prostymi*. Jeśli $(u, v) \in U \times V$, to tensor prosty $\tau(u, v)$ oznaczamy przez $u \otimes v$.

Zadanie 6.85. Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykaż, że:

(1) $K \otimes V \cong V$.

(2) $U \otimes V \cong V \otimes U$.

(3) $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$.

(4) $\mathrm{Hom}(U, V; W) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$, gdzie $\mathrm{Hom}(U, V; W)$ oznacza przestrzeń odwzorowań dwuliniowych z $U \times V$ w W.

Uwaga. Pierwszy izomorfizm z punktu (4) pozwala sprowadzić problem opisu odwzorowań dwuliniowych z $U \times V$ w W do opisu odwzorowań liniowych z $U \otimes V$ w W. Natomiast drugi izomorfizm oznacza (w języku teorii kategorii), że funktor iloczynu tensorowego $- \otimes V$ jest lewym funktorem sprzężonym funktora homomorfizmów $\mathrm{Hom}(V, -)$.

Zadanie 6.86. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Sprawdź, że:

(1) $K^n \otimes K^m \cong \mathrm{M}_{n,m}(K)$.

(2) $K[x] \otimes K[y] \cong K[x, y]$.

Wskaż jawnie powyższe izomorfizmy i wyznacz ich działanie na bazach kanonicznych rozważanych przestrzeni.

Zadanie 6.87. Niech $(U_i)_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Dowiedź, że $(\bigoplus_{i\in I} U_i) \otimes V \cong \bigoplus_{i\in I}(U_i \otimes V)$ dla dowolnej przestrzeni liniowej V nad K. W szczególności gdy $U = \bigoplus_{i\in I} U_i$ oraz $V = \bigoplus_{j\in J} V_j$, to $U \otimes V \cong \bigoplus_{(i,j)\in I\times J}(U_i \otimes V_j)$.

Zadanie 6.88. Niech U, V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Udowodnij, że gdy $\{u_i : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni U, zaś $\{v_j : j \in J\}$ jest bazą przestrzeni V, to zbiór

$$\{u_i \otimes v_j : (i, j) \in I \times J\}$$

jest bazą przestrzeni $U \otimes V$. W szczególności $\dim(U \otimes V) = (\dim U)(\dim V)$.

Zadanie 6.89. Załóżmy, że $f_1 \in \mathrm{Hom}(U_1, V_1)$ oraz $f_2 \in \mathrm{Hom}(U_2, V_2)$.

(1) Udowodnij, że odwzorowanie

$$U_1 \times U_2 \ni (u_1, u_2) \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \in V_1 \otimes V_2$$

jest dwuliniowe. Następnie wykorzystując definicję iloczynu tensorowego wykaż, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$, które na każdym tensorze prostym $u_1 \otimes u_2 \in U_1 \otimes U_2$ przyjmuje wartość $f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$. Tak otrzymane odwzorowanie liniowe oznaczamy przez $f_1 \otimes f_2$ (patrz Uwaga).

(2) Korzystając z punktu (1) otrzymujemy odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}(U_1, V_1) \times \mathrm{Hom}(U_2, V_2) \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 \otimes f_2 \in \mathrm{Hom}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2).$$

Uzasadnij, iż jest ono dwuliniowe oraz, że indukuje odwzorowanie liniowe

$$j\colon \mathrm{Hom}(U_1, V_1) \otimes \mathrm{Hom}(U_2, V_2) \to \mathrm{Hom}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2),$$

które jest injektywne.

(3) Dowiedź, że gdy przestrzenie U_1, U_2 oraz V_1, V_2 są skończonego wymiaru, to wtedy odwzorowanie $j\colon \mathrm{Hom}(U_1, V_1) \otimes \mathrm{Hom}(U_2, V_2) \to \mathrm{Hom}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ z punktu (2) jest izomorfizmem.

Uwaga. Symbol $f_1 \otimes f_2$ w punkcie (1) jest niejednoznaczny, gdyż może oznaczać zarówno tensor prosty w przestrzeni $\mathrm{Hom}(U_1, V_1) \otimes \mathrm{Hom}(U_2, V_2)$, a także odwzorowanie liniowe $U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$, czyli element przestrzeni $\mathrm{Hom}(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2)$ (tej interpretacji symbolu $f_1 \otimes f_2$ użyliśmy w punktach (1) oraz (2)). Punkt (2) natomiast oznacza, że ta drobna kolizja oznaczeń nie prowadzi do kłopotów (dzięki injektywności odwzorowania j).

Zadanie 6.90. Załóżmy, że U_1, U_2 oraz V_1, V_2 są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $f_1 \in \mathrm{Hom}(U_1, V_1)$ oraz $f_2 \in \mathrm{Hom}(U_2, V_2)$. Przypuśćmy, że:

$$A_1 = \{u_1^1, \ldots, u_p^1\} \text{ jest bazą } U_1, \qquad B_1 = \{v_1^1, \ldots, v_r^1\} \text{ jest bazą } V_1,$$
$$A_2 = \{u_1^2, \ldots, u_q^2\} \text{ jest bazą } U_2, \qquad B_2 = \{v_1^2, \ldots, v_s^2\} \text{ jest bazą } V_2.$$

Niech ponadto

$$A = \{u_i^1 \otimes u_j^2 : 1 \leqslant i \leqslant p \text{ oraz } 1 \leqslant j \leqslant q\},$$
$$B = \{v_k^1 \otimes v_l^2 : 1 \leqslant k \leqslant r \text{ oraz } 1 \leqslant l \leqslant s\}.$$

Sprawdź, że gdy $M_{A_1B_1}(f_1) = M_1$ oraz $M_{A_2B_2}(f_2) = M_2$, to $M_{AB}(f_1 \otimes f_2) = M_1 \otimes M_2$, gdzie $M_1 \otimes M_2$ oznacza iloczyn Kroneckera macierzy M_1 oraz M_2.

Zadanie 6.91. Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Udowodnij, że gdy X jest przestrzenią K-liniową, to ciągi indukowane

$$0 \longrightarrow X \otimes U \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes f} X \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes g} X \otimes W \longrightarrow 0$$

oraz

$$0 \longrightarrow U \otimes X \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_X} V \otimes X \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_X} W \otimes X \longrightarrow 0$$

są dokładne.

Uwaga. Dokładność powyższych ciągów indukowanych wiąże się z pojęciem *płaskości.* Zadanie to pokazuje, że każda przestrzeń wektorowa X jest tzw. płaskim K-modułem. Nie jest tak w innych kategoriach modułów. Przykładowo nie każda grupa abelowa, czyli $\mathbb{Z}$-moduł, jest płaska (np. grupa $\mathbb{Z}_n$ nie jest płaska dla dowolnego $n \geqslant 2$).

Zadanie 6.92. Niech $V \neq 0$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Gdy $\dim V = n < \infty$ oraz $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to wiemy, że $B = \{e_i \otimes e_j : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ jest bazą przestrzeni $V \otimes V$. Zatem każdy tensor $t \in V \otimes V$ zapisuje się (jednoznacznie) jako

$$t = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} e_i \otimes e_j,$$

gdzie $t_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (są to *współrzędne tensora t w bazie B*). Czy jeśli:

(1) $t_{ij} = i \cdot j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

(2) $t_{ij} = \delta_{ij}$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

(3) $t_{ij} = i + j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

to tensor t jest prosty?

Zadanie 6.93. Niech $U, V \neq 0$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. *Rzędem* tensora $0 \neq t \in U \otimes V$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{rank} t = \min\{n \geqslant 1 : t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \text{ dla pewnych } u_i \in U \text{ oraz } v_i \in V\},$$

tzn. $\operatorname{rank} t$ jest najmniejszą taką liczbą $n \geqslant 1$, że tensor t da się zapisać jako suma n tensorów prostych. Gdy $t = 0 \in U \otimes V$, to kładziemy $\operatorname{rank} t = 0$.

(1) Niech $0 \neq t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in U \otimes V$. Udowodnij, że $\operatorname{rank} t = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $u_1, \ldots, u_n \in U$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$ są liniowo niezależne.

(2) Wykorzystując punkt (1) dowiedź, że odwzorowanie $j \colon U^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(U, V)$, zadane na tensorach prostych wzorem $j(\phi \otimes v)(u) = \phi(u)v$ dla $u \in U$, $v \in V$ oraz $\phi \in U^*$, jest poprawnie określone, liniowe i injektywne.

(3) Wykaż, że obrazem odwzorowania $j \colon U^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(U, V)$ z punktu (2) jest podprzestrzeń $H = \{f \in \operatorname{Hom}(U, V) : \operatorname{rank} f < \infty\}$.

(4) Wywnioskuj z punktów (2) oraz (3), że jeżeli $\dim U < \infty$ lub $\dim V < \infty$, to odwzorowanie $j \colon U^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(U, V)$ jest izomorfizmem. W szczególności gdy przestrzeń $U = V$ jest skończonego wymiaru, to $V^* \otimes V \cong \operatorname{End}(V)$. Jakiemu tensorowi $t \in V^* \otimes V$ odpowiada w tej sytuacji odwzorowanie $\mathrm{id}_V \in \operatorname{End}(V)$?

(5) Załóżmy, że $k \colon U \otimes V \to \operatorname{Hom}(U^*, V)$ jest złożeniem monomorfizmów

$$U \otimes V \longrightarrow U^{**} \otimes V \longrightarrow \operatorname{Hom}(U^*, V)$$

(pierwszy z nich jest indukowany przez kanoniczne zanurzenie U w U^{**}, zaś drugi został opisany w punkcie (2)), tzn. mamy $k(u \otimes v)(\phi) = \phi(u)v$ dla $u \in U$, $v \in V$ oraz $\phi \in U^*$. Wykaż, że gdy $t = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \in U \otimes V$ oraz $n = \operatorname{rank} t$, to $\operatorname{Im} k(t) = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$. Wywnioskuj stąd, że $\operatorname{rank} t = \operatorname{rank} k(t)$.

