Geometria z Algebrą Liniową
(semestr II)

Zbiór zadań

Uwagi proszę kierować na adres lukasz.kubat@mimuw.edu.pl

Spis treści

Oznaczenia i konwencje

Rozdział ten służy zestawieniu (prawie) wszystkich użytych w tym zbiorze zadań oznaczeń (większość z nich jest standardowa). W przypadku braku wyjaśnienia danego oznaczenia w poniższym zestawieniu warto zajrzeć do zadania o numerze podanym w nawiasie.

$\mathbb{P}$	zbiór liczb pierwszych
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych (umawiamy się, że $0 \notin \mathbb{N}$; ponadto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)
$\mathbb{Z}$	pierścień liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	ciało liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	ciało liczb rzeczywistych
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych
$\mathbb{F}_p$	ciało reszt modulo p
$\mathbb{H}$	algebra z dzieleniem (rzeczywistych) kwaternionów
S_n	grupa permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$
$\operatorname{sgn} \sigma$	znak permutacji $\sigma \in S_n$
$\inf S$	infimum zbioru $S \subseteq \mathbb{R}$
$\sup S$	supremum zbioru $S \subseteq \mathbb{R}$
$\min S$	minimum zbioru $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}$
$\max S$	maksimum zbioru $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}$
$\lvert S \rvert$	moc zbioru S
$\mathcal{P}(S)$	rodzina wszystkich podzbiorów zbioru S
$\mathcal{F}(S)$	rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru S
$\operatorname{Map}(S, T)$	zbiór odwzorowań z S w T (oznaczany też jako T^S)
id_S	odwzorowanie identycznościowe zbioru S (czasem piszemy też id)
l^2	przestrzeń sumowalnych z kwadratem ciągów rzeczywistych (5.5)
$\mathcal{C}(X, Y)$	przestrzeń funkcji ciągłych z X w Y (dla nas $\varnothing \neq X, Y \subseteq \mathbb{C}$)
$\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ o ciągłej pochodnej i zwartym nośniku (4.2)
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$	przestrzeń funkcji gładkich z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$	przestrzeń okresowych funkcji gładkich z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ o okresie 2π (1.20)
$K^\times$	grupa multiplikatywna ciała K, tzn. $K^\times = K \setminus \{0\}$
$\operatorname{char} K$	charakterystyka ciała K
$K[x_1, \ldots, x_n]$	pierścień wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele K
$K(x_1, \ldots, x_n)$	ciało funkcji wymiernych zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele K
$\gcd(f_1, \ldots, f_s)$	największy wspólny dzielnik wielomianów $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$
$\operatorname{lcm}(f_1, \ldots, f_s)$	najmniejsza wspólna wielokrotność wielomianów $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$
$\deg f$	stopień wielomianu $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ (2.20)
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	pochodna cząstkowa wielomianu $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ względem x_i (2.20)
$\mathrm{M}_{n,m}(K)$	przestrzeń macierzy $n \times m$ o wyrazach w ciele K
$\mathrm{M}_n(K)$	algebra macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele K (oznaczana też jako $\mathfrak{gl}_n(K)$)
$\mathrm{GL}_n(K)$	grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele K
$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$	grupa macierzy $n \times n$ o wyrazach w $\mathbb{R}$ i dodatnim wyznaczniku (5.64)
$\mathrm{SL}_n(K)$	grupa macierzy $n \times n$ o wyrazach w ciele K i wyznaczniku równym 1 (4.58)
$\mathrm{D}_n^+(\mathbb{R})$	grupa macierzy diagonalnych $n \times n$ o dodatnich wyrazach w $\mathbb{R}$ (5.23)

$\mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$	grupa unipotentnych macierzy górno-trójkątnych $n \times n$ o wyrazach w $\mathbb{R}$ (5.23)
$\mathrm{C}(A)$	centralizator macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (2.46)
$\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$	macierz diagonalna o elementach $x_1, \ldots, x_n \in K$ na diagonali
$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_n)$	macierz blokowo-diagonalna z macierzami $A_1, \ldots, A_n$ na diagonali
δ_{ij}	symbol (delta) Kroneckera ($\delta_{ij} = 1$ gdy $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$)
ε_{abc}	symbol Levi-Civity (5.98, 5.103)
I_n	macierz identycznościowa $n \times n$ (czasem piszemy też I)
$J_n(\lambda)$	klatka Jordana $n \times n$ o wartości własnej $\lambda \in K$ (z jedynkami nad diagonalą)
$J_n(\alpha, \beta)$	uogólniona klatka Jordana $2n \times 2n$ o parametrach $\alpha \in \mathbb{R}$ i $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ (2.38)
$\overline{A}$	sprzężenie zespolone macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$
A^t	transpozycja macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$
A^h	sprzężenie hermitowskie macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$
$\mathrm{adj}\, A$	macierz dołączona macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
$\exp A$	eksponenta macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (2.48)
$\mathrm{rank}\, A$	rząd macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$
$\det A$	wyznacznik macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (oznaczany też jako $\|A\|$)
$\mathrm{tr}\, A$	ślad macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
$m_k(A)$	k-ty minor główny macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (4.19)
χ_A	wielomian charakterystyczny macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
μ_A	wielomian minimalny macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (1.58)
$\sigma(A)$	zbiór wartości własnych macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
$m_a(A, \lambda)$	krotność algebraiczna wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (2.28)
$m_g(A, \lambda)$	krotność geometryczna wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (2.28)
$l_k(A, \lambda)$	liczba klatek $J_k(\lambda)$ w postaci Jordana macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$
$m_A(\lambda)$	rozmiar największej klatki $J_m(\lambda)$ w postaci Jordana dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ (2.29)
$[A, B]$	komutator macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ (1.15)
$A \otimes B$	iloczyn Kroneckera macierzy $A \in \mathrm{M}_{p,q}(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$
KX	przestrzeń funkcji o skończonym nośniku (oznaczana też jako $K^{(X)}$) (8.37)
$V_1 + \cdots + V_n$	suma algebraiczna podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n$
$V_1 \times \cdots \times V_n$	iloczyn prosty (produkt) przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$
$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$	suma prosta (koprodukt) przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$
$\sum_{i \in I} V_i$	suma algebraiczna rodziny podprzestrzeni $(V_i)_{i \in I}$
$\prod_{i \in I} V_i$	iloczyn prosty (produkt) rodziny przestrzeni $(V_i)_{i \in I}$
$\bigoplus_{i \in I} V_i$	suma prosta (koprodukt) rodziny przestrzeni $(V_i)_{i \in I}$
V/U	iloraz przestrzeni V przez podprzestrzeń U
$\mathrm{Span}(S)$	podprzestrzeń wektorowa rozpięta (generowana) przez zbiór S
$\dim V$	wymiar przestrzeni wektorowej V
$\mathrm{Hom}(U, V)$	przestrzeń odwzorowań liniowych (homomorfizmów) z U w V
$\mathrm{End}(V)$	algebra endomorfizmów przestrzeni V (oznaczana też jako $\mathfrak{gl}(V)$)
$\mathrm{Aut}(V)$	grupa automorfizmów przestrzeni V (oznaczana też jako $\mathrm{GL}(V)$)
$\mathrm{SL}(V)$	grupa automorfizmów przestrzeni V o wyznaczniku równym 1 (4.58)
f^n	n-krotne złożenie endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ (gdy $n = 0$, to $f^n = \mathrm{id}_V$)
$f_1 \oplus \cdots \oplus f_n$	suma prosta endomorfizmów $f_i \in \mathrm{End}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ (1.66)
$M_{AB}(f)$	macierz homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ w bazach $A \subseteq U$ oraz $B \subseteq V$

$M_B(f)$	macierz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ w bazie $B \subseteq V$
st	standardowa baza/układ bazowy przestrzeni wektorowej/afinicznej K^n
$\mathrm{Im}\, f$	obraz homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$\mathrm{Ker}\, f$	jądro homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$\mathrm{Coker}\, f$	kojądro homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$\mathrm{rank}\, f$	rząd homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$\det f$	wyznacznik endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$
$\mathrm{tr}\, f$	ślad endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$
χ_f	wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$
μ_f	wielomian minimalny endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ (1.58)
$\sigma(f)$	spektrum (widmo) endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ (1.14)
$m_a(f, \lambda)$	krotność algebraiczna wartości własnej $\lambda \in \sigma(f)$ dla $f \in \mathrm{End}(V)$ (2.28)
$m_g(f, \lambda)$	krotność geometryczna wartości własnej $\lambda \in \sigma(f)$ dla $f \in \mathrm{End}(V)$ (2.28)
$l_n(f, \lambda)$	liczba klatek $J_n(\lambda)$ w postaci Jordana endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$
$m_f(\lambda)$	rozmiar największej klatki $J_n(\lambda)$ w postaci Jordana dla $f \in \mathrm{End}(V)$ (2.29)
V^*	przestrzeń dualna (sprzężona) przestrzeni wektorowej V
f^*	odwzorowanie dualne (sprzężone) homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$(e_i^*)_{i\in I}$	rodzina funkcjonałów sprzężonych do bazy $(e_i)_{i\in I}$ przestrzeni V
V^{**}	przestrzeń bidualna (bisprzężona) przestrzeni wektorowej V
f^{**}	odwzorowanie bidualne (bisprzężone) homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$
$\mathrm{T}(A)$	przestrzeń styczna przestrzeni afinicznej A
$\dim A$	wymiar przestrzeni afinicznej A
$\mathrm{Aff}(S)$	podprzestrzeń afiniczna rozpięta (generowana) przez zbiór S
$\overrightarrow{pq}$	wektor wyznaczony przez punkty $p, q \in A$ przestrzeni afinicznej A
A/V	iloraz przestrzeni afinicznej A przez podprzestrzeń $V \subseteq \mathrm{T}(A)$ (3.12)
$\mathrm{Aff}(A, B)$	zbiór odwzorowań afinicznych z A w B
$\mathrm{Aut}(A)$	grupa automorfizmów afinicznych przestrzeni afinicznej A
$\mathrm{T}(f)$	część styczna (liniowa) odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(A, B)$
$M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f)$	macierz odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(A, B)$ w układach bazowych $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$
$M_{\mathcal{B}}(f)$	macierz odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(A, A)$ w układzie bazowym $\mathcal{B}$
$N \rtimes A$	produkt półprosty grup N oraz A (3.50)
$\mathrm{Bil}(V)$	przestrzeń form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V
$\mathrm{Bil}_s(V)$	przestrzeń symetrycznych form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V
$\mathrm{Bil}_a(V)$	przestrzeń alternujących form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V
$\mathrm{Bil}_r(V)$	zbiór refleksywnych form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V (4.5)
$M_B(\varphi)$	macierz formy dwuliniowej $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ w bazie $B \subseteq V$
$U^\perp$	dopełnienie ortogonalne U w V względem formy $\varphi \in \mathrm{Bil}_r(V)$
$V_1 \perp \cdots \perp V_n$	suma ortogonalna przestrzeni dwuliniowych $V_1, \ldots, V_n$ (4.22)
$\varphi_1 \perp \cdots \perp \varphi_n$	suma ortogonalna form dwuliniowych $\varphi_i \in \mathrm{Bil}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ (4.22)
$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$	iloczyn tensorowy form dwuliniowych $\varphi_i \in \mathrm{Bil}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ (4.23)
$I(\varphi)$	stożek izotropowy formy $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ (4.26)
$\mathcal{H}$	płaszczyzna hiperboliczna (Minkowskiego) (4.27)
$\mathrm{O}(\varphi)$	grupa ortogonalna formy półtoraliniowej φ (4.32)
$\mathrm{SO}(\varphi)$	specjalna grupa ortogonalna formy półtoraliniowej φ (4.32)