Zadanie 6.94. Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Mówimy, że odwzorowanie dwuliniowe $\varphi \colon U \times U \to V$ jest *antysymetryczne* (lub *skośnie symetryczne* lub *alternujące*) gdy $\varphi(u, u) = 0$ dla dowolnego $u \in U$ (gdy $\operatorname{char} K \neq 2$, to definicja ta jest równoważna z żądaniem, aby $\varphi(u_1, u_2) = -\varphi(u_2, u_1)$ dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$; sprawdź to). Rozważmy iloczyn tensorowy $U \otimes U$ oraz jego podprzestrzeń N rozpiętą przez zbiór $\{u \otimes u : u \in U\}$. Niech $\Lambda^2 U = (U \otimes U)/N$, zaś $\tau \colon U \times U \to \Lambda^2 U$ będzie złożeniem odwzorowań kanonicznych

$$U \times U \longrightarrow U \otimes U \longrightarrow (U \otimes U)/N = \Lambda^2 U.$$

(1) Sprawdź, że para $(\Lambda^2 U, \tau)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnego odwzorowania dwuliniowego antysymetrycznego $\varphi \colon U \times U \to V$ istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie liniowe $f \colon \Lambda^2 U \to V$, że $\varphi = f \circ \tau$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & U \times U \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \Lambda^2 U \arrow[rr, dashed, "f"'] & & V \end{tikzcd}$$

(2) Niech $\operatorname{Hom}_a^2(U, V)$ oznacza przestrzeń odwzorowań dwuliniowych alternujących z $U \times U$ w V. Wykaż, że $\operatorname{Hom}_a^2(U, V) \cong \operatorname{Hom}(\Lambda^2 U, V)$.

(3) Udowodnij, że gdy $\dim U = n < \infty$ oraz zbiór $\{u_1, \ldots, u_n\}$ jest bazą przestrzeni U, to zbiór

$$\{u_i \wedge u_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

jest bazą przestrzeni $\Lambda^2 U$. W szczególności $\dim \Lambda^2 U = \frac{n(n-1)}{2}$.

Uwaga. Elementy przestrzeni $\Lambda^2 U$ nazywamy czasami 2-*wektorami*, natomiast elementy zbioru $\tau(U \times U)$ nazywamy 2-*wektorami prostymi*. Jeśli $(u, v) \in U \times U$, to 2-wektor prosty $\tau(u, v)$ oznaczamy przez $u \wedge v$. Izomorfizm z punktu (2) sprowadza problem opisu odwzorowań dwuliniowych alternujących z $U \times U$ w V do opisu odwzorowań liniowych z $\Lambda^2 U$ w V. Para $(\Lambda^2 U, \tau)$ (lub czasem sama przestrzeń $\Lambda^2 U$) jest nazywana (drugą) *potęgą zewnętrzną* przestrzeni U. Czy wzorując się na poprzednich zadaniach potrafisz podać definicję odwzorowania dwuliniowego symetrycznego $U \times U \to V$ i skonstruować (drugą) *potęgę symetryczną* przestrzeni U?

Zadanie 6.95. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Zdefiniujmy *operator symetryzacji* $S \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ oraz *operator antysymetryzacji* $A \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ wzorami

$$S(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1), \qquad A(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1)$$

dla $v_1, v_2 \in V$ (uzasadnij, że definicja jest poprawna). Mówimy, że tensor $t \in V \otimes V$ jest *symetryczny* (odpowiednio *antysymetryczny*) gdy $S(t) = t$ (odpowiednio $A(t) = t$). Pokaż, że:

(1) $S + A = \mathrm{id}_{V \otimes V}$ oraz $S \circ A = A \circ S = 0$.

(2) operatory S oraz A są *idempotentne*, tzn. $S \circ S = S$ oraz $A \circ A = A$.

(3) $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Im}\, A$ oraz $\mathrm{Im}\, S = \mathrm{Ker}\, A$. Wywnioskuj stąd, że tensor $t \in V \otimes V$ jest symetryczny (odpowiednio antysymetryczny) wtedy i tylko wtedy, gdy $A(t) = 0$ (odpowiednio $S(t) = 0$).

(4) $\Lambda^2 V \cong \mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Im}\, A$.

Uwaga. Punkt (3) powyższego zadania gwarantuje, że gdy $\mathrm{char}\, K \neq 2$, to druga potęga zewnętrzna $\Lambda^2 V$ przestrzeni V może być identyfikowana z podprzestrzenią $\mathrm{Ker}\, S = \mathrm{Im}\, A$ przestrzeni $V \otimes V$ złożoną z tensorów antysymetrycznych.

Zadanie 6.96. Załóżmy, że U, V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$.

(1) Udowodnij, że odwzorowanie

$$U \times U \ni (u_1, u_2) \mapsto f(u_1) \wedge f(u_2) \in \Lambda^2 V$$

jest dwuliniowe alternujące. Następnie wykorzystując definicję potęgi zewnętrznej wykaż, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\Lambda^2 U \to \Lambda^2 V$, które na dowolnym 2-wektorze prostym $u_1 \wedge u_2 \in \Lambda^2 U$ przyjmuje wartość $f(u_1) \wedge f(u_2)$. Tak uzyskane odwzorowanie liniowe oznaczamy przez $\Lambda^2 f$.

(2) Niech $\dim U = m < \infty$ oraz $\dim V = n < \infty$. Załóżmy, że $A = \{u_1, \ldots, u_m\}$ jest bazą przestrzeni U, zaś $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Załóżmy też, że $M = M_{AB}(f) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$. Niech

$$\Lambda^2(k) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant k\} \quad (k \geqslant 1)$$

i zdefiniujmy

$$E = \{u_{j_1} \wedge u_{j_2} : (j_1, j_2) \in \Lambda^2(m)\}, \qquad F = \{v_{i_1} \wedge v_{i_2} : (i_1, i_2) \in \Lambda^2(n)\}$$

(jak wiemy są to bazy przestrzeni, odpowiednio, $\Lambda^2 U$ oraz $\Lambda^2 V$). Jeśli $M = [a_{ij}]$, to dla dowolnych $I = (i_1, i_2) \in \Lambda^2(n)$ oraz $J = (j_1, j_2) \in \Lambda^2(m)$ niech

$$M_{IJ} = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(K).$$

Wykaż, że $M_{EF}(\Lambda^2 f) = [\det M_{IJ}] \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$, gdzie $p = \frac{n(n-1)}{2}$ oraz $q = \frac{m(m-1)}{2}$.

Zadanie 6.97. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{End}(V)$. Przypuśćmy, że $\dim V = n < \infty$. Udowodnij, że gdy B jest bazą przestrzeni V oraz $M = M_B(f) = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$, to

$$\mathrm{tr}(\Lambda^2 f) = \sum_{I \in \Lambda^2(n)} \det M_{II} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} a_{ji}).$$

Zadanie 6.98. Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych. Dowiedź, że wtedy $\Lambda^2 f$ jest monomorfizmem, $(\Lambda^2 g) \circ (\Lambda^2 f) = 0$ oraz $\Lambda^2 g$ jest epimorfizmem. Czy ciąg indukowany

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 U \xrightarrow{\Lambda^2 f} \Lambda^2 V \xrightarrow{\Lambda^2 g} \Lambda^2 W \longrightarrow 0$$

jest zawsze dokładny?

Zadanie 6.99. Załóżmy, że U oraz V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Udowodnij, że

$$\Lambda^2(U \oplus V) \cong \Lambda^2 U \oplus (U \otimes V) \oplus \Lambda^2 V.$$

Zadanie 6.100. Niech $V \neq 0$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K. *Rzędem* 2-wektora $0 \neq \omega \in \Lambda^2 V$ nazywamy liczbę

$$\mathrm{rank}\, \omega = \min\{n \geqslant 1 : \omega = \sum_{i=1}^{n} u_i \wedge v_i \text{ dla pewnych } u_i, v_i \in V\},$$

tzn. $\mathrm{rank}\, \omega$ jest najmniejszą taką liczbą $n \geqslant 1$, że 2-wektor ω da się zapisać jako suma n 2-wektorów prostych. Gdy $\omega = 0 \in \Lambda^2 V$, to kładziemy $\mathrm{rank}\, \omega = 0$.

(1) Załóżmy, że $0 \neq \omega = \sum_{i=1}^{n} u_i \wedge v_i \in \Lambda^2 V$. Udowodnij, że gdy $\mathrm{rank}\, \omega = n$, to ciągi $u_1, \ldots, u_n \in V$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$ są liniowo niezależne. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

(2) Załóżmy, że $\mathrm{char}\, K \neq 2$ oraz $\dim V = n < \infty$. Przypuśćmy, że $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Zapiszmy 2-wektor $\omega \in \Lambda^2 V$ jako $\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} e_i \wedge e_j$, gdzie macierz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ jest *antysymetryczna* (tzn. spełnia $A^t = -A$). Dowiedź, że $\mathrm{rank}\, A = 2\, \mathrm{rank}\, \omega$.

7 Funkcjonały i przestrzeń dualna

Zadanie 7.1. Niech K będzie ciałem oraz $V = K[x]$. Powiemy, że funkcjonał $\phi \in V^*$ jest *multiplikatywny* gdy $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ dla dowolnych $f, g \in V$.

(1) Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in K$ odwzorowanie $\phi_a \colon V \to K$, dane wzorem $\phi_a(f) = f(a)$, jest funkcjonałem multiplikatywnym.

(2) Udowodnij, że każdy funkcjonał multiplikatywny $0 \neq \phi \in V^*$ jest takiej postaci jak w punkcie (1), tzn. $\phi = \phi_a$ dla pewnego $a \in K$.

Zadanie 7.2. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Dla funkcjonału $f \colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ rozważmy następujące warunki:

(1) $f(AB) = f(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$.

(2) $f(A) = 0$ dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ spełniającej $A^2 = 0$.

Wykaż, że gdy f spełnia warunek (1) lub (2), to istnieje taki skalar $\lambda \in K$, że $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.

Zadanie 7.3. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Udowodnij, że gdy $f \colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ jest funkcjonałem, to istnieje taka macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$, że $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$ dla dowolnej macierzy $X \in \mathrm{M}_n(K)$. Czy macierz A jest wyznaczona jednoznacznie?

Zadanie 7.4. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że podprzestrzeń $V \subseteq \mathrm{M}_n(K)$ spełnia $\operatorname{codim} V = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \{X \in \mathrm{M}_n(K) : \mathrm{tr}(AX) = 0\}$ dla pewnej macierzy $0 \neq A \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 7.5. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że funkcja ciągła $f \colon V \to \mathbb{R}$ spełnia $f(0) = 0$ oraz $2f(u + v) = f(2u) + f(2v)$ dla dowolnych $u, v \in V$. Dowiedź, że $f \in V^*$.

Zadanie 7.6. Niech V będzie przestrzenią liniową. Uzasadnij, że przestrzeń dualna V^* *rozdziela punkty* przestrzeni V, tzn. dla dowolnych $u, v \in V$ spełniających $u \neq v$ istnieje taki funkcjonał $f \in V^*$, że $f(u) \neq f(v)$.

Zadanie 7.7. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $0 \neq f \in V^*$. Sprawdź, że $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Lin}(v)$ dla dowolnego $v \in V \setminus \operatorname{Ker} f$.

Zadanie 7.8. Niech X będzie przestrzenią liniową. Uzasadnij, że właściwa podprzestrzeń $U \subseteq X$ jest maksymalna (względem inkluzji) wtedy i tylko wtedy, gdy $U = \operatorname{Ker} f$ dla pewnego funkcjonału $0 \neq f \in X^*$.

Zadanie 7.9. Niech K będzie ciałem oraz $1 \leqslant d \leqslant n$. Uzasadnij, że każda d-wymiarowa podprzestrzeń V w K^n da się przedstawić jako przecięcie dokładnie $n - d$ podprzestrzeni kowymiaru 1. Czy możliwe jest by przedstawić podprzestrzeń V jako przecięcie mniej niż $n - d$ podprzestrzeni kowymiaru 1?

Zadanie 7.10. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przypuśćmy, że funkcjonały $f, g \in V^*$ spełniają $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Pokaż, że $g = \lambda f$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$.

Zadanie 7.11. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $f, g \in V^*$. Uzasadnij, że gdy $f(v)g(v) = 0$ dla dowolnego $v \in V$, to $f = 0$ lub $g = 0$. Czy wynik ten można uogólnić na więcej niż dwa funkcjonały?

Zadanie 7.12. Niech $V \neq 0$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Udowodnij, że gdy $\dim V = n < \infty$, to funkcjonały $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_n = 0$.

Zadanie 7.13. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $f \in V^*$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. Dowiedź, że $f \in \operatorname{Lin}(f_1, \ldots, f_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_n \subseteq \operatorname{Ker} f$.

Zadanie 7.14. Załóżmy, że X jest przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że:

(1) wektory $v_1, \ldots, v_n \in X$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie funkcjonały $f_1, \ldots, f_n \in X^*$, że macierz $[f_i(v_j)] \in \mathrm{M}_n(K)$ jest nieosobliwa.

(2) funkcjonały $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wektory $v_1, \ldots, v_n \in X$, że macierz $[f_i(v_j)] \in \mathrm{M}_n(K)$ jest nieosobliwa.

Zadanie 7.15. Niech $V = \mathbb{F}_p^3$. Zdefiniujmy funkcjonały $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ wzorem

$$f_1(x, y, z) = x + y + 4z, \qquad f_2(x, y, z) = 4x + y, \qquad f_3(x, y, z) = 2x + y + z.$$

Dla jakich $p \in \mathbb{P}$ zbiór $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq V^*$ jest liniowo niezależny?

Zadanie 7.16. Załóżmy, że $X \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $n \geqslant 1$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Zdefiniujmy $U = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$ i przypuśćmy, że $W \subseteq X$ jest podprzestrzenią zawierającą U.

(1) Czy zawsze istnieje taki podzbiór $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, że $W = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i$?

(2) Uzasadnij, że gdy $W \neq X$, to istnieją takie, nie wszystkie równe zeru, skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, że funkcjonał $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in X^*$ spełnia $f(W) = 0$.

Zadanie 7.17. Załóżmy, że V jest rzeczywistą przestrzenią wektorową. Zdefiniujmy w zbiorze $V^{\mathbb{C}} = V \times V$ działania

$$\begin{aligned}(v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w'),\\ (a + ib) \cdot (v, w) &= (av - bw, bv + aw),\end{aligned}$$

gdzie $v, w, v', w' \in V$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Pokaż, że trójka $(V^{\mathbb{C}}, +, \cdot\,)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$.

(2) Udowodnij, że $V^{\mathbb{C}} \cong V \otimes \mathbb{C}$ oraz $(V^{\mathbb{C}})^* \cong (V^*)^{\mathbb{C}}$.

Uwaga. Przestrzeń zespoloną $V^{\mathbb{C}}$ nazywamy *kompleksyfikacją* przestrzeni rzeczywistej V. Parę $(v, w) \in V^{\mathbb{C}}$ można identyfikować z wyrażeniem formalnym postaci $v + iw$. Przy takiej identyfikacji iloczyn $(a + ib) \cdot (v + iw)$ przyjmuje łatwą do zapamiętania postać

$$(a + ib) \cdot (v + iw) = (av - bw) + i(bv + aw).$$

Zadanie 7.18. Załóżmy, że $U, V \neq 0$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Pokaż, że:

(1) $(U \oplus V)^* \cong U^* \oplus V^*$.

(2) gdy $\dim U < \infty$ oraz $\dim V < \infty$, to $(U \otimes V)^* \cong U^* \otimes V^*$.

(3) gdy $\dim V < \infty$, to $(\Lambda^2 V)^* \cong \Lambda^2 V^*$.

Czy jeśli przestrzeń U lub V jest nieskończonego wymiaru, to tezy punktów (2) oraz (3) pozostają prawdziwe?

Zadanie 7.19. Załóżmy, że $B = \{e_i : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Zdefiniujmy rodzinę funkcjonałów $B^* = \{e_i^* : i \in I\} \subseteq V^*$ przyjmując, że $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ dla $i, j \in I$.

(1) Sprawdź, że zbiór B^* jest liniowo niezależny; w szczególności $\dim V \leqslant \dim V^*$.

(2) Udowodnij, że zbiór B^* rozpina V^* wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V < \infty$.

Zadanie 7.20. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Wykaż, że gdy wymiar przestrzeni V jest nieskończony, to przestrzenie V oraz V^* nie są izomorficzne.

Uwaga. Gdy $|K| = \kappa$ oraz $\dim V = \alpha \geqslant \aleph_0$, to można dowieść, że $\dim V^* = |V^*| = \kappa^\alpha$. Skoro $\kappa \geqslant 2$, to w szczególności dostajemy $\dim V = \alpha < 2^\alpha \leqslant \kappa^\alpha = \dim V^*$.

Zadanie 7.21. Czy każda przestrzeń liniowa jest izomorficzna z przestrzenią dualną do pewnej przestrzeni wektorowej?

Zadanie 7.22. Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi. Sprawdź, że gdy choć jedna z przestrzeni U, V jest skończonego wymiaru, to $U^* \cong V^* \implies U \cong V$. Czy implikacja ta pozostaje prawdziwa gdy obie przestrzenie U, V są nieskończonego wymiaru?

Zadanie 7.23. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $V = K[x]$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi_a \colon V \to K$ dla $a \in K$ wzorem $\phi_a(f) = f(a)$. Uzasadnij, że $\{\phi_a : a \in K\}$ jest liniowo niezależnym podzbiorem przestrzeni dualnej V^*.

Zadanie 7.24. Niech $S \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem. Rozważmy przestrzeń liniową $V = \mathcal{P}(S)$ nad ciałem $\mathbb{F}_2$ z działaniami

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \cdot A = \begin{cases} \varnothing & \text{gdy } \lambda = 0, \\ A & \text{gdy } \lambda = 1. \end{cases}$$

Dla $s \in S$ zdefiniujmy odwzorowanie $f_s \colon V \to \mathbb{F}_2$ wzorem

$$f_s(X) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } s \in X, \\ 0 & \text{gdy } s \notin X. \end{cases}$$

(1) Uzasadnij, że odwzorowania f_s dla $s \in S$ są funkcjonałami.

(2) Sprawdź, że zbiór $B = \{f_s : s \in S\} \subseteq V^*$ jest liniowo niezależny.

(3) Pokaż, że B jest bazą przestrzeni V^* wtedy i tylko wtedy, gdy $|S| < \infty$.

Zadanie 7.25. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Znajdź bazę przestrzeni V^* sprzężoną względem bazy

$$B = \{(1,2,2),(2,5,5),(1,3,4)\}.$$

Podaj współrzędne funkcjonału $f \in V^*$, zdefiniowanego wzorem

$$f(x,y,z) = 3x - y + z,$$

w znalezionej bazie.

Zadanie 7.26. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $e_1, \dots, e_n \in V$ są wektorami bazy standardowej. Zdefiniujmy wektory

$$v_i = e_1 + \dots + e_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Sprawdź, że $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą przestrzeni V oraz opisz bazę przestrzeni V^* dualną względem bazy B.

Zadanie 7.27. Załóżmy, że $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest bazą standardową przestrzeni $V = \mathbb{Q}^3$. Niech

$$f = 5e_1^* - 3e_2^* + e_3^* \in V^*.$$

Wyznacz wzór na f i podaj współrzędne tego funkcjonału w bazie $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$, gdzie $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$ oraz $v_3 = (0,1,1)$.

Zadanie 7.28. Niech $1 \leqslant n \leqslant m$ oraz $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant m\}$. Dowiedź, że gdy $\phi \in V^*$, to następujące warunki są równoważne:

(1) $\phi(x^n f) = 0$ dla dowolnego $f \in V$ spełniającego $\deg f \leqslant m - n$.

(2) istnieją takie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, że $\phi(f) = \sum_{i=1}^n a_i f^{(i-1)}(0)$ dla dowolnego $f \in V$.

Zadanie 7.29. Niech $V = \mathbb{C}^3$. Sprawdź, że funkcjonały $f_1, f_2, f_3 \in V^*$, określone jako

$$f_1(x,y,z) = x + iy, \qquad f_2(x,y,z) = x - iy, \qquad f_3(x,y,z) = iz,$$

tworzą bazę przestrzeni V^* i skonstruuj taką bazę $\{v_1, v_2, v_3\}$ przestrzeni V, aby $v_j^* = f_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant 3$.

Zadanie 7.30. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Uzasadnij, że funkcjonały $f_1, f_2, f_3 \in V^*$, zdefiniowane wzorami

$$f_1(x,y,z) = 5x - 2y, \qquad f_2(x,y,z) = -x - z, \qquad f_3(x,y,z) = -x + y + z,$$

stanowią bazę przestrzeni V^*. Następnie znajdź taką bazę $\{v_1, v_2, v_3\}$ przestrzeni V, aby $v_j^* = f_1 + \dots + f_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant 3$.