$\mathrm{O}(p,q)$	grupa ortogonalna typu (p,q) (4.32)
$\mathrm{SO}(p,q)$	specjalna grupa ortogonalna typu (p,q) (4.32)
$\mathrm{O}(n)$	grupa ortogonalna stopnia n (4.32)
$\mathrm{SO}(n)$	specjalna grupa ortogonalna stopnia n (4.32)
$\mathrm{U}(p,q)$	grupa unitarna typu (p,q) (4.32)
$\mathrm{SU}(p,q)$	specjalna grupa unitarna typu (p,q) (4.32)
$\mathrm{U}(n)$	grupa unitarna stopnia n (4.32)
$\mathrm{SU}(n)$	specjalna grupa unitarna stopnia n (4.32)
$\mathrm{Sp}_{2n}(K)$	grupa symplektyczna stopnia $2n$ nad ciałem K (4.32)
f^*	sprzężenie hermitowskie homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$ (4.33)
$\mathrm{Quad}(V)$	przestrzeń form kwadratowych na przestrzeni wektorowej V
$M_B(Q)$	macierz formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ w bazie $B \subseteq V$
$D(Q)$	zbiór skalarów reprezentowanych przez formę $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (4.53)
$\mathrm{rad}\, Q$	radykał formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (4.56)
$\mathrm{O}(Q)$	grupa ortogonalna formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (4.58)
$\mathrm{SO}(Q)$	specjalna grupa ortogonalna formy $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (4.58)
$i(Q)$	indeks Witta formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (4.64)
$\mathrm{W}(K)$	pierścień Witta ciała K (4.68)
$\langle u,v\rangle$	iloczyn skalarny wektorów $u,v \in V$
$\|v\|$	norma (długość) wektora $v \in V$
$u \perp v$	prostopadłość (ortogonalność) wektorów $u,v \in V$
$\sphericalangle(u,v)$	kąt pomiędzy wektorami $0 \neq u,v \in V$ przestrzeni euklidesowej V
$G(v_1,\dots,v_n)$	wyznacznik Grama wektorów $v_1,\dots,v_n \in V$ (5.25)
$W(f)$	ciało wartości endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ (5.27)
$\|f\|$	norma operatorowa endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ (5.29)
$v(G)$	liczba wierzchołków grafu G
$e(G)$	liczba krawędzi grafu G
A_G	macierz sąsiedztwa grafu G
$\deg(v)$	stopień wierzchołka $v \in V$ grafu $G=(V,E)$
$\delta(G)$	minimalny stopień wierzchołka w grafie G
$\Delta(G)$	maksymalny stopień wierzchołka w grafie G
$\rho(u,v)$	odległość wierzchołków $u,v \in V$ w grafie spójnym $G=(V,E)$
$\mathrm{diam}\, G$	średnica grafu spójnego G
$\rho(p,q)$	odległość punktów $p,q \in A$ afinicznej przestrzeni euklidesowej A
$\rho(S,T)$	odległość zbiorów $\varnothing \neq S,T \subseteq A$ afinicznej przestrzeni euklidesowej A
$P(p;v_1,\dots,v_n)$	równoległościan dany przez punkt $p \in A$ oraz wektory $v_1,\dots,v_n \in \mathrm{T}(A)$
$S(p_0,\dots,p_n)$	sympleks dany przez punkty $p_0,\dots,p_n \in A$
$\mathrm{F}^n(V)$	przestrzeń n-form na przestrzeni liniowej V (4.70, 6.1)
$\mathrm{PF}^n(V)$	przestrzeń form wielomianowych stopnia $\leqslant n$ na przestrzeni liniowej V (6.1)
$\mathrm{PF}(V)$	przestrzeń form wielomianowych na przestrzeni liniowej V (6.1)
$\mathrm{CS}(S)$	zbiór punktów symetrii niepustego podzbioru S przestrzeni afinicznej X
$\mathbb{P}(V)$	przestrzeń rzutowa przestrzeni wektorowej V
$\mathbb{P}^n(K)$	przestrzeń rzutowa przestrzeni wektorowej K^{n+1} dla $n \geqslant 0$
$\dim \mathbb{P}(V)$	wymiar przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$

$[v]$	element przestrzeni $\mathbb{P}(V)$ wyznaczony przez wektor $0 \neq v \in V$
$[x_0, \dots, x_n]$	element przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$ wyznaczony przez wektor $0 \neq (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$
$\mathbb{P}(f)$	odwzorowanie rzutowe wyznaczone przez monomorfizm $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (6.23)
$\mathrm{PGL}(V)$	rzutowa grupa liniowa przestrzeni wektorowej V (6.24)
$\mathrm{Hom}(U_1, \dots, U_n; V)$	przestrzeń odwzorowań n-liniowych z $U_1 \times \dots \times U_n$ w V
$\mathrm{Hom}^n(U, V)$	przestrzeń odwzorowań n-liniowych z $U \times \dots \times U$ w V
$\mathrm{Hom}^n_s(U, V)$	przestrzeń symetrycznych odwzorowań n-liniowych z $U \times \dots \times U$ w V
$\mathrm{Hom}^n_a(U, V)$	przestrzeń antysymetrycznych odwzorowań n-liniowych z $U \times \dots \times U$ w V
$V_1 \otimes \dots \otimes V_n$	iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych $V_1, \dots, V_n$ (7.2)
$\mathrm{T}^n V$	n-ta potęga tensorowa przestrzeni wektorowej V (7.2)
$\Sigma^n V$	n-ta potęga symetryczna przestrzeni wektorowej V (7.10)
$\Lambda^n V$	n-potęga zewnętrzna przestrzeni wektorowej V (7.10)
$v_1 \otimes \dots \otimes v_n$	iloczyn tensorowy wektorów $v_i \in V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ (tensor prosty) (7.2)
$v_1 \odot \dots \odot v_n$	iloczyn symetryczny wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ (7.10)
$v_1 \wedge \dots \wedge v_n$	iloczyn zewnętrzny wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ (n-wektor prosty) (7.10)
$f_1 \otimes \dots \otimes f_n$	iloczyn tensorowy homomorfizmów $f_i \in \mathrm{Hom}(U_i, V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ (7.15)
$\mathrm{T}^n f$	n-ta potęga tensorowa homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (7.15)
$\Sigma^n f$	n-ta potęga symetryczna homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (7.15)
$\Lambda^n f$	n-ta potęga zewnętrzna homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ (7.15)
$\mathrm{T}(V)$	algebra tensorowa przestrzeni wektorowej V (7.23)
$\Sigma(V)$	algebra symetryczna przestrzeni wektorowej V (7.23)
$\Lambda(V)$	algebra zewnętrzna przestrzeni wektorowej V (7.23)
$\mathrm{Lie}(A)$	algebra Liego stowarzyszona z algebrą łączną A (7.34)
$\mathfrak{sl}_n(K)$	specjalna liniowa algebra Liego stopnia n nad ciałem K (7.33)
$\mathfrak{o}(\varphi)$	ortogonalna algebr Liego formy półtoraliniowej φ (7.35)
$\mathfrak{so}(\varphi)$	specjalna ortogonalna algebr Liego formy półtoraliniowej φ (7.35)
$\mathfrak{so}(p, q)$	ortogonalna algebr Liego typu (p, q) (7.35)
$\mathfrak{so}(n)$	ortogonalna algebr Liego stopnia n (7.35)
$\mathfrak{u}(p, q)$	unitarna algebr Liego typu (p, q) (7.35)
$\mathfrak{su}(p, q)$	specjalna unitarna algebr Liego typu (p, q) (7.35)
$\mathfrak{u}(n)$	unitarna algebr Liego stopnia n (7.35)
$\mathfrak{su}(n)$	specjalna unitarna algebr Liego stopnia n (7.35)
$\mathfrak{sp}_{2n}(K)$	symplektyczna algebr Liego stopnia $2n$ nad ciałem K (7.35)
$\mathrm{U}(L)$	algebra obwiednia algebry Liego L (7.37)
$\mathrm{Cl}(Q)$	algebra Clifforda formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (7.38)
$\mathrm{Cl}(p, q)$	rzeczywista algebra Clifforda typu (p, q) (7.39)
$\mathrm{Cl}(n)$	zespolona algebra Clifforda stopnia n (7.40)
$\lim \mathcal{S}$	granica systemu odwrotnego $\mathcal{S}$ (oznaczana też jako $\varprojlim \mathcal{S}$)
$\operatorname{colim} \mathcal{S}$	kogranica systemu prostego $\mathcal{S}$ (oznaczana też jako $\varinjlim \mathcal{S}$)
$\lim f$	granica morfizmu systemów odwrotnych $f \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ (7.50)
$\operatorname{colim} f$	kogranica morfizmu systemów prostych $f \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ (7.45)
$\mathrm{Obj}\, \mathscr{C}$	klasa obiektów kategorii $\mathscr{C}$ (oznaczana też jako $\lvert\mathscr{C}\rvert$)
$\mathrm{Mor}\, \mathscr{C}$	klasa morfizmów kategorii $\mathscr{C}$
$\mathscr{C}(A, B)$	zbiór morfizmów pomiędzy obiektami $A, B \in \lvert\mathscr{C}\rvert$

$\operatorname{Dom} f$	dziedzina morfizmu $f \in \operatorname{Mor} \mathscr{C}$
$\operatorname{Cod} f$	kodziedzina (przeciwdziedzina) morfizmu $f \in \operatorname{Mor} \mathscr{C}$
$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$	kategoria przeciwna do kategorii $\mathscr{C}$ (8.1)
$\mathscr{C}_1 \times \dots \times \mathscr{C}_1$	produkt kategorii $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_n$ (8.2)
$\mathsf{0}$	kategoria pusta (8.13)
$\mathsf{1}$	kategoria o jednym obiekcie i jednym morfizmie (8.13, 8.24)
Set	kategoria zbiorów
Rel	kategoria relacji (8.3)
Cat	kategoria małych kategorii
Quiv	kategoria kołczanów (8.40)
$K\text{-}\mathsf{Vect}$	kategoria przestrzeni liniowych nad ciałem K
$K\text{-}\mathsf{QSp}$	kategoria przestrzeni kwadratowych nad ciałem K (8.4)
$K\text{-}\mathsf{Lie}$	kategoria algebr Liego nad ciałem K
$K\text{-}\mathsf{Alg}$	kategoria unitalnych algebr łącznych nad ciałem K (8.5)
$K\text{-}\mathsf{CAlg}$	kategoria przemiennych unitalnych algebr łącznych nad ciałem K (8.7)
$\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$	kategoria funktorów z $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$ (oznaczana też jako $\operatorname{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ lub $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$)
$(F \downarrow G)$	comma kategoria funktorów $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ oraz $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ (8.23)
$\mathscr{C}/A$	płat kategorii $\mathscr{C}$ nad $A \in \lvert\mathscr{C}\rvert$ (oznaczany też jako $(A \downarrow \mathscr{C})$) (8.24)
$\mathscr{C}_Q$	kategoria wolna nad kołczanem Q (8.41)
$\operatorname{Rep}_K(Q)$	kategoria reprezentacji (K-liniowych) kołczanu Q (8.42)
$\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}$	kategoria lewostronnych $\mathcal{A}$-modułów nad monoidem $\mathcal{A}$ (8.47)
$\mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$	kategoria prawostronnych $\mathcal{A}$-modułów nad monoidem $\mathcal{A}$ (8.48)
$A_1 \times \dots \times A_n$	produkt obiektów $A_1, \dots, A_n$ kategorii $\mathscr{C}$
$A_1 + \dots + A_n$	koprodukt obiektów $A_1, \dots, A_n$ kategorii $\mathscr{C}$
$\prod_{i \in I} A_i$	produkt rodziny obiektów $(A_i)_{i \in I}$ kategorii $\mathscr{C}$
$\coprod_{i \in I} A_i$	koprodukt rodziny obiektów $(A_i)_{i \in I}$ kategorii $\mathscr{C}$
$\operatorname{Eq}(f, g)$	ekwalizator morfizmów $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$ (oznaczany też jako $\operatorname{Ker}(f, g)$)
$\operatorname{Coeq}(f, g)$	koekwalizator morfizmów $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$ (oznaczany też jako $\operatorname{Coker}(f, g)$)
$A \times_I B$	pullback morfizmów $f \in \mathscr{C}(A, I)$ oraz $g \in \mathscr{C}(B, I)$
$A +_I B$	pushout morfizmów $f \in \mathscr{C}(I, A)$ oraz $g \in \mathscr{C}(I, B)$
$\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Y}$	iloczyn tensorowy prawego $\mathcal{A}$-modułu $\mathcal{X}$ oraz lewego $\mathcal{A}$-modułu $\mathcal{Y}$ (8.48)
$I_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$	zanurzenie podkategorii $\mathscr{B}$ w kategorię $\mathscr{C}$ (8.21)
$I_{\mathscr{C}}$	funktor identycznościowy na kategorii $\mathscr{C}$ (oczywiście $I_{\mathscr{C}} = I_{\mathscr{C}\mathscr{C}}$) (8.21)
$G \circ F$	złożenie funktorów $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ oraz $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ (8.22)
$\mathscr{C}(A, -)$	funktor reprezentowalny z $\mathscr{C}$ w Set wyznaczony przez obiekt $A \in \lvert\mathscr{C}\rvert$ (8.26)
Δ_X	funktor stały z $\mathscr{I}$ w $\mathscr{C}$ wyznaczony przez obiekt $X \in \lvert\mathscr{C}\rvert$
$\operatorname{Nat}(F, G)$	klasa transformacji naturalnych pomiędzy funktorami $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
$\lim F$	granica funktora $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ (oznaczana też jako $\varprojlim F$)
$\operatorname{colim} F$	kogranica funktora $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ (oznaczana też jako $\varinjlim F$)
$F \dashv G$	para funktorów sprzężonych $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ oraz $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$

1 Endomorfizmy

Zadanie 1.1. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że istnieją endomorfizmy $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}(V)$ spełniające

$$f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_2 = f_3 \circ f_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_3 = -\operatorname{id}_V .$$

(1) Udowodnij, że $\dim V$ jest liczbą podzielną przez 4.