Zadanie 7.31. Niech $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$. Dowiedź, że funkcjonały $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V^*$, określone wzorami

$$\begin{aligned} f_1(A) &= a_{11} - a_{12}, & f_2(A) &= a_{12} + 2a_{22}, \\ f_3(A) &= a_{12} - a_{21}, & f_4(A) &= a_{21} + 3a_{22} \end{aligned}$$

dla $A = [a_{ij}] \in V$, tworzą bazę przestrzeni V^* i skonstruuj taką bazę $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ przestrzeni V, aby $E_j^* = f_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Zadanie 7.32. Niech $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant 2\}$. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{R}$ spełniają $a \neq b$. Zdefiniujmy

$$f_j(x) = (x-a)^j (x-b)^{2-j} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2).$$

Przyjmijmy $c = \frac{a+b}{2}$ oraz określmy funkcjonały $\phi_a, \phi_b, \phi_c \in V^*$ formułą

$$\phi_a(f) = f(a), \qquad \phi_b(f) = f(b), \qquad \phi_c(f) = f(c).$$

(1) Pokaż, że zbiory $\{f_0, f_1, f_2\}$ oraz $\{\phi_a, \phi_b, \phi_c\}$ są bazami przestrzeni, odpowiednio, V oraz V^*.

(2) Wyznacz macierz przejścia pomiędzy bazami $\{f_0^*, f_1^*, f_2^*\}$ oraz $\{\phi_a, \phi_b, \phi_c\}$.

Zadanie 7.33. Niech

$$X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{F}_5^{\mathbb{N}} : x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n \text{ dla } n \geqslant 1\}.$$

Zdefiniujmy odwzorowania $f_1, f_2, f_3 \colon X \to \mathbb{F}_5$ wzorami $f_i(x) = x_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$, gdzie $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$. Uzasadnij, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3\}$ jest bazą przestrzeni X^* i wyznacz bazę $\{e_1, e_2, e_3\}$ przestrzeni X spełniającą $e_i^* = f_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Zadanie 7.34. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Ustalmy liczby rzeczywiste $x_0 < \cdots < x_n$ i rozważmy funkcjonały $\phi_0, \ldots, \phi_n \in V^*$ zadane jako

$$\phi_j(f) = f(x_j) \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Czy zbiór $B = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ jest bazą przestrzeni V^*? Jeśli tak, to wyznacz współrzędne funkcjonału $\phi \in V^*$, danego wzorem $\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$, w bazie B.

Zadanie 7.35. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Wybierzmy liczbę $a \in \mathbb{R}$ i zdefiniujmy funkcjonały $\phi_0, \ldots, \phi_n \in V^*$ formułą

$$\phi_j(f) = f^{(j)}(a) \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Pokaż, że zbiór $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ jest bazą przestrzeni V^* i wyznacz taką bazę $\{f_0, \ldots, f_n\}$ przestrzeni V, aby $f_j^* = \phi_j$ dla $0 \leqslant j \leqslant n$.

Zadanie 7.36. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Określmy funkcjonały $\phi_0, \ldots, \phi_n \in V^*$ wzorem

$$\phi_j(f) = \int_0^1 f(x+j)dx \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Czy $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ jest bazą przestrzeni V^*? Jeśli tak, to wyznacz taką bazę $\{f_0, \ldots, f_n\}$ przestrzeni V, aby $f_j^* = \phi_j$ dla $0 \leqslant j \leqslant n$.

Zadanie 7.37. Załóżmy, że $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest bazę standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, natomiast $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ jest bazą do niej dualną. Czy istnieje taka baza $\{v_1, v_2, v_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $e_1^* = v_1^* + 2v_2^* - 3v_3^*$? Czy taka baza, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie?

Zadanie 7.38. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $\{u_0, \ldots, u_n\}$ oraz $\{v_0, \ldots, v_n\}$ są bazami przestrzeni $V = K^{n+1}$. Wykaż, że gdy $u_0 = v_0$, to $u_0^* = v_0^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

Zadanie 7.39. Niech $X = l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ będzie *przestrzenią ciągów sumowalnych z kwadratem* (z naturalnymi działaniami). Dowiedź, że:

(1) gdy $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, to funkcja $f_x \colon X \to \mathbb{R}$, dana wzorem $f_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ dla $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, jest dobrze określona i liniowa (czyli $f_x \in X^*$).

(2) odwzorowanie $f \colon X \to X^*$, zdefiniowane jako $f(x) = f_x$ dla $x \in X$, jest liniowe oraz injektywne (czyli jest monomorfizmem).

Czy odwzorowanie f jest epimorfizmem? Jeśli nie, to wskaż przykład funkcjonału z X^*, który nie leży w obrazie $\operatorname{Im} f$ odwzorowania f.

Uwaga. Zdefiniujmy *normę* wektora $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ wzorem

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Mówimy, że funkcjonał $\phi \in X^*$ jest *ciągły*, jeżeli istnieje taka liczba $C = C(\phi) \geqslant 0$, że $|\phi(x)| \leqslant C\|x\|$ dla dowolnego $x \in X$. Słynne twierdzenie Riesza orzeka, że $\operatorname{Im} f$ to dokładnie podprzestrzeń X^* złożona z funkcjonałów ciągłych.

Zadanie 7.40. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową. Dla dowolnych podprzestrzeni $U \subseteq V$ oraz $H \subseteq V^*$ definiujemy

$$U^{\perp} = \{\phi \in V^* : \phi(u) = 0 \text{ dla dowolnego } u \in U\},$$
$$H_{\perp} = \{v \in V : \phi(v) = 0 \text{ dla dowolnego } \phi \in H\}.$$

Udowodnij, że:

(1) $U^{\perp}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V^* oraz $(U^{\perp})_{\perp} = U$.

(2) $H_{\perp}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz $(H_{\perp})^{\perp} \supseteq H$.

Przypuśćmy, że $(U_i)_{i \in I}$ jest rodziną podprzestrzeni przestrzeni V, zaś $(H_i)_{i \in I}$ jest rodziną podprzestrzeni przestrzeni V^*. Wykaż, że:

(3) $(\sum_{i \in I} U_i)^{\perp} = \bigcap_{i \in I} U_i^{\perp}$.

(4) $(\bigcap_{i \in I} U_i)^{\perp} \supseteq \sum_{i \in I} U_i^{\perp}$.

(5) $(\sum_{i \in I} H_i)_{\perp} = \bigcap_{i \in I} H_{i\perp}$.

(6) $(\bigcap_{i \in I} H_i)_{\perp} \supseteq \sum_{i \in I} H_{i\perp}$.

(7) gdy $\dim V < \infty$, to $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim H + \dim H_{\perp} = \dim V$.

Dowiedź, że gdy $\dim V < \infty$, to inkluzje w punktach (2), (4) oraz (6) można zastąpić równościami. Czy jest prawdą, że można zrobić to zawsze?

Uwaga. Niech $\operatorname{Lat}(V)$ (odpowiednio $\operatorname{Lat}(V^*)$) oznacza rodzinę wszystkich podprzestrzeni V (odpowiednio V^*). Gdy $\dim V < \infty$, to powyższe zadanie gwarantuje, że odwzorowania

$$\operatorname{Lat}(V) \ni U \mapsto U^{\perp} \in \operatorname{Lat}(V^*) \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{Lat}(V^*) \ni H \mapsto H_{\perp} \in \operatorname{Lat}(V)$$

są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami (a nawet *antyizomorfizmami krat*).

Zadanie 7.41. Niech
$$V = \mathrm{Lin}((1,2,0,-3),(-2,3,2,-3),(-3,1,2,0)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$
Opisz przestrzeń $V^\perp$ równaniami i wyznacz jej bazę oraz wymiar.

Zadanie 7.42. Niech
$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + 2x_2 - ix_3 + x_4 = 0\},$$
$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 - ix_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$
Wyznacz bazy i wymiary przestrzeni $U^\perp$, $V^\perp$ oraz $U^\perp + V^\perp$. Następnie podaj przykład, o ile istnieje, funkcjonału $f \in (U^\perp + V^\perp) \setminus (U^\perp \cup V^\perp)$.

Zadanie 7.43. Przypuśćmy, że przestrzeń wektorowa X jest sumą prostą $X = U \oplus V$ podprzestrzeni U oraz V. Dowiedź, że $X^* = U^\perp \oplus V^\perp$.

Zadanie 7.44. Załóżmy, że $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Udowodnij, że:

(1) $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ oraz $(\mathrm{Ker}\, f^*)_\perp = \mathrm{Im}\, f$.
(2) $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ oraz $(\mathrm{Im}\, f^*)_\perp = \mathrm{Ker}\, f$.

Zadanie 7.45. Przypuśćmy, że $f \in \mathrm{End}(V)$. Uzasadnij, że podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest f-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń $U^\perp$ jest f^*-niezmiennicza.

Zadanie 7.46. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem
$$f(x,y,z) = (x - 2y + z, 0, x + y + z).$$
Wyznacz wszystkie dwuwymiarowe f-niezmiennicze podprzestrzenie $V \subseteq \mathbb{R}^3$.

Zadanie 7.47. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $f \in \mathrm{End}(V)$. Udowodnij, że gdy każda podprzestrzeń $U \subseteq V$ kowymiaru 1 jest f-niezmiennicza, to $f = \lambda\, \mathrm{id}_V$ dla pewnego $\lambda \in K$.

Zadanie 7.48. Niech $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Pokaż, że $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Zadanie 7.49. Niech $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Wykaż, że:

(1) f jest monomorfizmem $\iff$ f^* jest epimorfizmem.
(2) f jest epimorfizmem $\iff$ f^* jest monomorfizmem.
(3) f jest izomorfizmem $\iff$ f^* jest izomorfizmem.

Ponadto gdy f jest izomorfizmem, to $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Zadanie 7.50. Załóżmy, że
$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$
jest krótkim ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Udowodnij, że ciąg indukowany
$$0 \longrightarrow W^* \xrightarrow{g^*} V^* \xrightarrow{f^*} U^* \longrightarrow 0$$
jest dokładny.

Zadanie 7.51. Załóżmy, że $f \in \mathrm{End}(V)$ jest rzutem. Dowiedź, że $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ także jest rzutem. Opisz jądro i obraz rzutu f^*.

Zadanie 7.52. Rozważmy odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ dane wzorem

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, x - y + z).$$

Niech $\{e_1^*, e_2^*\}$ będzie bazą dualną do bazy kanonicznej $\{e_1, e_2\}$ przestrzeni $\mathbb{Q}^2$. Wyznacz współrzędne wektora $f^*(2e_1^* - 3e_2^*)$ w bazie dualnej do bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{Q}^3$.

Zadanie 7.53. Rozważmy odwzorowanie $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ dane wzorem

$$f(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z).$$

Wyznacz bazy i wymiary przestrzeni $\operatorname{Ker} f^*$ oraz $\operatorname{Im} f^*$.

Zadanie 7.54. Macierz odwzorowania liniowego $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ w bazach standardowych ma postać

$$M_{\mathrm{st\,st}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz bazy i wymiary przestrzeni $\operatorname{Ker} f^*$ oraz $\operatorname{Im} f^*$.

Zadanie 7.55. Załóżmy, że $V = \mathbb{R}^2$. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ dany wzorem $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$ i funkcjonały $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ zdefiniowane jako

$$\phi_1(x, y) = x + 2y \qquad \text{oraz} \qquad \phi_2(x, y) = x + 3y.$$

Wyznacz macierz $M_B(f^*)$ endomorfizmu $f^* \in \mathrm{End}(V^*)$ w bazie $B = \{\phi_1, \phi_2\}$ przestrzeni V^* i oblicz wymiary przestrzeni $\operatorname{Ker} f^*$ oraz $\operatorname{Im} f^*$.

Zadanie 7.56. Niech $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant 3\}$ i rozważmy endomorfizm $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ zadany formułą

$$\Phi(f)(x) = 2xf'(x) - 3f(x).$$

Wyznacz macierz $M_{B^*}(\Phi^*)$ endomorfizmu $\Phi^* \in \mathrm{End}(V^*)$ w bazie sprzężonej B^* względem bazy

$$B = \{1, x + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x + 1\}$$

przestrzeni V.

Zadanie 7.57. Niech $V = \mathbb{R}^3$ oraz

$$A = \{(2, 1, 4), (1, 1, 1), (3, 2, 1)\}, \qquad B = \{(1, 2, 3), (1, 1, 2), (3, 5, 3)\}.$$

Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ wyznaczony warunkiem

$$M_{AB}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcjonał $\phi \in V^*$, dany wzorem $\phi(x, y, z) = 2x - y + tz$, leży w jądrze odwzorowania f^*?

Zadanie 7.58. Niech $n \geqslant 1$ i załóżmy, że $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ oraz $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Pokaż, że gdy $f_i \in \mathrm{Hom}(U_i, V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to odwzorowanie $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, zdefiniowane wzorem

$$f(u_1, \ldots, u_n) = (f_1(u_1), \ldots, f_n(u_n)),$$

spełnia $f^* = \Phi(f_1^*, \ldots, f_n^*)$, gdzie

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}(V_1^*, U_1^*) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(V_n^*, U_n^*) \to \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$$

jest naturalnym zanurzeniem.

Uwaga. Homomorfizm f zdefiniowany w zadaniu nazywamy *sumą prostą* homomorfizmów $f_1, \ldots, f_n$ i piszemy $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_n$.

Zadanie 7.59. Jeśli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to *przestrzeń bidualną* definiujemy jako $V^{**} = (V^*)^*$. Określmy ponadto odwzorowanie $\sigma_V\colon V \to V^{**}$ wzorem $\sigma_V(v)(\phi) = \phi(v)$ dla $v \in V$ oraz $\phi \in V^*$.

(1) Udowodnij, że σ_V jest monomorfizmem.
(2) Dowiedź, że σ_V jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V < \infty$.
(3) Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, to *odwzorowanie bidualne* $f^{**} \in \mathrm{Hom}(U^{**}, V^{**})$ definiujemy wzorem $f^{**} = (f^*)^*$. Uzasadnij, że diagram

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sigma_U} & U^{**} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ V & \xrightarrow[\sigma_V]{} & V^{**} \end{array}$$

jest przemienny (tzn. $\sigma_V \circ f = f^{**} \circ \sigma_U$).

Uwaga. W języku teorii kategorii ostatni fakt oznacza, że klasa odwzorowań σ_V tworzy morfizm (naturalną transformację) pomiędzy funktorem identycznościowym, a funktorem przestrzeni bidualnej.

Zadanie 7.60. Załóżmy, że U, V są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Oznaczmy przez $\sigma_U\colon U \to U^{**}$ oraz $\sigma_V\colon V \to V^{**}$ kanoniczne izomorfizmy. Wykaż, że $\mathrm{Ker}\, f^{**} = \sigma_U(\mathrm{Ker}\, f)$ oraz $\mathrm{Im}\, f^{**} = \sigma_V(\mathrm{Im}\, f)$. Czy pomijając założenie dotyczące wymiarów przestrzeni U, V teza pozostanie prawdziwa?

8 Wyznacznik i macierz odwrotna

Zadanie 8.1. Wyjaśnij dlaczego wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{vmatrix}$$

są równe zeru nie obliczając ich.

Zadanie 8.2. Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 36 & 60 & 72 & 37 \\ 43 & 71 & 78 & 34 \\ 44 & 69 & 73 & 32 \\ 30 & 50 & 65 & 38 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 14 & 12 & 6 & 14 \\ 10 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 8 \\ 12 & 12 & 8 & 11 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 8.3. Oblicz wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix},$$

gdzie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ oraz $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8.4. Wiedząc, że liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 są podzielne przez 17 uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

jest także podzielny przez 17 nie obliczając go.

Zadanie 8.5. Przypuśćmy, że liczby $\alpha, \beta, \gamma > 0$ są miarami kątów w trójkącie T (tzn. spełniają $\alpha + \beta + \gamma = \pi$). Oblicz wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

i sprawdź, że jest on równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt T jest równoramienny.

Zadanie 8.6. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$. Oblicz wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

gdzie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ są pierwiastkami równania $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Zadanie 8.7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Opisz zbiór $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \det A = 0\}$.

Zadanie 8.8. Rozwiąż równanie

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & x & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & x & 2 \end{bmatrix} = 0$$

o niewiadomej $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8.9. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że liczby $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ są parami różne. Rozwiąż równanie

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z - a_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & z - a_n \end{bmatrix} = 0$$

o niewiadomej $z \in \mathbb{C}$. Co w przypadku, gdy liczby $a_1, \ldots, a_n$ nie są parami różne?

Zadanie 8.10. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F}_{17}).$$

Czy istnieje taka macierz $B \in \mathrm{M}_4(\mathbb{F}_{17})$, że $\det(AB) = 8$? Jeśli tak, to podaj przykład takiej macierzy.

Zadanie 8.11. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Czy istnieją takie liczby $n, m \in \mathbb{Z}$, że $\det(A^n B^m) = 30$?

Zadanie 8.12. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ spełnia $a_{ij} = 1$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11}, \ldots, a_{nn} \geqslant 2$. Udowodnij, że $\det A \geqslant n + 1$.

Zadanie 8.13. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ spełnia $A^t A = I$ oraz $\det A < 0$. Oblicz $\det(I + A)$.

Zadanie 8.14. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Pokaż, że gdy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, to $\det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$.

Zadanie 8.15. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Uzasadnij, że $\det A$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 2^{n-1}.

Zadanie 8.16. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$. Niech ponadto $x_1, \ldots, x_n \in K$ oraz $y_1, \ldots, y_n \in K$. Dowiedź, że

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j+1} (\det A_{ij}) x_i y_j,$$

gdzie A_{ij} to $(n-1) \times (n-1)$ podmacierz A powstała przez wykreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w macierzy A.

Zadanie 8.17. Przypuśćmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$. Zdefiniujmy $s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Uzasadnij, że

$$\det \begin{bmatrix} s_1 - a_{11} & \cdots & s_1 - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n - a_{n1} & \cdots & s_n - a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \det A.$$

Zadanie 8.18. Załóżmy, że K jest ciałem, $0 \neq A \in \mathrm{M}_2(K)$ oraz $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathrm{M}_2(K)$. Wykaż, że gdy $\det(A + B_i) = \det A + \det B_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 4$, to macierze B_1, B_2, B_3, B_4 są liniowo zależne nad K.

Zadanie 8.19. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Dla macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ rozważmy następujące warunki:

(1) $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$ dla dowolnej macierzy $X \in \mathrm{M}_n(K)$.

(2) $\det(A + X) = \det(B + X)$ dla dowolnej macierzy $X \in \mathrm{M}_n(K)$.

Dowiedź, że gdy macierze A, B spełniają warunek (1) lub (2), to $A = B$.

Zadanie 8.20. Niech $n \geqslant 1$ oraz

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pokaż, że $\det A_n = n + 1$.

Zadanie 8.21. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz

$$A_n = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Dowiedź, że gdy $a \neq b$, to $\det A_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. Co w przypadku gdy $a = b$?

Zadanie 8.22. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & c_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & c_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & c_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & c_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Udowodnij, że gdy $a \neq b$, to $\det A = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$, gdzie $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(c_i - x) \in K[x]$. Co w przypadku gdy $a = b$?

Zadanie 8.23. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ b^2 & ab & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b^{n-2} & ab^{n-3} & ab^{n-4} & \cdots & a & -1 \\ b^{n-1} & ab^{n-2} & ab^{n-3} & \cdots & ab & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Uzasadnij, że $\det A_n = (a+b)^{n-1}$.

Zadanie 8.24. Zdefiniujmy *liczby Fibonacciego* $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurencyjnie:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

Niech

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ i & 1 & i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Sprawdź, że $\det A_n = F_{n+1}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 8.25. Załóżmy, że $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych zdefiniowanych za pomocą rozwinięcia w szereg

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Wykaż, że $a_0 = 1$ oraz

$$a_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 8.26. Zdefiniujmy *liczby Eulera* $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ za pomocą rozwinięcia w szereg

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

Udowodnij, że $E_0 = 1$, $E_{2n-1} = 0$ oraz

$$E_{2n} = (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \frac{1}{(2n-8)!} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 8.27. Zdefiniujmy *liczby Bernoulliego* $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ za pomocą rozwinięcia w szereg

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Dowiedź, że $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2n+1} = 0$ oraz

$$B_{2n} = (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 8.28. Niech $n \geqslant 1$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Oblicz wyznaczniki macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ oraz $B = [b_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, gdzie

$$a_{ij} = \sin((i-1)n + j)\varphi \qquad \text{oraz} \qquad b_{ij} = \cos((i-1)n + j)\varphi$$

dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Zadanie 8.29. Niech $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $x_{ij} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ są funkcjami różniczkowalnymi. Niech $X(t) = [x_{ij}(t)] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dla $t \in \mathbb{R}$. Pokaż, że funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dana wzorem $f(t) = \det X(t)$, jest różniczkowalna oraz

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x'_{1j}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & x'_{2j}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x'_{nj}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Stosując powyższą równość udowodnij, że $\frac{d}{dt} \det(I + tA)|_{t=0} = \operatorname{tr} A$ dla $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Zadanie 8.30 (metoda kondensacyjna Chiò)**.** Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 2$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$. Wykaż, że gdy $a_{11} \neq 0$, to

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \in K \quad (2 \leqslant i, j \leqslant n).$$

Zadanie 8.31. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Rozważmy macierz $M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ daną w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Uzasadnij, że $\det M = |\det(A + iB)|^2$. W szczególności $\det M \geqslant 0$.