(2) Wykaż, iż istnieje taka baza B przestrzeni V, że macierze $M_B(f_s)$ dla $1 \leqslant s \leqslant 3$ mają postać blokowo-diagonalną $M_B(f_s) = \mathrm{diag}(J_s, \ldots, J_s)$, gdzie

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1.2. Załóżmy, że $n \geqslant 1$. Wyznacz wszystkie macierze $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ spełniające $PAP^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dla dowolnej macierzy $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 1.3. Niech $z \in \mathbb{C}$. Uzasadnij, że macierz $A = \mathrm{diag}(z, \overline{z}) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ jest podobna (nad ciałem $\mathbb{C}$) do macierzy rzeczywistej 2×2.

Zadanie 1.4. Które z macierzy:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

są macierzami tego samego endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^3$, ale w różnych bazach? Które z powyższych macierzy są macierzami symetrii?

Zadanie 1.5. Niech U, V, W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Załóżmy, że $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Wykaż, że:

(1) $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$.

(2) $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}\, f - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$.

Wywnioskuj z punktów (1) oraz (2), że gdy $h \in \mathrm{End}(V)$, to:

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, h^{n+1} = \dim \mathrm{Ker}\, h + \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{Im}\, h^i \cap \mathrm{Ker}\, h)$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

(4) $\dim \mathrm{Im}\, h^{n+1} = \dim \mathrm{Im}\, h - \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathrm{Im}\, h^i \cap \mathrm{Ker}\, h)$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 1.6. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Dowiedź, że gdy $f \in \mathrm{End}(V)$, to

$$2 \operatorname{rank} f^n \leqslant \operatorname{rank} f^{n-1} + \operatorname{rank} f^{n+1}$$

dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 1.7. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Uzasadnij, że gdy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny, zaś wielomian $p \in K[x]$ spełnia $p(0) \neq 0$, to endomorfizm $p(f) \in \mathrm{End}(V)$ jest automorfizmem.

Zadanie 1.8. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $\mathrm{tr}\, A = 0$.

(2) istnieją takie macierze $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, że $A = BC - CB$.

(3) istnieją takie macierze $B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, że $A = B + C$ oraz $B^n = C^n = 0$.

(4) istnieje takie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, że macierz PAP^{-1} ma same zera na diagonali.

Czy warunki (1)–(4) pozostaną równoważne gdy ciało $\mathbb{R}$ zastąpimy innym ciałem? Jeśli nie, to spróbuj scharakteryzować te ciała K, dla których (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4) dla każdego $n \geqslant 1$ i dowolnej macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 1.9. Niech $n \geqslant 2$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznacz wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Zadanie 1.10. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$$

Wyznacz wartości własne macierzy $B = AA^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 1.11. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A = [a_{jk}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Wykaż, że

$$|\lambda| \leqslant \Big(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

dla dowolnej wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ macierzy A.

Zadanie 1.12. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że G jest skończoną podgrupą grupy $\mathrm{GL}_n(K)$. Udowodnij, że gdy $A = \sum_{X \in G} X \in \mathrm{M}_n(K)$, to $1 \leqslant |\sigma(A)| \leqslant 2$. Jakie mogą być wartości własne macierzy A? Czy potrafisz wskazać przykłady, w których macierz A ma dokładnie jedną wartość własną lub ma dwie różne wartości własne?

Uwaga. Podgrupy grupy $\mathrm{GL}_n(K)$ nazywamy *grupami liniowymi.* Ogólniej, gdy $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K, to podgrupy grupy $\mathrm{Aut}(V)$ (oznaczanej także przez $\mathrm{GL}(V)$) nazywamy *grupami liniowymi.* Gdy $\dim V = n$, to oczywiście $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$.

Zadanie 1.13. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{End}(V)$. Uzasadnij, że:

(1) gdy $\lambda \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, to dla dowolnego wielomianu $p \in K[x]$ skalar $p(\lambda)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$.

(2) jeżeli skalar $p(\lambda)$ dla pewnego $\lambda \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$ oraz $p(x) - p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i) \in K[x]$, to przynajmniej jeden ze skalarów $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ jest wartością własną endomorfizmu f.

Wskaż przykład takiego endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, wielomianu $p \in K[x]$ oraz skalara $\lambda \in K$, że skalar $p(\lambda)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$, natomiast λ nie jest wartością własną endomorfizmu f.

Zadanie 1.14. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. *Spektrum* (lub *widmem*) endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy zbiór

$$\sigma(f) = \{\lambda \in K : f - \lambda\,\mathrm{id}_V \notin \mathrm{Aut}(V)\}.$$

(1) Uzasadnij, że gdy $\dim V < \infty$, to $\sigma(f)$ składa się tylko i wyłącznie z wartości własnych endomorfizmu f oraz $|\sigma(f)| \leqslant \deg \mu_f$.

(2) Wskaż przykład przestrzeni V oraz takiego endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, że f nie posiada wartości własnych, ale $\sigma(f) \neq \varnothing$.

Zadanie 1.15. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Przypomnijmy, że *komutatorem* macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ nazywamy macierz $[A, B] = AB - BA$. Dla $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ zdefiniujmy odwzorowania $f_A \in \mathrm{End}(\mathrm{M}_n(K))$ oraz $u_P \in \mathrm{Aut}(\mathrm{M}_n(K))$ wzorami

$$f_A(X) = [A, X] \qquad \text{oraz} \qquad u_P(X) = PXP^{-1}.$$

Wykaż, że:

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ dla $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$.

(2) $f_A \circ f_B - f_B \circ f_A = f_{[A,B]}$ dla $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$.

(3) $u_P \circ u_Q = u_{PQ}$ oraz $u_P^{-1} = u_{P^{-1}}$ dla $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(4) $u_P \circ f_A \circ u_P^{-1} = f_{u_P(A)}$ dla $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

(5) jeśli $\mathrm{char}\, K \nmid n$, to $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A \iff AB = BA$ dla $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$.

(6) jeśli macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jest diagonalizowalna, to endomorfizm f_A również.

Uwaga. Równość w punkcie (1) nazywana jest *tożsamością Jacobiego*; jest ona jednym z aksjomatów definiujących struktury nazywane *algebrami Liego*.

Zadanie 1.16. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ spełniają $AB - BA = \lambda A$ dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Dowiedź, że $A^k B - BA^k = k\lambda A^k$ dla dowolnego $k \geqslant 1$ i następnie wywnioskuj stąd, że macierz A jest nilpotentna. Czy teza pozostanie prawdziwa jeśli pominiemy założenie $\mathrm{char}\, K = 0$? Rozważ osobno przypadki $\mathrm{char}\, K > n^2$ oraz $\mathrm{char}\, K < n^2$ (oczywiście $\mathrm{char}\, K \neq n^2$).

Zadanie 1.17. Niech $V \neq 0$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K charakterystyki zero. Udowodnij, że gdy endomorfizmy $f, g \in \operatorname{End}(V)$ spełniają $f \circ g - g \circ f = f$ oraz $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, to $\sigma(g) = \{\lambda + j : 0 \leqslant j < n\}$ dla pewnego $\lambda \in K$, gdzie $n = \dim V$. W szczególności endomorfizm g jest diagonalizowalny.

Zadanie 1.18. Niech $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią funkcji gładkich na $\mathbb{R}$. Dla $a \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy endomorfizm $\Phi_a \in \operatorname{End}(V)$ wzorem

$$\Phi_a(f)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + axf'(x).$$

Niech $n \geqslant 0$. Pokaż, że:

(1) *n-ty wielomian Czebyszewa* T_n, wyznaczony przez warunek $T_n(\cos x) = \cos nx$, jest wektorem własnym endomorfizmu Φ_1 stowarzyszonym z wartością własną n^2.

(2) *n-ty wielomian Legendre'a* P_n, określony wzorem $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, jest wektorem własnym endomorfizmu Φ_2 stowarzyszonym z wartością własną $n(n+1)$.

Uwaga. Można sprawdzić (potrafisz to zrobić?), że

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k}$$

oraz

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k},$$

gdzie $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$, to *część całkowita* liczby $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.19. Niech $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Wyznacz wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ danego wzorem $\Phi(f) = f'$.

Zadanie 1.20. Niech

$$V = \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f(x + 2\pi) = f(x) \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}\}$$

będzie przestrzenią gładkich funkcji okresowych (o okresie 2π) na $\mathbb{R}$. Niech endomorfizm $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ dany będzie wzorem $\Phi(f) = -f''$.

(1) Wykaż, że zbiór wartości własnych endomorfizmu Φ jest postaci $\{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$.

(2) Opisz podprzestrzenie własne endomorfizmu Φ.

Zadanie 1.21. Wyznacz wartości własne i podprzestrzenie własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}), \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Zadanie 1.22. Niech p będzie liczbą pierwszą. Znajdź wartości własne i podprzestrzenie własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_p).$$

Zadanie 1.23. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu f. Wyznacz macierz $M_B(f)$ endomorfizmu f w znalezionej bazie B.

Zadanie 1.24. Niech $K = \mathbb{F}_3$ oraz $V = K^3$. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ zadany warunkiem

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz macierz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(K).$$

(1) Znajdź takie bazy A, B przestrzeni V, aby $M_{AB}(f) = M$.

(2) Czy istnieje baza C przestrzeni V spełniająca $M_C(f) = M$?

Zadanie 1.25. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ jest zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Wiedząc, że $\lambda = 5$ jedyną wartością własną dla f wyznacz liczby $a, b \in \mathbb{R}$ oraz opisz jedyną podprzestrzeń własną endomorfizmu f.

Zadanie 1.26. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K i przypuśćmy, że endomorfizmy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ są przemienne. Wykaż, że gdy $\dim V = n < \infty$ oraz f ma n różnych wartości własnych, to istnieje taki wielomian $p \in K[x]$, że $g = p(f)$.

Zadanie 1.27. Niech $S \neq \varnothing$ będzie zbiorem skończonym. Rozważmy przestrzeń liniową $V = \mathcal{P}(S)$ nad ciałem $\mathbb{F}_2$ z działaniami

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \text{oraz} \qquad \lambda \cdot A = \begin{cases} \varnothing & \text{gdy } \lambda = 0, \\ A & \text{gdy } \lambda = 1. \end{cases}$$

Ustalmy zbiór $A \in V$ i zdefiniujmy odwzorowanie $f\colon V \to V$ wzorem $f(X) = A \cap X$.

(1) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.

(2) Wyznacz wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu f.

(3) Czy endomorfizm f jest diagonalizowalny?

Zadanie 1.28. Załóżmy, że macierz endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ w bazie standardowej ma wyrazy rzeczywiste. Wykaż, że gdy f nie ma rzeczywistych wartości własnych, to istnieje taka liczba $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz baza B przestrzeni $\mathbb{C}^2$, że $M_B(f) = \mathrm{diag}(z, \overline{z})$.

Zadanie 1.29. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Udowodnij, że gdy $\operatorname{rank} A = 1$, to macierz A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Zadanie 1.30. Przypuśćmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ jest diagonalizowalna, ale nie jest diagonalna. Dowiedź, że każda macierz $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ przemienna z A jest diagonalizowalna.

Zadanie 1.31. Wykaż, że każda symetryczna macierz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Czy teza pozostaje prawdziwa dla symetrycznych macierzy z $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?

Zadanie 1.32. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 2 & 5 \\ t & 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

jest diagonalizowalna? Dla każdego takiego t znajdź taką macierz diagonalną $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ oraz macierz $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, że $A = PDP^{-1}$.

Zadanie 1.33. Dla jakich liczb pierwszych p macierz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ -12 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_p)$$

jest diagonalizowalna?

Zadanie 1.34. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 15 & -9 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Czy istnieje taka macierz $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, że macierz $P^{-1}AP$ jest diagonalna? Jeśli tak, to podaj przykład takiej macierzy.

Zadanie 1.35. Niech $n \geqslant 2$ oraz $A = [a_{jk}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, gdzie

$$a_{jk} = (k - j) \bmod n \quad (1 \leqslant j, k \leqslant n).$$

Udowodnij, że macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$. Czy A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{Q}$ lub $\mathbb{R}$?

Zadanie 1.36. Niech $n \geqslant 2$. Czy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, dany wzorem

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to wyznacz bazę B przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu f oraz macierz $M_B(f)$.

Zadanie 1.37. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Wykaż, że gdy endomorfizmy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ spełniają $f^2 = g^2 = \mathrm{id}_V$, to istnieje taka niezmiennicza dla f oraz g podprzestrzeń $U \subseteq V$, że $1 \leqslant \dim U \leqslant 2$.

Zadanie 1.38. *Ciąg Fibonacciego* $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ definiujemy rekurencyjnie:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

(1) Znajdź taką macierz $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, że $X_{n+1} = AX_n$ dla dowolnego $n \geqslant 0$, gdzie

$$X_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Następnie znajdź wzór na A^n dla $n \geqslant 0$.