Zadanie 8.32. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dowiedź, że gdy $AB = BA$, to $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$ oraz $\det(A^2 + AB + B^2) \geqslant 0$. Czy teza pozostanie prawdziwa bez założenia $AB = BA$?

Zadanie 8.33. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że gdy macierze A, B, C są parami przemienne, to

$$\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) \geqslant 0.$$

Zadanie 8.34. Zdefiniujmy *normę* wektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ za pomocą wzoru $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Oznaczmy przez $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ wiersze macierzy A, tzn. $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dowiedź, że

$$|\det A| \leqslant \|v_1\| \cdots \|v_n\| = \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Uwaga. Powyższa nierówność jest zwykle nazywana *nierównością Hadamarda.* Gdy np. $|a_{ij}| \leqslant 1$ dla $1 \leqslant i,j \leqslant n$, to $|\det A| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$. Oszacowanie to jest znacznie lepsze od prostego oszacowania $|\det A| \leqslant n!$ (wynikającego z nierówności trójkąta i wzoru permutacyjnego na wyznacznik). Co więcej oszacowanie $|\det A| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$ jest w wielu sytuacjach optymalne.

Zadanie 8.35. Niech $n \geqslant 1$. Mówimy, że $H = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ jest *macierzą Hadamarda,* gdy $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ dla $1 \leqslant i,j \leqslant n$ oraz $H^t H = nI$.

(1) Sprawdź, że gdy $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ jest macierzą Hadamarda, to $|\det H| = n^{\frac{n}{2}}$.

(2) Dla $n \in \{1, 2, 4\}$ podaj przykład macierzy Hamadarda $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

(3) Wykaż, że nie istnieje macierz Hadamarda rozmiaru 3×3. Ogólniej, jeżeli $n > 2$ oraz istnieje macierz Hadamarda rozmiaru $n \times n$, to n jest podzielne przez 4.

Uwaga. Problem odwrócenia implikacji w punkcie (3) powyższego zadania (tzn. czy dla dowolnej liczby $n = 4k$, gdzie $k \geqslant 1$ istnieje macierz Hadamarda rozmiaru $n \times n$?) pozostaje do dziś nierozstrzygnięty (tzw. *hipoteza Hadamarda*). Aktualnie najmniejszą liczbą, dla której nie znamy odpowiedzi jest $n = 668$.

Zadanie 8.36. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 2$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$. Niech

$$M(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

(1) Wykaż, że $V(x_1, \ldots, x_n) = \det M(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

(2) Wyznacz macierz odwrotną $M(x_1, \ldots, x_n)^{-1}$ zakładając, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Uwaga. Macierz $M(x_1, \ldots, x_n)$ nosi nazwę *macierzy Vandermonde'a,* zaś wyznacznik $V(x_1, \ldots, x_n)$ nazywany jest *wyznacznikiem Vandermonde'a* lub *vandermondianem.*

Zadanie 8.37. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że liczby $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ spełniają $z_1^k + \cdots + z_n^k = 0$ dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant n$. Udowodnij, że $z_1 = \cdots = z_n = 0$.

Zadanie 8.38. Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Dowiedź, że liczba $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{a_j - a_i}{j - i}$ jest całkowita.

Zadanie 8.39. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ oraz $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_1^{k_1} & a_2^{k_1} & \cdots & a_n^{k_1} \\ a_1^{k_2} & a_2^{k_2} & \cdots & a_n^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{k_n} & a_2^{k_n} & \cdots & a_n^{k_n} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Wykaż, że liczba $\det A \in \mathbb{Z}$ jest podzielna przez $n!$.

Zadanie 8.40. Niech $n \geqslant 1$ oraz $a > 0$. Oblicz wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, gdzie $a_{ij} = a^{|i-j|}$ dla $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Zadanie 8.41. Niech $n \geqslant 1$. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \cdots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Zadanie 8.42. Niech $1 \leqslant n \leqslant m$. Pokaż, że

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & \binom{2m}{1} & \cdots & \binom{nm}{1} \\ \binom{m}{2} & \binom{2m}{2} & \cdots & \binom{nm}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{n} & \binom{2m}{n} & \cdots & \binom{nm}{n} \end{vmatrix} = m^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Zadanie 8.43. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $x_1, \ldots, x_n \in K$ są parami różne, zaś $y_1, \ldots, y_n \in K$ są dowolne. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian $P \in K[x]$ spełniający $\deg P < n$ oraz $P(x_i) = y_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Uzasadnij, że wielomian P jest postaci

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Big(\prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big).$$

Uwaga. Wielomian P nosi nazwę *wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.*

Zadanie 8.44. Niech $n \geqslant 1$. Pokaż, że nie istnieją takie funkcje $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, że $e^{xy} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8.45. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 2$ oraz $x_1, \ldots, x_n \in K$. Udowodnij, że dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ postaci $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{j-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi

$$\det \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{bmatrix} = (\det A) V(x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$, zaś $V(x_1, \ldots, x_n)$ jest wyznacznikiem Vandermonde'a.

Zadanie 8.46. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 2$. Niech $x_1, \ldots, x_n \in K$ oraz

$$p_k = p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k \quad (k \geqslant 0)$$

(gdy $k = 0$, to równość tę rozumiemy jako $p_0 = n$). Wykaż, że

$$\det \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & \cdots & p_{2n-2} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

Zadanie 8.47. Niech $n \geqslant 1$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dowiedź, że

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} f(\omega^j),$$

gdzie $f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \in \mathbb{C}[x]$ oraz $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$.

Zadanie 8.48 (wielomiany Schura)**.** Niech $n \geqslant 1$. Każdy ciąg $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$, gdzie $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ nazywamy *partycją* liczby $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in \mathbb{N}_0$ (piszemy wtedy $\lambda \vdash m$). Dla dowolnej partycji $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ definiujemy wielomian

$$w_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{bmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n].$$

(1) Uzasadnij, że funkcja wymierna

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{w_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}{w_{(0,\ldots,0)}(x_1, \ldots, x_n)}$$

jest w istocie wielomianem oraz udowodnij, że wielomian ten jest *symetryczny*, tzn. $s_\lambda(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$.

(2) Niech $\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{n}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Uzasadnij, że gdy $\lambda = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant n$, to

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

(3) Uzasadnij, że gdy $\lambda = k\varepsilon_1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = h_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

(4) Połóżmy $e_0(x_1, \ldots, x_n) = h_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Pokaż, że

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x_1, \ldots, x_n), \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, \ldots, x_n)$$

i wywnioskuj stąd, iż

$$\sum_{j=0}^{\min\{n,k\}} (-1)^j e_j(x_1, \ldots, x_n) h_{k-j}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

(5) Przyjmując konwencję, że $h_k = h_k(x_1, \ldots, x_n)$ dla $k \geqslant 0$ oraz $h_k = 0$ dla $k < 0$ dowiedź, że gdy $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jest partycją, to

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{bmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Wielomian s_λ nazywamy *wielomianem Schura* partycji λ. Natomiast wielomiany e_k oraz h_k nazywamy, odpowiednio, *k-tym elementarnym wielomianem symetrycznym* oraz *k-tym zupełnym jednorodnym wielomianem symetrycznym*. Równość w punkcie (5) nazywana jest *tożsamością Jacobiego–Trudiego*.

Zadanie 8.49. Niech $n \geqslant 3$ oraz $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Załóżmy, że punkty $P_k = (f(k), g(k)) \in \mathbb{R}^2$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$ są wierzchołkami n-kąta foremnego. Wykaż, że $\max\{\deg f, \deg g\} \geqslant n - 1$.

Zadanie 8.50. Niech $n \geqslant 1$ oraz $f(x) = 1 + a_1x^{k_1} + \cdots + a_nx^{k_n} \in \mathbb{R}[x]$ dla pewnych $0 < k_1 < \cdots < k_n$. Przypuśćmy, że $f(x) = (1 - x)^n g(x)$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}[x]$. Pokaż, że

$$g(1) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} k_i.$$

Zadanie 8.51. Niech $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy funkcję $W(f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

(1) Uzasadnij, że $W(f_1, \ldots, f_n) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Sprawdź, że gdy funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo zależne, to $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Czy implikacja odwrotna jest prawdziwa?

(3) Niech $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $f_j(x) = e^{a_jx}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$. Oblicz $W(f_1, \ldots, f_n)(0)$.

Uwaga. Funkcja $W(f_1, \ldots, f_n)$, a także sam wyznacznik $W(f_1, \ldots, f_n)(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, nazywana jest *wyznacznikiem Wrońskiego* lub *wrońskianem* funkcji $f_1, \ldots, f_n$.

Zadanie 8.52. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 1$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zdefiniujmy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$, gdzie $a_{ij} = \sum_{k \mid \gcd(i,j)} a_k$ (suma po wszystkich $1 \leqslant k \leqslant n$ dzielących $\gcd(i, j)$) dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dowiedź, że $A = PDP^t$, gdzie $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $P = [p_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$, gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } j \mid i, \\ 0 & \text{gdy } j \nmid i \end{cases}$$

dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Sprawdź, że $\det P = 1$ i wywnioskuj stąd, że $\det A = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Zadanie 8.53. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie $a_{ij} = \gcd(i, j)$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Udowodnij, że $\det A = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

Uwaga. Funkcja Eulera $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zdefiniowana jest wzorem

$$\varphi(k) = |\{j \in \mathbb{N} : j \leqslant k \text{ oraz } \gcd(j, k) = 1\}|.$$

Można pokazać (potrafisz to zrobić?), że $m = \sum_{k|m} \varphi(k)$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8.54. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że liczby $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ są parami różne. Niech $D = [d_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, gdzie $d_{ij} = |a_i - a_j|$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dowiedź, że $\det D \neq 0$.

Zadanie 8.55. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zdefiniujmy odwzorowanie liniowe $f\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ wzorem $f(X) = AX$. Oblicz $\det f$.

Zadanie 8.56. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. *Wielomianem charakterystycznym* macierzy $M \in \mathrm{M}_n(K)$ nazywamy wielomian

$$\chi_M(x) = \det(M - xI) \in K[x].$$

Udowodnij, że gdy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, to $(-x)^m \chi_{AB}(x) = (-x)^n \chi_{BA}(x)$. W szczególności gdy $n = m$, to $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

Zadanie 8.57. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Przypuśćmy, że macierze $A + jB$ dla $0 \leqslant j \leqslant 2n$ są odwracalne, zaś ich odwrotności mają całkowite wyrazy. Uzasadnij, że macierz $A + (2n+1)B$ jest również odwracalna, zaś jej odwrotność ma całkowite wyrazy.