(2) Korzystając z punktu (1) wyznacz jawny wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

(3) Pokaż, że ciąg $(\frac{1}{F_n}X_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do wektora własnego macierzy A z punktu (1). Jaka jest wartość własna odpowiadająca temu wektorowi własnemu?

Zadanie 1.39. Zdefiniujmy ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = -1, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

Wyznacz jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 1.40. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Oblicz A^n oraz B^n dla dowolnego $n \geqslant 0$.

Zadanie 1.41. Udowodnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$, ale nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 1.42. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 9 \\ 12 & -7 & 18 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Znajdź taką macierz $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, że $A = B^3$. Uzasadnij, że takich macierzy B jest dokładnie dwadzieścia siedem, a wśród nich tylko jedna macierz rzeczywista — wyznacz ją.

Zadanie 1.43. Załóżmy, że K jest ciałem i przypuśćmy, że macierze $A, B \in \mathrm{M}_2(K)$ nie są skalarne. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) macierze A oraz B są podobne.

(2) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ oraz $\det A = \det B$.

(3) $\chi_A = \chi_B$.

Zadanie 1.44. Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ oraz $n \geqslant 1$.

(1) Przypuśćmy, że dla macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ zachodzi $A^2 = I$. Udowodnij, że A jest podobna do macierzy $\operatorname{diag}(I_p, -I_q)$ dla pewnych $p, q \geqslant 0$ spełniających $p + q = n$.

(2) Wykorzystując punkt (1) uzasadnij, że gdy dla macierzy $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ zachodzi $A^2 = B^2 = I$ oraz $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, to macierze te są podobne.

Zadanie 1.45. Niech

$$A = \begin{bmatrix} t & -t & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Wyznacz wszystkie liczby $t \in \mathbb{R}$, dla których macierz A^3 jest diagonalizowalna.

(2) Wyznacz wszystkie liczby $t \in \mathbb{R}$, dla których macierze A^5 oraz A^7 są podobne.

(3) Wyznacz wszystkie liczby $t \in \mathbb{R}$, dla których $A^4 = 0$.

Zadanie 1.46. Niech $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ są podobne nad $\mathbb{C}$. Wykaż, że macierze A, B są podobne nad $\mathbb{R}$.

Uwaga. Prawdziwe jest daleko idące uogólnienie. Mianowicie gdy K jest podciałem ciała L oraz macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ są podobne nad L, to A, B są podobne nad K. Możesz spróbować udowodnić ten fakt (jeśli nie w pełnej ogólności, to chociaż przy założeniu, że ciało K jest nieskończone).

Zadanie 1.47. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Dla $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ zdefiniujmy wielomian $p(x) = \det(A + xB) \in K[x]$ (tutaj $A + xB$ traktujemy jako macierz $n \times n$ o wyrazach w ciele funkcji wymiernych $K(x)$). Udowodnij, że $\deg p \leqslant \operatorname{rank} B$.

Zadanie 1.48. Niech $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Dowiedź, że gdy $\det A = \det B = \det(A \pm B) = 0$, to $\det(sA + tB) = 0$ dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.49. Załóżmy, że K jest ciałem. Pokaż, że:

(1) $\chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$ dla $A \in \mathrm{M}_2(K)$.

(2) $\chi_A(x) = -x^3 + (\operatorname{tr} A)x^2 - (\operatorname{tr} \operatorname{adj} A)x + \det A$ dla $A \in \mathrm{M}_3(K)$.

Zadanie 1.50. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Przypuśćmy, że macierze $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $B \in \mathrm{M}_m(K)$ oraz $C \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ spełniają $AC = CB$. Udowodnij, że gdy $\operatorname{rank} C = r$ (oczywiście $0 \leqslant r \leqslant \min\{n, m\}$), to wielomiany charakterystyczne χ_A, χ_B macierzy A, B mają wspólny dzielnik stopnia r.

Zadanie 1.51. Załóżmy, że $V = \mathbb{C}^2$. Opisz podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu $f \in \operatorname{End}(V)$ danego wzorem

$$f(x, y) = (3x + 2y, y).$$

Ile (maksymalnie) podprzestrzeni niezmienniczych może mieć *nieskalarny* (tzn. różny od $\lambda \operatorname{id}_V$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$) endomorfizm $g \in \operatorname{End}(V)$?

Zadanie 1.52. Niech $X = \mathbb{R}^4$ i zdefiniujmy $f \in \operatorname{End}(X)$ wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0).$$

Wyznacz wartości własne endomorfizmu f i odpowiadające im podprzestrzenie własne. Czy istnieją takie f-niezmiennicze podprzestrzenie $U, V \subseteq X$, że $\dim U = \dim V$ oraz $X = U \oplus V$?

Zadanie 1.53. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Udowodnij, że dla dowolnego endomorfizmu $f \in \operatorname{End}(V)$ istnieje podprzestrzeń f-niezmiennicza $U \subseteq V$ spełniająca $1 \leqslant \dim U \leqslant 2$. Wskaż przykład, w którym f-niezmiennicza podprzestrzeń wymiaru 1 nie istnieje.

Zadanie 1.54. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Załóżmy, że $n \geqslant 1$, zaś wielomiany $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ są parami względnie pierwsze. Dowiedź, że gdy podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest f-niezmiennicza oraz $v_1 + \cdots + v_n \in U$, gdzie $v_i \in \operatorname{Ker} p_i(f)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to $v_1, \ldots, v_n \in U$.

Zadanie 1.55. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Pokaż, że:

(1) podprzestrzenie $\operatorname{Ker} f^n$ oraz $\operatorname{Im} f^n$ są f-niezmiennicze dla dowolnego $n \geqslant 0$.

(2) gdy $f \circ g = g \circ f$, to podprzestrzenie $\operatorname{Ker} g$ oraz $\operatorname{Im} g$ są f-niezmiennicze

(3) gdy $g \in \operatorname{Aut}(V)$ oraz podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest f-niezmiennicza, to podprzestrzeń $g(U)$ jest h-niezmiennicza, gdzie $h = g \circ f \circ g^{-1}$.

Zadanie 1.56. Przypuśćmy, że X jest przestrzenią wektorową oraz $f \in \operatorname{End}(X)$. Niech $0 \neq v \in X$ oraz $U = \operatorname{Span}\{f^j(v) : j \geqslant 0\}$. Dowiedź, że:

(1) U jest najmniejszą f-niezmienniczą podprzestrzenią X zawierającą wektor v.

(2) gdy $\dim U = n < \infty$, to $U = \operatorname{Span}\{f^j(v) : 0 \leqslant j < n\}$. W szczególności zbiór $B = \{f^j(v) : 0 \leqslant j < n\}$ jest bazą przestrzeni U. Jak wygląda macierz $M_B(f|_U)$?

Czy podprzestrzeń U zawsze posiada f-niezmiennicze dopełnienie? Czy U może zawierać niezerową i różną od U podprzestrzeń f-niezmienniczą?

Uwaga. Podprzestrzeń U zdefiniowaną w zadaniu nazywamy *podprzestrzenią cykliczną* endomorfizmu f wyznaczoną przez wektor $v \in X$.

Zadanie 1.57. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$. Przypuśćmy, że podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest f-niezmiennicza, zaś wektor $v \in V$ spełnia $p_i(f)(v) \in U$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Uzasadnij, że również $d(f)(v) \in U$, gdzie $d = \gcd(p_1, \ldots, p_n) \in K[x]$.

Zadanie 1.58. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Przypuśćmy, że $\dim V = n < \infty$ oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Wykaż, że:

(1) istnieje wielomian $0 \neq p \in K[x]$ spełniający $p(f) = 0$.

(2) wśród wielomianów $0 \neq p \in K[x]$ spełniających $p(f) = 0$ istnieje dokładnie jeden wielomian *unormowany* (tzn. o współczynniku wiodącym równym 1) minimalnego stopnia (nazywany *wielomianem minimalnym* endomorfizmu f i oznaczany μ_f).

(3) wielomian minimalny μ_f dzieli wielomian charakterystyczny χ_f; w szczególności $\deg \mu_f \leqslant \deg \chi_f = n$.

(4) wielomian charakterystyczny χ_f dzieli wielomian μ_f^n.

Wywnioskuj z punktów (3) oraz (4), że gdy wielomian $p \in K[x]$ jest *nierozkładalny* (lub inaczej *nieprzywiedlny*; tzn. gdy $\deg p \geqslant 1$ oraz $p = gh \Longrightarrow g \in K$ lub $h \in K$ dla dowolnych $g, h \in K[x]$), to p dzieli wielomian μ_f wtedy i tylko wtedy, gdy p dzieli wielomian χ_f. W szczególności wielomiany μ_f oraz χ_f mają te same pierwiastki.

Uwaga. Zadanie to zapewnia, że gdy $\mu_f = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ jest rozkładem wielomianu μ_f na parami różne unormowane wielomiany nierozkładalne $p_1, \ldots, p_s \in K[x]$ (zakładamy, że $k_1, \ldots, k_s \geqslant 1$), to istnieją takie liczby $n_i \geqslant k_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant s$, że $\chi_f = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ (oczywiście $\sum_{i=1}^{s} n_i \deg p_i = n$).

Zadanie 1.59. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $n \geqslant 1$. Niech $f \in \mathrm{End}(V)$ oraz $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, gdzie podprzestrzenie $V_1, \ldots, V_n$ są f-niezmiennicze. Dowiedź, że $\chi_f = \chi_{f_1} \cdots \chi_{f_n}$ oraz $\mu_f = \mathrm{lcm}(\mu_{f_1}, \ldots, \mu_{f_n})$, gdzie $f_i = f|_{V_i} \in \mathrm{End}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Zadanie 1.60. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Niech $f \in \mathrm{End}(V)$, natomiast $\mu_f = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ będzie rozkładem wielomianu μ_f na parami różne unormowane wielomiany nierozkładalne $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, gdzie $k_1, \ldots, k_n \geqslant 1$. Zdefiniujmy $V_i = \mathrm{Ker}\, p_i^{k_i}(f)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

(1) Pokaż, że podprzestrzenie $V_1, \ldots, V_n$ są f-niezmiennicze oraz $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

(2) Uzasadnij, że $\mu_{f|_{V_i}} = p_i^{k_i}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

Zadanie 1.61. Wyznacz wielomiany charakterystyczne i minimalne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}), \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q}).$$

Zadanie 1.62. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 2$. Pokaż, że gdy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(K),$$

to $\mu_A(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ oraz $\chi_A(x) = (-1)^n \mu_A(x)$.

Zadanie 1.63. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Udowodnij, że gdy $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, to

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{1}{\det A}(-x)^n \chi_A(x^{-1}).$$

Podaj przykład takiej macierzy $B \in \mathrm{GL}_n(K)$, że $B \neq B^{-1}$ oraz $\chi_B = \chi_{B^{-1}}$.

Zadanie 1.64. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $1 \leqslant k \leqslant n$.

(1) Wykaż, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jest nilpotentna, to $\chi_A(x) = (-x)^n$.

(2) Wskaż przykład takiej macierzy nilpotentnej $A \in \mathrm{M}_n(K)$, że $\mu_A(x) = x^k$.

Zadanie 1.65. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Niech $f \in \mathrm{End}(V)$ oraz $U \subseteq V$ będzie podprzestrzenią f-niezmienniczą. Pokaż, że:

(1) wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ dzieli wielomian χ_f.

(2) wielomian minimalny endomorfizmu $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ dzieli wielomian μ_f.

(3) endomorfizm f jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomian minimalny μ_f jest iloczynem parami różnych czynników liniowych.

(4) jeżeli endomorfizm f jest diagonalizowalny, to endomorfizm $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ jest również diagonalizowalny.

Zadanie 1.66. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ jest przestrzenią liniową. Jeśli $f_i \in \mathrm{End}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to zdefiniujmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ wzorem

$$f(v_1, \ldots, v_n) = (f_1(v_1), \ldots, f_n(v_n)).$$

Udowodnij, że endomorfizm f jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ są diagonalizowalne.

Uwaga. Endomorfizm f zdefiniowany w zadaniu nazywamy *sumą prostą endomorfizmów* $f_1, \ldots, f_n$ i piszemy $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_n$.

Zadanie 1.67. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru oraz $n \geqslant 1$. Dowiedź, że gdy endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ są diagonalizowalne, to następujące warunki są równoważne:

(1) endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ są *jednocześnie diagonalizowalne*, tzn. istnieje taka baza B przestrzeni V, że macierze $M_B(f_1), \ldots, M_B(f_n)$ są diagonalne (innymi słowy elementy bazy B są wektorami własnymi wszystkich endomorfizmów $f_1, \ldots, f_n$).

(2) endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ są *przemienne* (tzn. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$).

Czy teza zachodzi dla nieskończonych rodzin diagonalizowalnych endomorfizmów?

Definicja. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Powiemy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest *triangulizowalny*, gdy istnieje taka baza B przestrzeni V, że macierz $M_B(f)$ jest górno-trójkątna.

Zadanie 1.68. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Dowiedź, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest triangulizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny μ_f rozkłada się w $K[x]$ na czynniki liniowe.

Zadanie 1.69. Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $n \geqslant 1$. Załóżmy, że endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{End}(X)$ są parami przemienne oraz triangulizowalne. Pokaż, że $f_1, \ldots, f_n$ są *jednocześnie triangulizowalne*, tzn. istnieje taka baza B przestrzeni X, że macierze $M_B(f_1), \ldots, M_B(f_n)$ są górno-trójkątne. Czy jednoczesna triangulizowalność endomorfizmów $f_1, \ldots, f_n$ implikuje ich przemienność?

Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(X)$ jest *półprosty*, gdy każda f-niezmiennicza podprzestrzeń $U \subseteq X$ posiada f-niezmiennicze dopełnienie, tzn. $X = U \oplus V$ dla pewnej f-niezmienniczej podprzestrzeni $V \subseteq X$.

Zadanie 1.70. Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{End}(X)$. Załóżmy, że $\mu_f = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ jest rozkładem wielomianu μ_f na parami różne unormowane wielomiany nierozkładalne $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, gdzie $k_1, \ldots, k_n \geqslant 1$. Uzasadnij, że endomorfizm f jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy $k_1 = \cdots = k_n = 1$. W szczególności gdy ciało K jest algebraicznie domknięte, to f jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy f jest diagonalizowalny.

2 Postać Jordana

Zadanie 2.1. Opisz wszystkie macierze $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ spełniające $A^2 = I$ oraz $\det A > 0$.

Zadanie 2.2. Wyznacz postać Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 5 & t & 1 \\ 0 & 5 & t-1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & t & 1 & 0 \\ 0 & 5 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2.3. Niech $n \geqslant 2$. Znajdź postać Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

leżących w $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 2.4. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_7).$$

(1) Znajdź taką macierz $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_7)$, aby macierz $P^{-1}AP$ była w postaci Jordana.

(2) Zbadaj czy macierze A oraz A^3 są podobne.

Zadanie 2.5. Niech $A = J_{10}(\lambda) \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{F}_3)$. Wyznacz postać Jordana macierzy A^{15} w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{F}_3$.

Zadanie 2.6. Niech $n \geqslant 2$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Wyznacz postać Jordana macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Zadanie 2.7. Załóżmy, że $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$. Niech $N = J_n(0) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Wyznacz postać Jordana macierzy $A = \lambda I + N^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 2.8. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ spełnia równanie $A^5 = I$. Wykaż, że gdy $1 \notin \sigma(A)$, to liczba n jest podzielna przez 4.

Zadanie 2.9. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^5)$ spełnia:

$$f^2 \neq 0, \qquad f^6 = 0, \qquad \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 2.$$

Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) możliwe postacie Jordana macierzy $M_{\mathrm{st}}(f)$.

Zadanie 2.10. Wyznacz postać Jordana macierzy $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ spełniającej

$$\chi_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2 \qquad \text{oraz} \qquad (A-2I)^2 \neq (A-2I)^3 = (A-2I)^4.$$

Zadanie 2.11. Niech endomorfizm $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^3)$ będzie zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę Jordana B endomorfizmu f oraz macierz $M_B(f)$.

Zadanie 2.12. Niech $K = \mathbb{F}_7$ oraz $V = K^4$. Wyznacz bazę Jordana B oraz macierz $M_B(f)$ endomorfizmu $f \in \operatorname{End}(V)$ zadanego macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.13. Niech K będzie ciałem. Endomorfizm $f \in \operatorname{End}(K^5)$ zadany jest przez macierz

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę Jordana endomorfizmu f w zależności od charakterystyki ciała K.

Zadanie 2.14. Rozważmy endomorfizm $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^8)$ zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz wielomian minimalny μ_f oraz bazę Jordana endomorfizmu f.

Zadanie 2.15. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ dany warunkiem

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz bazę Jordana B endomorfizmu f. Jak wygląda macierz $M_B(f)$?

(2) Znajdź taką macierz $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, że $M_{\mathrm{st}}(f) = PM_B(f)P^{-1}$.

Zadanie 2.16. Rozważmy automorfizm $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^4)$ zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz bazę Jordana B automorfizmu f oraz macierz $M_B(f)$.

(2) Czy istnieje taka baza C przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że $M_C(f^{-1}) = M_{\mathrm{st}}(f)$?

Zadanie 2.17. Zdefiniujmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ wzorem

$$f(x, y, z) = (ix + iy, iy, y + iz).$$

(1) Znajdź bazę Jordana B endomorfizmu f oraz macierz $M_B(f)$.

(2) Wyznacz wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu f.

Zadanie 2.18. Zdefiniujmy $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ wzorem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 2x_1 - 4x_3 + 2x_4, -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4, -2x_1 - x_4).$$

(1) Wyznacz bazę Jordana B endomorfizmu f oraz macierz $M_B(f)$.

(2) Zbadaj czy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$$

może być macierzą endomorfizmu f w pewnej bazie przestrzeni $\mathbb{C}^4$.

Zadanie 2.19. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy $V = \{f \in K[x] : \deg f \leqslant n\}$ i rozważmy *operator różniczkowania* $D \in \mathrm{End}(V)$ dany wzorem

$$D\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\Big) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}.$$

Wyznacz wielomian charakterystyczny χ_D operatora D. Następnie znajdź bazę Jordana operatora D i jego macierz w tej bazie.

Zadanie 2.20. Załóżmy, że $V = \{f \in \mathbb{C}[x, y] : \deg f \leqslant 2\}$ i rozważmy endomorfizm $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ zadany formułą
$$\Phi(f) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$
Wyznacz bazę Jordana B endomorfizmu Φ oraz macierz $M_B(\Phi)$.

Uwaga. Niech $f = \sum_{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}_0} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in K[x_1, \dots, x_n]$, gdzie K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. *Stopnień* wielomianu f definiujemy wzorem
$$\deg f = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } f = 0, \\ \max\{k_1 + \cdots + k_n : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz } a_{k_1,\dots,k_n} \neq 0\} & \text{gdy } f \neq 0. \end{cases}$$
Natomiast gdy $1 \leqslant i \leqslant n$, to *pochodną cząstkową* wielomianu f względem zmiennej x_i określamy jako
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}_0} k_i a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_i - 1} x_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots x_n^{k_n} \in K[x_1, \dots, x_n].$$

Zadanie 2.21. Zdefiniujmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ za pomocą wzoru
$$f(x, y, z) = (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z).$$
(1) Znajdź bazę Jordana B endomorfizmu f i wyznacz macierz $M_B(f)$.
(2) Udowodnij, że istnieje automorfizm $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^3)$ spełniający $f = g + g^{-1}$.
(3) Wyznacz postać Jordana macierzy $M_{\mathrm{st}}(g)$ automorfizmu g z punktu (2).

Zadanie 2.22. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dany formułą
$$f(x, y, z) = (2x - z, 3x - z, 2x - z).$$
Wyznacz wszystkie liczby $t \in \mathbb{R}$, dla których istnieje taka baza Jordana B endomorfizmu f, że $v = (2, 4, t) \in B$.

Zadanie 2.23. Niech $V = \mathbb{C}^7$. Przypuśćmy, że $f \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\sigma(f) = \{2, 3\}$. Załóżmy ponadto, że:
$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_V) = 2, && \dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_V)^2 = 4, \\ &\dim \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_V) = 1, && \dim \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_V)^2 = 2. \end{aligned}$$
Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) możliwe postacie Jordana macierzy $M_{\mathrm{st}}(f)$ endomorfizmu f.

Zadanie 2.24. Niech $V = \mathbb{R}^7$. Załóżmy, że wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ jest postaci $\chi_f(x) = -(x - 2)^5 (x - 5)^2 \in \mathbb{R}[x]$. Niech ponadto
$$\dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_V) = 2, \qquad \dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_V)^2 = 4$$
oraz
$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Im}(f - 5\,\mathrm{id}_V) \neq 0.$$
Wyznacz macierz endomorfizmu f w jego bazie Jordana.

Zadanie 2.25. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Wyznacz wielomian charakterystyczny χ_A, wielomian minimalny μ_A oraz opisz postać Jordana macierzy A.

(2) Znajdź wszystkie macierze $B \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ będące w postaci Jordana i spełniające $\chi_A = \chi_B$ oraz $\mu_A = \mu_B$.

Zadanie 2.26. Załóżmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ spełnia $A^9 = 0$. Wykaż, że $\chi_A(x) = -x^5$. Spróbuj uogólnić ten fakt.

Zadanie 2.27. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$. Niech $n_1, \ldots, n_s \geqslant 1$ oraz $n = n_1 + \cdots + n_s$. Wyznacz wielomian charakterystyczny χ_A oraz wielomian minimalny μ_A macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ o postaci blokowo-diagonalnej $A = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s))$.

Zadanie 2.28. Niech $X \neq 0$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim X = n < \infty$. Dla wartości własnej $\lambda \in \sigma(f)$ endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(X)$ zdefiniujmy
$$\begin{aligned} m_a(f,\lambda) &= \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_X)^n \quad (\textit{krotność algebraiczna}), \\ m_g(f,\lambda) &= \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_X) \quad\;\; (\textit{krotność geometryczna}). \end{aligned}$$

(1) Udowodnij, iż $m_a(f,\lambda)$ jest największą taką liczbą $k \geqslant 1$, że wielomian $(x-\lambda)^k$ dzieli χ_f. Uzasadnij, że $1 \leqslant m_g(f,\lambda) \leqslant m_a(f,\lambda)$.

(2) Wykaż, że gdy ciało K jest algebraicznie domknięte, to
$$\mathrm{tr}\, f = \sum_{\lambda\in\sigma(f)} m_a(f,\lambda)\lambda, \qquad \det f = \prod_{\lambda\in\sigma(f)} \lambda^{m_a(f,\lambda)}$$
oraz
$$\chi_f(x) = (-1)^n \prod_{\lambda\in\sigma(f)} (x-\lambda)^{m_a(f,\lambda)}.$$

Zadanie 2.29. Niech K będzie ciałem oraz $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jest podobna do macierzy Jordana.

(1) Dowiedź, że rozmiar największej klatki o wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$, pojawiającej się w postaci Jordana macierzy A jest równy
$$m_A(\lambda) = \min\{k \geqslant 0 : \mathrm{rank}(A - \lambda I)^k = \mathrm{rank}(A-\lambda I)^{k+1}\}.$$

(2) Udowodnij, że
$$\mu_A(x) = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} (x-\lambda)^{m_A(\lambda)}.$$

Zadanie 2.30 (addytywny rozkład Jordana–Chevalleya)**.** Załóżmy, że K jest ciałem algebraicznie domkniętym oraz $n \geqslant 1$. Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ istnieje taka macierz diagonalizowalna $D \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz macierz nilpotentna $N \in \mathrm{M}_n(K)$, że $A = D + N$ oraz $DN = ND$.

Uwaga. Można dowieść, że gdy V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem *doskonałym* K (tzn. ciało K spełnia (1) $\operatorname{char} K = 0$ lub (2) $\operatorname{char} K = p > 0$ oraz $K = K^p = \{a^p : a \in K\}$; w szczególności wszystkie ciała charakterystyki zero, ciała algebraicznie domknięte oraz ciała skończone są doskonałe), to każdy endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ posiada jednoznaczny rozkład $f = f_s + f_n$, gdzie endomorfizm $f_s \in \operatorname{End}(V)$ jest półprosty, endomorfizm $f_n \in \operatorname{End}(V)$ jest nilpotentny oraz $f_s \circ f_n = f_n \circ f_s$. Warto dodać, że gdy ciało K nie jest doskonałe, to mogą istnieć endomorfizmy w $\operatorname{End}(V)$, które nie dopuszczają takiego rozkładu. Przykładowo gdy p jest liczbą pierwszą, $K = \mathbb{F}_p(t)$ oraz $V = K[x]/(x^p - t)^2 K[x]$ (oczywiście $\dim V = 2p$), to endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$, dany jako mnożenie przez warstwę elementu x, nie posiada rozkładu Jordana–Chevalleya.

Zadanie 2.31 (multiplikatywny rozkład Jordana–Chevalleya)**.** Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Mówimy, że macierz $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ jest *unipotentna*, gdy macierz $P - I$ jest nilpotentna. Udowodnij, że gdy ciało K jest algebraicznie domknięte, to dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ istnieje taka macierz diagonalizowalna $D \in \mathrm{GL}_n(K)$ oraz macierz unipotentna $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, że $A = DP = PD$.

Zadanie 2.32. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{C}).$$

(1) Znajdź wielomian minimalny μ_A macierzy A.

(2) Wyznacz taki wielomian $p \in \mathbb{C}[x]$, że macierz $p(A)$ jest diagonalizowalna, zaś macierz $A - p(A)$ jest nilpotentna. Czy istnieje tylko jeden taki wielomian?