Zadanie 8.58. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Czy przestrzeń wektorowa $\mathrm{M}_n(K)$ posiada bazę złożoną z macierzy odwracalnych? Jeśli tak, to wskaż taką bazę.

Zadanie 8.59. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że gdy $A + B = I$ oraz $A^2 + B^2 = 0$, to macierze A, B są odwracalne oraz $A^{-1} + B^{-1} = 2I$.

Zadanie 8.60. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ spełnia $A^2 = \lambda A$ dla pewnego $\lambda \in K$. Pokaż, że gdy $\lambda \neq -1$, to macierz $I + A$ jest odwracalna oraz $(I + A)^{-1} = I - (\lambda + 1)^{-1}A$. Co w przypadku $\lambda = -1$?

Zadanie 8.61. Niech $n \geqslant 2$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$, gdzie $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Oblicz $\det A$ i uzasadnij, że macierz A jest odwracalna. Następnie sprawdź, że

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I.$$

Zadanie 8.62. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$. Załóżmy, że $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ oraz przypuśćmy, iż $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$. Wykaż, że $\det A = \det B$. Czy teza pozostanie prawdziwa gdy ciało $\mathbb{Q}$ zastąpimy innym ciałem, np. $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$?

Zadanie 8.63. Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Załóżmy, że pewnych $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ macierz $I_n - AB$ jest odwracalna. Dowiedź, że macierz $I_m - BA$ także jest odwracalna oraz zachodzi równość

$$(I_m - BA)^{-1} = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A.$$

Zadanie 8.64. Niech $n \geqslant 1$ oraz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

(1) Oblicz $\det P$ oraz sprawdź, że $P^{-1} = P^t = P$.

(2) Opisz macierz PAP^{-1} dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Zadanie 8.65. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 2$. Przypomnijmy, że *macierzą dołączoną* macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nazywamy macierz $\operatorname{adj} A \in \mathrm{M}_n(K)$, której (i,j)-ty wyraz równy jest $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$, gdzie A_{ji} to $(n-1)\times(n-1)$ podmacierz A powstała przez wykreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny w macierzy A. Przypomnijmy również, że

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I.$$

Niech $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Udowodnij, że:

(1) $\operatorname{rank} A = n \iff \operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) = n$.

(2) $\operatorname{rank} A = n-1 \iff \operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) = 1$.

(3) $\operatorname{rank} A < n-1 \iff \operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) = 0$.

(4) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$.

(5) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2} A$.

(6) $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.

(7) $\operatorname{adj}(PAP^{-1}) = P(\operatorname{adj} A)P^{-1}$ dla dowolnej macierzy $P \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(8) jeśli $AB = BA$, to $(\operatorname{adj} A)B = B(\operatorname{adj} A)$.

Uwaga. Zauważmy, że z punktów (1)–(3) wynika, że $\operatorname{rank}(\operatorname{adj} A) \in \{0, 1, n\}$ dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$. W szczególności gdy $n \geqslant 3$ oraz $B \in \mathrm{M}_n(K)$ jest macierzą rzędu $1 < r < n$, to $B \neq \operatorname{adj} A$ dla każdej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 8.66. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy $A \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$. Identyfikując macierz BA z odpowiadającym jej skalarem dowiedź, że

$$\operatorname{adj}(I - AB) = AB + (1 - BA)I.$$

Zadanie 8.67. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Rozważmy macierz $M \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ daną w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

gdzie $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$ oraz $D \in \mathrm{M}_1(K)$. Identyfikując macierze $C(\operatorname{adj} A)B$ oraz D z odpowiadającymi im skalarami uzasadnij, że

$$\det M = (\det A)D - C(\operatorname{adj} A)B.$$

Zadanie 8.68. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $A_n = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ oraz $B_n = [b_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$, gdzie

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \qquad \text{oraz} \qquad b_{ij} = \frac{1}{\min\{i, j\}}$$

dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

(1) Oblicz $\det A_n$ oraz $\det B_n$ dla $n \geqslant 1$.

(2) Wyznacz macierze odwrotne A_n^{-1} oraz B_n^{-1} dla $n = 3$ posługując się wzorem $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ dla $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

Zadanie 8.69. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & t \\ t & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & t & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Znajdź wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których macierz A jest odwracalna. Następnie dla każdego takiego t wyznacz macierz A^{-1} posługując się wzorem $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Zadanie 8.70. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że liczby $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ oraz $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ spełniają $z_j + w_k \neq 0$ dla $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Niech $A = [a_{jk}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, gdzie $a_{jk} = \frac{1}{z_j + w_k}$ dla $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Dowiedź, że

$$\det A = \frac{\prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (z_j - z_k)(w_j - w_k)}{\prod_{1 \leqslant j, k \leqslant n} (z_j + w_k)}.$$

Zadanie 8.71. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ nie jest odwracalna, to istnieją takie niezerowe macierze $B, C \in \mathrm{M}_n(K)$, że $AB = 0$ oraz $CA = 0$.

Zadanie 8.72. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $M \in \mathrm{M}_{2n}(K)$ będzie macierzą daną w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

(1) Pokaż, że gdy macierz A jest odwracalna, to $\det M = (\det A) \det(D - CA^{-1}B)$.

(2) Udowodnij, że gdy macierz A spełnia $AC = CA$, to $\det M = \det(AD - CB)$. Czy równość ta pozostaje prawdziwa bez założenia $AC = CA$?

Zadanie 8.73. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 1$ oraz $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$.

(1) Jakie warunki musi spełniać trójka macierzy A, B, C, aby macierz $M \in \mathrm{M}_{2n}(K)$, dana w postaci blokowo-trójkątnej

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

była odwracalna? Dla każdej takiej trójki wyznacz M^{-1}.

(2) Uzasadnij, że macierz $N \in \mathrm{M}_{3n}(K)$, dana w postaci blokowo-trójkątnej

$$N = \begin{bmatrix} I & A & B \\ 0 & I & C \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

jest odwracalna i wyznacz jej odwrotność N^{-1}.

Zadanie 8.74. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Niech $M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą daną w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że:

(1) gdy $\operatorname{rank} M = n$ oraz $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, to $D = CA^{-1}B$.

(2) gdy $\operatorname{rank} M = n$, to macierz

$$N = \begin{bmatrix} \det A & \det B \\ \det C & \det D \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

jest osobliwa.

Zadanie 8.75. Rozważmy permutacje

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 3 & 7 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Oblicz znaki permutacji σ oraz τ.

(2) Wyznacz permutacje $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{-1} oraz τ^{-1}.

(3) Przedstaw permutacje σ oraz τ jako iloczyny cykli rozłącznych.

(4) Przedstaw permutacje σ oraz τ jako iloczyny transpozycji.

Zadanie 8.76. Niech $n \geqslant 1$ oraz $\sigma \in S_n$. Wykaż, że $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{|S|}$, gdzie

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ oraz } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Uwaga. Każdą parę $(i, j) \in S$ nazywamy *inwersją* permutacji σ.

Zadanie 8.77. Niech $n, m \geqslant 1$ oraz

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+m \\ m+1 & \cdots & m+n & 1 & \cdots & m \end{pmatrix} \in S_{n+m}.$$

Oblicz znak permutacji σ.

Zadanie 8.78. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz dowolnej funkcji $\pi \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ zachodzi

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\pi(1)\sigma(1)} \cdots a_{\pi(n)\sigma(n)} = \begin{cases} (\operatorname{sgn} \pi)(\det A) & \text{gdy } \pi \in S_n, \\ 0 & \text{gdy } \pi \notin S_n. \end{cases}$$

Zadanie 8.79. Korzystając ze wzoru permutacyjnego oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_5(\mathbb{F}_{13}).$$

Zadanie 8.80. Niech $n \geqslant 3$. Korzystając ze wzoru permutacyjnego oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Zadanie 8.81. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz

$$S = \{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} : a_{ij} = 0\}.$$

Uzasadnij, że gdy $|S| > n(n-1)$, to $\det A = 0$.

Zadanie 8.82. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Oblicz sumę

$$\sum_{1 \leqslant j_1,\ldots,j_n \leqslant n} \det \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8.83. Dla jakich $n \geqslant 1$ istnieje taka macierz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, że każdy składnik $(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ sumy

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

jest dodatni?

Zadanie 8.84. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ jest liczbą nieparzystą.

(1) Dowiedź, że gdy permutacja $\sigma \in S_n$ spełnia $\sigma^2 = \mathrm{id}$, to σ ma *punkt stały* (tzn. istnieje takie $k \in \{1,\ldots,n\}$, że $\sigma(k) = k$).

(2) Wywnioskuj z punktu (1), że gdy dla macierzy *symetrycznej* $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ (tzn. spełniającej $A^t = A$) zachodzi $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$, to $\det A \in \mathbb{Z}$ jest liczbą parzystą.

Zadanie 8.85. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in S_n$. Uzasadnij, że macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma_0(1) & \cdots & \sigma_0(n) \\ 1 & \sigma_1(1) & \cdots & \sigma_1(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_n(1) & \cdots & \sigma_n(n) \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$$

jest osobliwa.

Zadanie 8.86. Dla jakich $a \in \mathbb{F}_7$ układ równań

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie? Dla każdego takiego a wyznacz jedyne rozwiązanie posługując się wzorami Cramera.

Zadanie 8.87. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Stosują wzory Cramera wyznacz liczby $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ spełniające ten układ.

Zadanie 8.88 (formuła Cauchy'ego–Bineta)**.** Załóżmy, że K jest ciałem oraz $1 \leqslant n \leqslant m$. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $B = [b_{jk}] \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Niech ponadto

$$\Lambda^n(m) = \{(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n : 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant m\}$$

(ile elementów ma zbiór $\Lambda^n(m)$?) oraz

$$A_J = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{bmatrix}, \qquad B_J = \begin{bmatrix} b_{j_1 1} & b_{j_1 2} & \cdots & b_{j_1 n} \\ b_{j_2 1} & b_{j_2 2} & \cdots & b_{j_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j_n 1} & b_{j_n 2} & \cdots & b_{j_n n} \end{bmatrix}$$

dla $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \Lambda^n(m)$ (oczywiście $A_J, B_J \in \mathrm{M}_n(K)$). Dowiedź, że

$$\det(AB) = \sum_{J \in \Lambda^n(m)} (\det A_J)(\det B_J).$$

Dlaczego w założeniach ograniczyliśmy się do przypadku $n \leqslant m$?