Zadanie 2.33. Załóżmy, że K jest ciałem, $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wykaż, że:

(1) gdy $\operatorname{char} K = 0$, to macierze A oraz A^k są podobne dla dowolnego $k \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\chi_A(x) = (1 - x)^n$.

(2) gdy $\operatorname{char} K > 0$, to macierze A oraz A^k są podobne dla dowolnego $k \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = I$.

Zadanie 2.34. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

Oblicz A^n dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 2.35. Niech $n \geqslant 1$. Uzasadnij, że każda macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ jest sumą dwóch macierzy odwracalnych. Spróbuj uogólnić to zadanie.

Zadanie 2.36. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Udowodnij, że $A^t = PAP^{-1}$ dla pewnej macierzy $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(2) Wykaż, że macierz P z punktu (1) można wybrać tak, by była ona symetryczna.

(3) Wykorzystując punkty (1) oraz (2) uzasadnij, że każda macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ jest iloczynem dwóch macierzy symetrycznych leżących w $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Czy każda macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest podobna (nad $\mathbb{R}$) do macierzy A^t? Czy każdą macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ można przedstawić jako iloczyn dwóch symetrycznych macierzy z $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Zadanie 2.37. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Przypuśćmy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ spełnia $f^n = \mathrm{id}_V$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Czy f musi być diagonalizowalny? A co gdy $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$?

Zadanie 2.38 (rzeczywista postać Jordana)**.** Niech $m \geqslant 1$. Załóżmy, że $X = \mathbb{R}^m$ oraz $f \in \mathrm{End}(X)$.

(1) Uzasadnij, iż istnieją takie $r, s \geqslant 0$, parami różne liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ i parami różne liczby $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (tutaj $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant k \leqslant s$), że

$$\chi_f(x) = (-1)^m \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{n_j} \prod_{k=1}^{s} ((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{m_k}$$

dla pewnych $n_1, \dots, n_r \geqslant 1$ oraz $m_1, \dots, m_s \geqslant 1$ (oczywiście liczby $n_1, \dots, n_r$ oraz $m_1, \dots, m_s$ spełniają $\sum_{j=1}^{r} n_j + 2\sum_{k=1}^{s} m_k = m$).

(2) Pokaż, że $X = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ jest sumą prostą f-niezmienniczych podprzestrzeni

$$\begin{aligned} U_j &= \mathrm{Ker}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_X)^{n_j} && (1 \leqslant j \leqslant r), \\ V_k &= \mathrm{Ker}((f - \alpha_k \,\mathrm{id}_X)^2 + \beta_k^2 \,\mathrm{id}_X)^{m_k} && (1 \leqslant k \leqslant s). \end{aligned}$$

(3) Zdefiniujmy *kompleksyfikację* podprzestrzeni $V \subseteq X$ jako

$$V^{\mathbb{C}} = V + iV = \{u + iv : u, v \in V\} \subseteq \mathbb{C}^m.$$

Rozważmy endomorfizm $f^{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(X^{\mathbb{C}})$ dany wzorem

$$f^{\mathbb{C}}(x + iy) = f(x) + if(y)$$

dla $x, y \in X$. Wykaż, że gdy $1 \leqslant k \leqslant s$, to $V_k^{\mathbb{C}} = V_k^+ \oplus V_k^-$, gdzie

$$V_k^{\pm} = \mathrm{Ker}(f^{\mathbb{C}} - (\alpha_k \pm i\beta_k) \,\mathrm{id}_{X^{\mathbb{C}}})^{m_k}.$$

(4) Ustalmy teraz $1 \leqslant k \leqslant s$. Sprawdź, że gdy zbiór $\{u_1 + iv_1, \dots, u_d + iv_d\}$ jest bazą przestrzeni V_k^+ (tutaj $d = \dim V_k^+$ oraz $u_p, v_p \in X$ dla $1 \leqslant p \leqslant d$), to zbiór $\{u_1 - iv_1, \dots, u_d - iv_d\}$ jest bazą przestrzeni V_k^-; w szczególności $\dim V_k^- = d$. Wywnioskuj, że zbiór $\{u_1, v_1, \dots, u_d, v_d\}$ jest bazą przestrzeni V_k; w szczególności $\dim V_k = 2d$.

(5) Wykorzystując punkty (2), (3) i (4) udowodnij, iż istnieje taka baza B przestrzeni X, że macierz $M_B(f)$ ma postać blokowo-diagonalną, w której bloki są klatkami Jordana lub *uogólnionymi klatkami Jordana* postaci

$$J_n(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} A & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}),$$

gdzie $n \geqslant 1$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

dla pewnych $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2.39. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Wyznacz rzeczywistą postać Jordana $J \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ macierzy A oraz znajdź taką macierz $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, że $A = PJP^{-1}$.

Zadanie 2.40. Niech

$$A_{rs} = \begin{bmatrix} -2 & r & 1 \\ s & -1 & -s \\ -1 & r & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(1) Dla jakich par $(r,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ macierze A_{rs} oraz A_{11} są podobne?

(2) Dla jakich par $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ macierze A_{11}^n oraz A_{11}^m są podobne?

Zadanie 2.41. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n, m \geqslant 1$. Dowiedź, że gdy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $B \in \mathrm{M}_m(K)$, to $AX = XB$ dla pewnej macierzy $0 \neq X \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany χ_A oraz χ_B mają wspólny dzielnik dodatniego stopnia.

Zadanie 2.42. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Udowodnij, że gdy $C = AB + BA$ oraz $BC + CB = 0$, to macierz C jest nilpotentna.

Zadanie 2.43. Podaj, o ile istnieje, przykład takich macierzy $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, że macierz AB nie jest nilpotentna, zaś macierz $sA + tB$ jest nilpotentna dla dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2.44. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Wykaż, że macierz A jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(A) = \{0\}$. Czy wynik pozostanie prawdziwy, gdy zastąpimy ciało $\mathbb{C}$ ciałem $\mathbb{R}$?

Zadanie 2.45. Niech $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ jest nilpotentna, to dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje taka macierz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, że $A = I + P^k$. Czy teza pozostanie prawdziwa, gdy ciało $\mathbb{C}$ zastąpimy innym ciałem?

Zadanie 2.46. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy *centralizator* macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$ jako

$$\mathrm{C}(A) = \{X \in \mathrm{M}_n(K) : AX = XA\}.$$

(1) Uzasadnij, że $\mathrm{C}(A)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{M}_n(K)$.

(2) Wyznacz $\dim \mathrm{C}(A)$ dla macierzy $A = J_n(\lambda)$, gdzie $\lambda \in K$.

(3) Wyznacz $\dim \mathrm{C}(A)$ dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 2.47. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero, $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) macierz A jest nilpotentna.

(2) $\operatorname{tr} A^k = 0$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$.

Czy bez założenia $\operatorname{char} K = 0$ warunki (1) oraz (2) są równoważne?

Zadanie 2.48. Niech $m \geqslant 1$. *Eksponentę* macierzy $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ definiujemy wzorem

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(1) Sprawdź, że powyższa definicja jest poprawna (tzn. szeregi definiujące wyrazy macierzy $\exp A$ są zbieżne).

(2) Pokaż, że $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$ spełniających $AB = BA$. Czy równość $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$ pozostaje prawdziwa bez założenia $AB = BA$?

(3) Oblicz $\exp A$ dla $A = J_m(\lambda)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$.

(4) Dowiedź, że $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$ dla $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$.

Zadanie 2.49. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Udowodnij, iż istnieje taka macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, że $P = \exp A$. Czy każda macierz $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ jest postaci $Q = \exp B$ dla pewnej macierzy $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$? Czy coś się zmieni jeśli zażądamy dodatkowo by $\det Q > 0$?

Zadanie 2.50. Załóżmy, że A jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że w A zdefiniowane jest takie *mnożenie*

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in A,$$

że trójka $(A, +, \cdot\,)$ (tu $+$ oznacza dodawanie wektorów w A) spełnia wszystkie aksjomaty ciała z wyjątkiem przemienności mnożenia w A (tzn. mnożenie w A może lecz nie musi być przemienne; taką strukturę nazywamy skończenie wymiarową *algebrą z dzieleniem* nad $\mathbb{R}$). Udowodnij, że $\dim A = 1$ lub $\dim A$ jest liczbą parzystą.

Uwaga. Prawdziwe jest ogólniejsze twierdzenie pochodzące od Frobeniusa. Mianowicie można wykazać, że algebra A jest izomorficzna z jedną z trzech algebra $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ (ta ostatnia, to algebra *rzeczywistych kwaternionów*). W szczególności $\dim A \in \{1, 2, 4\}$.

3 Przestrzenie i odwzorowania afiniczne

Zadanie 3.1. Załóżmy, że A jest nietrywialną przestrzenią afiniczną nad ciałem K oraz $n \geqslant 1$. Pokaż, że gdy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ oraz $p_1, \ldots, p_n \in A$, to wektor $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{pp_i} \in \mathrm{T}(A)$ nie zależy od wyboru punktu $p \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Uwaga. Jeżeli $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, to wektor $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{pp_i} \in \mathrm{T}(A)$ (niezależny od punktu p) czasami oznacza się przez $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$.

Zadanie 3.2. Załóżmy, że K jest ciałem spełniającym $|K| = q < \infty$. Niech $0 \leqslant d \leqslant n$.

(1) Ile jest d-wymiarowych podprzestrzeni afinicznych w przestrzeni K^n?

(2) Ile jest wszystkich podprzestrzeni afinicznych w przestrzeni K^n?

Zadanie 3.3. Przypuśćmy, że A jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K. Udowodnij, że gdy $\dim A \geqslant 1$ oraz $|K| = q < \infty$, to istnieją takie właściwe podprzestrzenie afiniczne $A_1, \ldots, A_q$ przestrzeni A, że $A = A_1 \cup \cdots \cup A_q$.

Zadanie 3.4. Pokaż, że gdy przestrzeń afiniczna A nad ciałem K da się zapisać jako suma $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ właściwych podprzestrzeni afinicznych $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$, to $|K| \leqslant n$.

Zadanie 3.5. Niech A będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K oraz $\varnothing \neq S \subseteq A$. Czy jeśli zachodzi $p, q \in S \implies \mathrm{Aff}\{p, q\} \subseteq S$ dla dowolnych $p, q \in A$, to zbiór S musi być podprzestrzenią afiniczną przestrzeni A?

Zadanie 3.6. Załóżmy, że A oraz B są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej X. Niech $p \in A$ oraz $q \in B$. Udowodnij, że

$$\mathrm{Aff}(A \cup B) = \mathrm{Aff}\{p, q\} + \mathrm{T}(A) + \mathrm{T}(B).$$

Zadanie 3.7. Niech A, B będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej X. Wykaż, że:

(1) gdy $p \in A$ oraz $q \in B$, to $A \cap B \neq \varnothing \iff \overrightarrow{pq} \in \mathrm{T}(A) + \mathrm{T}(B)$.

(2) gdy $A \cap B \neq \varnothing$, to $\dim \mathrm{Aff}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

(3) gdy $A \cap B = \varnothing$, to $\dim \mathrm{Aff}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim(\mathrm{T}(A) \cap \mathrm{T}(B)) + 1$.

Zadanie 3.8. Załóżmy, że X jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K. Przypuśćmy, że podprzestrzenie afiniczne $A, B \subseteq X$ spełniają $A \cap B = \varnothing$ oraz $\mathrm{T}(A) \cap \mathrm{T}(B) = 0$ (tzn. A oraz B są *skośne*). Niech $p \in A$ oraz $q \in B$. Dowiedź, że:

(1) dla dowolnego punktu $x \in X \setminus (A \cup B)$ istnieje co najwyżej jedna prosta $L \subseteq X$ spełniająca $x \in L$ oraz $L \cap A \neq \varnothing \neq L \cap B$.

(2) prosta $L \subseteq X$ o własnościach wymienionych w punkcie (1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathrm{Aff}(A \cup B)$ oraz $\overrightarrow{px}, \overrightarrow{qx} \notin \mathrm{T}(A) + \mathrm{T}(B)$.

Zadanie 3.9. Załóżmy, że A oraz B są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej X nad ciałem K. Niech ponadto $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Opisz zbiór

$$S = \{\lambda p + (1 - \lambda) q : p \in A \text{ oraz } q \in B\}.$$

Czy zawsze jest to podprzestrzeń afiniczna?

Zadanie 3.10. Niech A oraz B będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej X nad ciałem K spełniającym $|K| > 2$. Dowiedź, że zbiór

$$S = \{\lambda p + (1-\lambda)q : \lambda \in K,\ p \in A \text{ oraz } q \in B\}$$

jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B \neq \varnothing$ lub $\mathrm{T}(A) = \mathrm{T}(B)$.

Zadanie 3.11. Załóżmy, że $X \neq 0$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $0 \neq f \in X^*$. Niech $V = \operatorname{Ker} f$ oraz $A = \{\operatorname{Span}\{x\} : x \in X \setminus V\}$. Gdy $L = \operatorname{Span}\{x\} \in A$ oraz $v \in V$, to zdefiniujmy $L \oplus v = \operatorname{Span}\{x + f(x)v\}$. Uzasadnij, że trójka $(A, V, \oplus)$ jest przestrzenią afiniczną.

Zadanie 3.12. Załóżmy, że A jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K, zaś $V \subseteq \mathrm{T}(A)$ jest podprzestrzenią liniową. Sprawdź, że relacja $R \subseteq A \times A$, określona formułą

$$(p, q) \in R \iff \overrightarrow{pq} \in V \quad (p, q \in A),$$

jest relacją równoważności w A. Uzasadnij, że zbiór ilorazowy A/R, oznaczany przez A/V i nazywany *przestrzenią ilorazową* (lub *ilorazem*) przestrzeni afinicznej A względem podprzestrzeni liniowej V, z działaniem $A/V \times \mathrm{T}(A)/V \to A/V$, zdefiniowanym jako

$$[p] + (x + V) = [p + x] \quad (p \in A \text{ oraz } x \in \mathrm{T}(A)),$$

jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K o przestrzeni stycznej $\mathrm{T}(A/V) = \mathrm{T}(A)/V$.

Zadanie 3.13. Wyznacz opis parametryczny oraz układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną $A \subseteq \mathbb{R}^4$, gdy:

(1) $A = \operatorname{Aff}\{(-1,1,0,1), (0,0,2,0), (-3,-1,5,4), (2,2,-3,-3)\}$.
(2) $A = \operatorname{Aff}\{(1,1,1,-1), (0,0,6,-7), (2,3,6,-7), (3,4,1,-1)\}$.

Przedstaw podprzestrzeń A jak przecięcie hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 3.14. Niech

$$L_1 = (3,2,1) + \operatorname{Span}\{(1,0,2)\},$$
$$L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 4,\ x + 3y - 6z = 2\}$$

będą prostymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Załóżmy, że prosta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzi przez punkt $p = (5,2,1) \in \mathbb{R}^3$ i przecina obie proste L_1 oraz L_2. Opisz prostą L układem równań i wyznacz jej punkty przecięcia z prostymi L_1 oraz L_2.

Zadanie 3.15. Niech $p = (-1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ oraz

$$L_1 = (2,3,5) + \operatorname{Span}\{(1,2,1)\},$$
$$L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 7,\ 3x - 2y + 2z = 17\}.$$

(1) Znajdź równanie płaszczyzny $P \subseteq \mathbb{R}^3$ zawierającej punkt p oraz prostą L_1.
(2) Pokaż, że istnieje prosta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ zawierająca punkt p i przecinająca obie proste L_1 oraz L_2. Wyznacz punkty przecięcia prostej L z prostymi L_1 oraz L_2.

Zadanie 3.16. Niech $p = (4,5,2,7) \in \mathbb{Q}^4$ oraz

$$L_1 = \mathrm{Aff}\{(1,1,1,1),(0,-1,0,1)\}, \qquad L_2 = \mathrm{Aff}\{(2,2,3,1),(1,2,2,-2)\}.$$

(1) Wyznacz prostą $L \subseteq \mathbb{Q}^4$ zawierającą punkt p oraz przecinającą proste L_1 i L_2. Znajdź punkty przecięcia prostej L z prostymi L_1 oraz L_2.

(2) Wyznacz taką prostą $L \subseteq \mathbb{Q}^4$, aby proste L oraz L_1 były skośne oraz, aby nie istniała prosta zawierająca punkt p i przecinająca obie proste L oraz L_1.

Zadanie 3.17. Rozważmy proste

$$\begin{aligned} L_1 &= (3,4,1) + \mathrm{Span}\{(1,2,-1)\}, \\ L_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : 3x - 2y = -16,\ 5y + 3z = 7\} \end{aligned}$$

w przestrzeni $\mathbb{C}^3$. Znajdź równanie płaszczyzny $P \subseteq \mathbb{C}^3$ przechodzącej przez punkt $(1,1,3) \in \mathbb{C}^3$ i spełniającej $\mathrm{T}(L_1) \subseteq \mathrm{T}(P)$ oraz $\mathrm{T}(L_2) \subseteq \mathrm{T}(P)$.

Zadanie 3.18. Niech $n \geqslant 1$. Wyznacz najmniejszą taką liczbę $k \geqslant 0$, że istnieją proste $L_1, \ldots, L_k \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniające $\mathbb{R}^n = \mathrm{Aff}(L_1 \cup \cdots \cup L_k)$.

Zadanie 3.19. Czy punkty

$$p_0 = (0,0,0), \quad p_1 = (1,0,0), \quad p_2 = (0,1,0), \quad p_3 = (0,0,1), \quad p_4 = (1,1,1)$$

przestrzeni afinicznej $\mathbb{Q}^3$ są w położeniu szczególnym? Jeśli tak, to wyznacz maksymalny podukład układu $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ złożony z punktów będących w położeniu ogólnym.

Zadanie 3.20. Rozważmy proste

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 6\}, \qquad L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 12\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Wyznacz bazę afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zawartą w zbiorze $L_1 \cup L_2$.

Zadanie 3.21. Niech K będzie ciałem oraz

$$L_1 = (4,1,0) + \mathrm{Span}\{(2,3,-1)\}, \qquad L_2 = (2,-2,1) + \mathrm{Span}\{(1,0,1)\}$$

będą prostymi w przestrzeni K^3. Wyznacz bazę afiniczną oraz wymiar podprzestrzeni $\mathrm{Aff}(L_1 \cup L_2) \subseteq K^3$. Odpowiedź uzależnij od charakterystyki ciała K.

Zadanie 3.22. Niech K będzie ciałem. Wyznacz bazę afinicznej przestrzeni afinicznej

$$A = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in K^4 : 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6\}.$$

Odpowiedź uzależnij od charakterystyki ciała K.

Zadanie 3.23. Załóżmy, że $p = (0,2,-1,0) \in \mathbb{R}^4$ oraz $q = (1,0,-1,1) \in \mathbb{R}^4$. Niech ponadto:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,0,1,0), & u_2 &= (0,0,0,1), & u_3 &= (0,1,0,1), & u_4 &= (0,1,1,1), \\ v_1 &= (1,1,0,0), & v_2 &= (1,0,0,1), & v_3 &= (0,1,0,0), & v_4 &= (0,1,1,1). \end{aligned}$$

Płaszczyzna $A \subseteq \mathbb{R}^4$ jest opisana w układzie bazowym $\mathcal{A} = (p; u_1, u_2, u_3, u_4)$ układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Podaj układ równań opisujący płaszczyznę A w układzie bazowym $\mathcal{B} = (q; v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Zadanie 3.24. Niech $p = (1, 0, i) \in \mathbb{C}^3$ oraz

$$p_0 = (1, 0, 1), \qquad p_1 = (2, i, 1), \qquad p_2 = (1 + i, 0, 2), \qquad p_3 = (1, i, 1).$$

(1) Wyznacz współrzędne barycentryczne punktu p w bazie afinicznej $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{C}^3$.

(2) Podaj współrzędne punktu p w układzie bazowym $(p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3})$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{C}^3$.

Zadanie 3.25. Niech A będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim A = n \geqslant 1$ oraz, że $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą afiniczną przestrzeni A. Przypuśćmy, że macierz $\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ spełnia $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} = 1$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Wykaż, że punkty

$$q_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} p_j \in A \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

są w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \Lambda \neq 0$.

Zadanie 3.26 (twierdzenie Menelaosa)**.** Niech A będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K. Przypuśćmy, że punkty $p_1, p_2, p_3 \in A$ są afinicznie niezależne oraz

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_1 p_2 + (1 - \lambda_1) p_3 \in A, \\ q_2 &= \lambda_2 p_3 + (1 - \lambda_2) p_1 \in A, \\ q_3 &= \lambda_3 p_1 + (1 - \lambda_3) p_2 \in A \end{aligned}$$

dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$. Dowiedź, że punkty q_1, q_2, q_3 są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)$.

Zadanie 3.27. Niech A będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem K oraz $p_1, p_2, p_3 \in A$. Zdefiniujmy

$$L_1 = \mathrm{Aff}\{p_2, p_3\}, \qquad L_2 = \mathrm{Aff}\{p_3, p_1\}, \qquad L_3 = \mathrm{Aff}\{p_1, p_2\}$$

oraz

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_1 p_2 + (1 - \lambda_1) p_3 \in L_1, \\ q_2 &= \lambda_2 p_3 + (1 - \lambda_2) p_1 \in L_2, \\ q_3 &= \lambda_3 p_1 + (1 - \lambda_3) p_2 \in L_3 \end{aligned}$$

dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$. Przypuśćmy, że wśród prostych L_1, L_2, L_3 żadne dwie nie są równoległe. Jakie warunki muszą spełniać skalary $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, by proste

$$L'_1 = \mathrm{Aff}\{p_1, q_1\}, \qquad L'_2 = \mathrm{Aff}\{p_2, q_2\}, \qquad L'_3 = \mathrm{Aff}\{p_3, q_3\}$$

przecinały się w jednym punkcie?

Zadanie 3.28. Załóżmy, że A jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K, zaś punkty $p_1, p_2, q_1, q_2 \in A$ tworzą wierzchołki równoległoboku, tzn. $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{q_1q_2} = 0$. Wykaż, że gdy $\operatorname{char} K \neq 2$, to $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}q_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}q_2$. Co geometrycznie oznacza ta równość?

Zadanie 3.29. Niech A będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 2$. Przez *i-tą medianę* punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in A$ rozumiemy podprzestrzeń $L_i = \operatorname{Aff}\{p_i, q_i\} \subseteq A$, gdzie $q_i = \sum_{j\neq i} \frac{1}{n} p_j \in A$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$ jest *środkiem ciężkości* (lub *barycentrum*) układu punktów $\{p_j : j \neq i\}$. Dowiedź, że gdy punkty $p_0, p_1, \ldots, p_n$ nie są współliniowe, to $\bigcap_{i=0}^{n} L_i = \{p\}$ dla pewnego punkt $p \in A$. Wyznacz ten punkt.

Zadanie 3.30. Przypuśćmy, iż A, B są takimi podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej X, że $\dim A \leqslant \dim B$. Zdefiniujmy $n \geqslant 0$ jako największą liczbę, dla której istnieją takie podprzestrzenie $A_0 \subseteq A$ oraz $B_0 \subseteq B$, że A_0, B_0 są równoległe oraz $\dim A_0 = \dim B_0 = n$. Podobnie zdefiniujmy $m \geqslant 0$ jako największą liczbę, dla której istnieje podprzestrzeń $C \subseteq A$, która jest równoległa do B oraz $\dim C = m$. Udowodnij, że $n = m$.

Uwaga. Liczba $n = m$ nazywana jest *stopniem równoległości* podprzestrzeni A oraz B.

Zadanie 3.31. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem afinicznym. Wykaż, że gdy $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$ są podprzestrzeniami afinicznymi, to $f(A) \subseteq Y$ oraz $f^{-1}(B) \subseteq X$ także są podprzestrzeniami afinicznymi. W szczególności dla dowolnego $y \in Y$ włókno

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni X.

Zadanie 3.32. Niech $f \in \operatorname{Aff}(A, B)$. Udowodnij, że:

(1) f jest injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $u, v \in \operatorname{Aff}(X, A)$ z faktu $f \circ u = f \circ v$ wynika $u = v$.

(2) f jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $u, v \in \operatorname{Aff}(B, X)$ z faktu $u \circ f = v \circ f$ wynika $u = v$.

Zadanie 3.33. Niech $K = \mathbb{F}_2$.

(1) Udowodnij, że każda bijekcja $f\colon K^2 \to K^2$ jest odwzorowaniem afinicznym.

(2) Dla jakich $n \geqslant 1$ każda bijekcja $f\colon K^n \to K^n$ jest odwzorowaniem afinicznym?

Zadanie 3.34. Załóżmy, iż odwzorowanie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przeprowadza pewną parę prostych skośnych na parę prostych równoległych. Udowodnij, że f nie może być injekcją i wskaż przykład takiego odwzorowania.

Zadanie 3.35. Przypuśćmy, że odwzorowanie $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ spełnia $f(p_i) = q_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$, gdzie:

$$\begin{aligned} p_1 &= (2,1), & p_2 &= (1,2), & p_3 &= (1,1), \\ q_1 &= (4,1), & q_2 &= (3,3), & q_3 &= (2,1). \end{aligned}$$

Wyznacz *punkty stałe* (tzn. takie punkty $p \in \mathbb{R}^2$, że $f(p) = p$) i *proste niezmiennicze* (tzn. takie proste $L \subseteq \mathbb{R}^2$, że $f(L) \subseteq L$) odwzorowania f.