Zadanie 8.89. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 1$ oraz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$. Niech ponadto $1 \leqslant p, q \leqslant n$. Dla $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \Lambda^p(n)$ oraz $J = (j_1, \ldots, j_q) \in \Lambda^q(n)$ zdefiniujmy

$$A_{IJ} = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_q} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{p,q}(K).$$

Pokaż, że gdy $A_{IJ} = 0$ dla pewnych $I \in \Lambda^p(n)$ oraz $J \in \Lambda^q(n)$, gdzie $p, q \geqslant 1$ spełniają $p + q > n$, to $\det A = 0$.

Zadanie 8.90. Niech $n, m \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Wykaż, że $\det(A^hA) \geqslant 0$.

Zadanie 8.91. Niech $n \geqslant 1$ oraz $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{C}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$. Udowodnij, że zachodzi następująca *tożsamość Cauchy'ego–Bineta*

$$\Big(\sum_{j=1}^n a_j\overline{c}_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j\overline{d}_j\Big) - \Big(\sum_{j=1}^n a_j\overline{d}_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j\overline{c}_j\Big) = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_jb_k - a_kb_j)\overline{(c_jd_k - c_kd_j)}.$$

W szczególności gdy $a_j = c_j$ oraz $b_j = d_j$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$, to otrzymujemy *tożsamość Lagrange'a*

$$\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n |b_j|^2\Big) - \Big|\sum_{j=1}^n a_j\overline{b}_j\Big|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |a_jb_k - a_kb_j|^2,$$

z której wynika *nierówność Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza*

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_j\overline{b}_j\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n |b_j|^2\Big).$$

Uwaga. Tożsamość Cauchy'ego–Bineta można również interpretować w języku iloczynów skalarnych. Mianowicie rozważmy $V = \mathbb{C}^n$ wraz z bazą standardową $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Iloczyn skalarny wektorów $u = \sum_{j=1}^n u_je_j \in V$ oraz $v = \sum_{j=1}^n v_je_j \in V$ definiujemy jako

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^n u_j\overline{v}_j.$$

Podobnie definiujemy iloczyn skalarny 2-wektorów $\omega = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \omega_{jk}e_j \wedge e_k \in \Lambda^2V$ oraz $\eta = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \eta_{jk}e_j \wedge e_k \in \Lambda^2V$ jako

$$\langle \omega, \eta\rangle = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \omega_{jk}\overline{\eta}_{jk}.$$

Przy tak przyjętych definicjach tożsamość Cauchy'ego–Bineta, to nic innego jak równość

$$\langle u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2\rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u_1, v_1\rangle & \langle u_1, v_2\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle & \langle u_2, v_2\rangle \end{bmatrix}$$

dla dowolnych $u_1, u_2 \in V$ oraz $v_1, v_2 \in V$.

Zadanie 8.92. Załóżmy, że liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ spełniają $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Udowodnij, że $a + b + ac \leqslant \sqrt{3}$. Czy potrafisz znaleźć lepsze oszacowanie?

Zadanie 8.93. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dowiedź, że:

(1) gdy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, to $a + ab + bc + c \leqslant 4$.

(2) gdy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, to $(a + b)(c + d) \leqslant 1$.

Zadanie 8.94. Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1, \ldots, a_n > 0$. Załóżmy, że liczby $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ oraz $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ spełniają $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ oraz $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$. Pokaż, że

$$\Big(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\Big)\Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2\Big) \geqslant \sum_{i=1}^n a_i y_i^2.$$

Zadanie 8.95 (uogólnione rozwinięcie Laplace'a)**.** Niech K będzie ciałem, $1 \leqslant n < m$ oraz $A \in \mathrm{M}_m(K)$. Gdy $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \Lambda^n(m)$, to połóżmy $|I| = i_1 + \cdots + i_n$ oraz $I' = (i_{n+1}, \ldots, i_m) \in \Lambda^{m-n}(m)$, gdzie $\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{i_{n+1}, \ldots, i_m\} = \varnothing$. Wykaż, że

$$\det A = \sum_{J \in \Lambda^n(m)} (-1)^{|I|+|J|} (\det A_{IJ})(\det A_{I'J'})$$

dla dowolnego $I \in \Lambda^n(m)$.

Zadanie 8.96 (formuła Schura)**.** Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_{nm}(K)$ jest dana w postaci blokowej

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie $A_{ij} \in \mathrm{M}_m(K)$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Udowodnij, że gdy $A_{ij} A_{kl} = A_{kl} A_{ij}$ dla dowolnych $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, to

$$\det A = \det\Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}\Big).$$

Zadanie 8.97. Niech $n, m \geqslant 1$. Załóżmy, że $f_{jk} \in \mathbb{C}[x]$ dla $1 \leqslant j, k \leqslant n$ oraz $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$. Dowiedź, że gdy $f(x) = \det[f_{jk}(x)] \in \mathbb{C}[x]$ oraz $\chi_A(x) = \prod_{j=1}^m (\lambda_j - x) \in \mathbb{C}[x]$, to

$$\det \begin{bmatrix} f_{11}(A) & \cdots & f_{1n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(A) & \cdots & f_{nn}(A) \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^m f(\lambda_j).$$

Zadanie 8.98. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$ oraz $n \geqslant 1$. Udowodnij, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jest antysymetryczna (tzn. spełnia $A^t = -A$), to $\det A = a^2$ dla pewnego $a \in K$. Ponadto gdy n jest liczbą nieparzystą, to $\det A = 0$.

Zadanie 8.99. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 1$. *Pfaffianem* macierzy antysymetrycznej $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_{2n}(K)$ nazywamy skalar

$$\operatorname{pf} A = \sum_{\pi \in P_n} (\operatorname{sgn} \pi) a_{\pi(1)\pi(2)} \cdots a_{\pi(2n-1)\pi(2n)},$$

gdzie

$$P_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_n & j_n \end{smallmatrix} \right) \in S_{2n} : i_1 < \cdots < i_n \text{ oraz } i_k < j_k \text{ dla } 1 \leqslant k \leqslant n \right\}.$$

(1) Ile elementów ma zbiór P_n? Wyznacz wzór na $\operatorname{pf} A$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

(2) Udowodnij, że

$$\operatorname{pf} A = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}.$$

(3) Dowiedź, że $\operatorname{pf}(PAP^t) = (\det P)(\operatorname{pf} A)$ dla dowolnej macierzy $P \in \mathrm{M}_{2n}(K)$.

(4) Wykaż, że $\det A = (\operatorname{pf} A)^2$.

(5) Załóżmy, że $M \in \mathrm{M}_n(K)$. Pokaż, że macierz $A \in \mathrm{M}_{2n}(K)$ dana w postaci blokowej

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M^t & 0 \end{bmatrix}$$

jest antysymetryczna oraz $\operatorname{pf} A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det M$.

Zadanie 8.100. Przypuśćmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Udowodnij, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jest odwracalna, to macierz transponowana A^t jest również odwracalna oraz $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Sprawdź ponadto, że macierz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ j & k \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$$

jest odwracalna (oblicz M^{-1}), ale macierz M^t odwracalna nie jest. Wyznacz też *rząd wierszowy/kolumnowy* (tzn. liczbę liniowo niezależnych wierszy/kolumn) macierzy M.

Uwaga. Zastanów się które pojęcia i twierdzenia dla macierzy kwadratowych nad ciałem mają sens/dadzą się uogólnić na macierze nad *ciałem nieprzemiennym* (np. $\mathbb{H}$).

Podręczniki, wykłady i zbiory zadań

Zbiory zadań zostały oznaczone kolorem niebieskim.

Strony WWW zawierające wykłady/zadania zostały oznaczone kolorem zielonym.

1. T. Andreescu. *Essential Linear Algebra with Applications: A Problem-Solving Approach.* Birkhäuser, 2014.
2. G. Banaszak, W. Gajda. *Elementy algebry liniowej: Część I.* Wydawnictwo WNT, 2002.
3. A. Białynicki-Birula. *Algebra liniowa z geometrią.* Polskie Wydawnictwo Naukowa, 1976.
4. F. Broglia, E. Fortuna, D. Luminati. *Problemi Risolti di Algebra Lineare.* Zanichelli, 1995.
5. J. Chaber, R. Pol. *GAL.* Notatki dostępne `online`, 2015.
6. K. Conrad. *Expository papers.* Notatki dostępne `online`.
7. H. Dym. *Linear Algebra in Action.* American Mathematical Society, 2014.
8. J. M. Erdman. *Exercises and Problems in Linear Algebra.* Notatki dostępne `online`, 2014.
9. D. K. Faddeev, I. Sominsky. *Problems in Higher Algebra.* Mir Publishers, 1972.
10. J. Gancarzewicz. *Algebra liniowa i jej zastosowania.* Wydawnictwo UJ, 2009.
11. J. S. Golan. *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know.* Springer, 2012.
12. P. R. Halmos. *Linear Algebra Problem Book.* Mathematical Association of America, 1995.
13. A. Herdegen. *Algebra liniowa i geometria.* eigenspace.pl, wydanie `online`, 2018.
14. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. *Algebra i geometria analityczna: Przykłady i zadania.* Oficyna Wydawnicza GiS, 2017.
15. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas. *Algebra liniowa: Przykłady i zadania.* Oficyna Wydawnicza GiS, 2017.
16. J. Komorowski. *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk.* Polskie Wydawnictwo Naukowa, 1978.
17. A. I. Kostrikin. *Zbiór zadań z algebry.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.
18. A. I. Kostrikin, Y. I. Manin. *Linear Algebra and Geometry.* Gordon and Breach Science Publishers, 1997.
19. T. Koźniewski. *Wykłady z algebry liniowej I.* Wydawnictwo UW, 2012.
20. T. Koźniewski. *Wykłady z algebry liniowej II.* Wydawnictwo UW, 2012.
21. C. Krattenthaler. *Advanced Determinant Calculus.* preprint `arXiv`, 1999.
22. A. Męcel. *Dla studentów.* Notatki dostępne `online`.
23. V. Prasolov. *Problems and Theorems in Linear Algebra.* American Mathematical Society, wydanie `online`, 1994.
24. I. V. Proskuryakov. *Problems in Linear Algebra.* Mir Publishers, 1978.
25. S. Roman. *Advanced Linear Algebra.* Springer, 2008.
26. J. Rutkowski. *Algebra liniowa w zadaniach.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2019.
27. A. Strojnowski. *Geometria z Algebrą Liniową.* Notatki dostępne `online`.
28. K. Szymiczek. *Referaty, prace, wykłady.* Notatki dostępne `online`.
29. A. Weber. *Dydaktyka.* Notatki dostępne `online`.
30. F. Zhang. *Linear Algebra: Challenging Problems for Students.* Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, 1996.