Zadanie 3.36. Niech

$$p_1 = (2,-1,3,-2), \qquad p_2 = (3,1,6,-1), \qquad p_3 = (5,1,4,1),$$
$$q_1 = (1,-2,3,5), \qquad q_2 = (2,1,8,7), \qquad q_3 = (3,2,10,-6)$$

oraz

$$L_1 = (2,0,4,-1) + \mathrm{Span}\{(0,1,2,0)\},$$
$$L_2 = (1,-1,5,-2) + \mathrm{Span}\{(0,2,3,-3)\}.$$

Czy istnieje odwzorowanie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ spełniające $f(p_i) = q_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$ oraz $f(L_1) = L_2$? Jeśli tak, to podaj przykład takiego odwzorowania.

Zadanie 3.37. Niech

$$L_1 = (1,1,1) + \mathrm{Span}\{(1,0,1)\}, \qquad L_2 = (1,0,0) + \mathrm{Span}\{(1,1,1)\}$$

będą prostymi w $\mathbb{C}^3$. Podaj przykład takiego odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$, że zachodzi $f(L_1) = L_2$ oraz $f(L_2) = L_1$.

Zadanie 3.38. Załóżmy, że wektory $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne. Niech ponadto $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$ oraz $L_i = p_i + \mathrm{Span}\{v_i\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Wykaż, że gdy $L_i \cap L_j = \varnothing$ dla $i \neq j$, to istnieje takie odwzorowanie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że

$$f(L_1) = L_2, \qquad f(L_2) = L_3, \qquad f(L_3) = L_1.$$

Zadanie 3.39. Rozważmy płaszczyznę

$$P = \mathrm{Aff}\{(0,2,0), (-1,1,-1), (2,2,1)\}$$

oraz proste

$$L_1 = (0,1,0) + \mathrm{Span}\{(3,0,1)\},$$
$$L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 3y = 16,\ x + 3z = 5\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz wzór odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ będącego rzutem na płaszczyznę P i spełniającego $f(L_1) = L_2$. Czy istnieje tylko jedno takie odwzorowanie?

Zadanie 3.40. Niech

$$A = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b\},$$
$$B = \mathrm{Span}\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\},$$

gdzie $0 \neq (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$ oraz $b \in \mathbb{R}$. Wyznacz wzór odwzorowania afinicznego $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będącego rzutem na A wzdłuż B.

Zadanie 3.41. Niech

$$A = \mathrm{Span}\{(1,0,-1,1), (0,1,1,0)\},$$
$$B = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2\}$$

oraz

$$L = (1,0,1,0) + \mathrm{Span}\{(1,-1,1,1)\},$$
$$P = (1,0,1,0) + \mathrm{Span}\{(1,1,0,1), (0,0,0,1)\}.$$

Załóżmy, że $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ jest rzutem na A wzdłuż B.

(1) Wyznacz przeciwobraz $f^{-1}(L)$ prostej L.

(2) Podaj układ równań opisujący obraz $f(P)$ płaszczyzny P.

Zadanie 3.42. Rozważmy płaszczyzny

$$A = \mathrm{Aff}\{(1,2,1),(2,1,2),(0,3,1)\}, \qquad B = \mathrm{Aff}\{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,0)\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przypuśćmy, że $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ jest symetrią względem A wzdłuż $\mathrm{Span}\{(1,1,0)\}$, zaś $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ jest symetrią względem B wzdłuż $\mathrm{Span}\{(1,-1,0)\}$.

(1) Wyznacz bazy afiniczne przestrzeni $f(B)$ oraz $g(A)$.

(2) Wyznacz macierz odwzorowania $h = g \circ f$ w standardowym układzie bazowym. Uzasadnij, że h jest obrotem i wyznacz oś oraz kąt tego obrotu.

Zadanie 3.43. Niech $f \in \mathrm{Aff}(A,A)$. Udowodnij, że gdy $1 \notin \sigma(\mathrm{T}(f))$, to odwzorowanie f ma dokładnie jeden punkt stały.

Zadanie 3.44. Dowiedź, że gdy odwzorowanie $f \in \mathrm{Aff}(X,X)$ ma dokładnie jeden punkt stały $p \in X$, to dla dowolnej skończenie wymiarowej f-niezmienniczej podprzestrzeni afinicznej $A \subseteq X$ zachodzi $p \in A$.

Zadanie 3.45. Zdefiniujmy odwzorowanie afiniczne $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ wzorem

$$f(x,y,z) = (2x + iy + 1, 2y + iz + 2i, 3 - i).$$

Niech

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : 3x - 5y + z = 2 + 3i\}.$$

Wyznacz bazy afiniczne przestrzeni $f(A)$ oraz $f^{-1}(A)$.

Zadanie 3.46. Rozważmy odwzorowanie $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ zadane macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Opisz wszystkie podprzestrzenie afiniczne $A \subseteq \mathbb{R}^2$ spełniające $f(A) = A$.

Zadanie 3.47. Załóżmy, że odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^2)$ oraz $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^4)$ są dane wzorami

$$f(x,y,z) = (x + iy + z + i, 2x - 2y + z - 2),$$
$$g(x,y) = (x + iy, 2 + i, -x + 2, x - iy).$$

Niech ponadto $\mathcal{B} = (p; v_1, v_2)$ będzie układem bazowym przestrzeni $\mathbb{C}^2$, gdzie

$$p = (1+i, 2), \qquad v_1 = (1, i), \qquad v_2 = (-i, 2).$$

Wyznacz macierze $M_{\mathrm{st}\,\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}\,\mathrm{st}}(g)$ oraz $M_{\mathrm{st}\,\mathrm{st}}(g \circ f)$.

Zadanie 3.48. Rozważmy odwzorowanie $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 2z + 1, -2x + y + z - 1, x - 2y + 3z - 4).$$

Wyznacz macierz $M_{\mathcal{AB}}(f)$ odwzorowania f w układach bazowych $\mathcal{A} = (p; u_1, u_2, u_3)$ oraz $\mathcal{B} = (q; v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie $p = (1, -2, 1)$, $q = (2, 1, -3)$ oraz

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1), & u_2 &= (1, 2, 0), & u_3 &= (1, 0, 3), \\ v_1 &= (2, 1, 3), & v_2 &= (1, 1, 0), & v_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

Zadanie 3.49. Niech

$$p_1 = (1, -1, 1), \qquad p_2 = (0, -1, 2), \qquad q_1 = (0, 2, -1), \qquad q_2 = (-1, 0, 0)$$

oraz

$$\begin{aligned} u_1^1 &= (1, 0, 1), & u_1^2 &= (0, 1, 0), & v_1^1 &= (1, 1, 0), & v_1^2 &= (0, 0, 1), \\ u_2^1 &= (0, 0, 1), & u_2^2 &= (1, 0, 1), & v_2^1 &= (1, 1, 1), & v_2^2 &= (1, 0, 0), \\ u_3^1 &= (0, 1, 0), & u_3^2 &= (1, 0, 0), & v_3^1 &= (0, 1, 1), & v_3^2 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

Niech ponadto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= (p_1; u_1^1, u_2^1, u_3^1), & \mathcal{B}_1 &= (q_1; v_1^1, v_2^1, v_3^1), \\ \mathcal{A}_2 &= (p_2; u_1^2, u_2^2, u_3^2), & \mathcal{B}_2 &= (q_2; v_1^2, v_2^2, v_3^2). \end{aligned}$$

Wyznacz macierz $M_{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}(f)$ odwzorowania $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^3)$ wiedząc, że

$$M_{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}(f) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Zadanie 3.50. Załóżmy, że A oraz N są grupami, zaś $\theta\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ jest *morfizmem grup*, tzn. θ spełnia $\theta(ab) = \theta(a) \circ \theta(b)$ dla dowolnych $a, b \in A$ (uzasadnij, że wtedy $\theta(1_A) = \mathrm{id}_N$). W produkcie $G = N \times A$ wprowadźmy mnożenie wzorem

$$(n_1, a_1) \cdot (n_2, a_2) = (n_1\theta(a_1)(n_2), a_1a_2)$$

dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $n_1, n_2 \in N$.

(1) Uzasadnij, że para $(G, \cdot)$ jest grupą (nazywaną *produktem półprostym* grup A oraz N i oznaczaną $G = N \rtimes A$; oczywiście struktura grupy G zależy od morfizmu θ i gdy chcemy to podkreślić, to piszemy $G = N \rtimes_\theta A$). Jak wygląda element neutralny grupy G? Jak wygląda element odwrotny g^{-1} do $g = (n, a) \in G$?

(2) Pokaż, że gdy V jest przestrzenią liniową, $A = \mathrm{Aut}(V)$ jest grupą automorfizmów przestrzeni V, $N = V$ jest grupą addytywną przestrzeni V, zaś $\theta\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ jest naturalnym zanurzeniem (doprecyzuj znaczenie tego stwierdzenia), to grupa $G = N \rtimes A$ jest izomorficzna z grupą automorfizmów afinicznych przestrzeni V.

4 Formy dwuliniowe i kwadratowe

Zadanie 4.1. Czy odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem:

(1) $\varphi(z_1,z_2) = |z_1\overline{z}_2|$,
(2) $\varphi(z_1,z_2) = \mathrm{Re}(z_1z_2)$,
(3) $\varphi(z_1,z_2) = \mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2)$,
(4) $\varphi(z_1,z_2) = \mathrm{Re}(z_1z_2) + \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$

jest formą $\mathbb{R}$-dwuliniową? Które z powyższych form są symetryczne/antysymetryczne?

Zadanie 4.2. Czy odwzorowanie $\varphi\colon V\times V\to\mathbb{R}$, gdzie:

(1) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ oraz $\varphi(f,g) = f(0)g(1)$,
(2) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ oraz $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,
(3) $V = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ oraz $\varphi(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$

jest formą dwuliniową? Które z powyższych form są symetryczne/antysymetryczne?

Uwaga. $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ to przestrzeń funkcji $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które mają ciągłą pierwszą pochodną oraz *zwarty nośnik*, tzn. istnieje takie $c = c(f)\geqslant 0$, że$f(x) = 0$ gdy $|x| > c$.

Zadanie 4.3. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Sprawdź, że

$$\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Bil}_s(V)\oplus\mathrm{Bil}_a(V).$$

Podaj rozkład formy $\varphi\in\mathrm{Bil}(V)$ na część symetryczną i antysymetryczną.

Zadanie 4.4. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K oraz $\varphi\in\mathrm{Bil}(V)$. Rozważmy odwzorowania

$$L\colon V\ni v\mapsto\varphi(-,v)\in V^* \qquad \text{oraz} \qquad R\colon V\ni v\mapsto\varphi(v,-)\in V^*.$$

Wykaż, że gdy $\dim V<\infty$, to następujące warunki są równoważne:

(1) L jest monomorfizmem.
(2) R jest monomorfizmem.
(3) macierz $M_B(\varphi)$ jest nieosobliwa dla pewnej bazy B przestrzeni V.
(4) macierz $M_B(\varphi)$ jest nieosobliwa dla dowolnej bazy B przestrzeni V.

Podaj przykład przestrzeni wektorowej V oraz formy dwuliniowej $\varphi\in\mathrm{Bil}(V)$, dla których warunki (1) oraz (2) nie są równoważne.

Zadanie 4.5. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Powiemy, że forma $\varphi\in\mathrm{Bil}(V)$ jest *refleksywna*, gdy spełnia $\varphi(u,v)=0\implies\varphi(v,u)=0$ dla dowolnych $u,v\in V$. Udowodnij, że forma $\varphi\in\mathrm{Bil}(V)$ jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna lub *alternująca* (tzn. gdy $\varphi(v,v)=0$ dla dowolnego $v\in V$).

Uwaga. Zatem $\mathrm{Bil}_r(V) = \mathrm{Bil}_s(V) \cup \mathrm{Bil}_a(V)$. Gdy $\operatorname{char} K \neq 2$, to suma ta jest rozłączna.

Zadanie 4.6. Macierz formy dwuliniowej $\varphi \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^3)$ w bazie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ma postać

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz formy φ w bazie $C = \{v_1, v_2, v_3\}$, gdzie

$$v_1 = e_1 + e_2, \qquad v_2 = e_1 - e_2, \qquad v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3.$$

Zadanie 4.7. Niech $V = \mathbb{C}^3$. Rozważmy formę dwuliniową $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ wyznaczoną przez macierz

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{C}$ zachodzi $V = U \oplus U^\perp$, gdzie $U = \mathrm{Span}\{(1, t, t)\}$?

Zadanie 4.8. Niech $V = \mathbb{Q}^4$. Zdefiniujmy formę dwuliniową $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ wzorem

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_4y_4$$

dla $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ oraz $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$. Wyznacz taką bazę B przestrzeni V, aby macierz $M_B(\varphi)$ była diagonalna.

Zadanie 4.9. Niech $K = \mathbb{F}_{13}$ oraz $V = K^3$. Określmy formę dwuliniową $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ wzorem

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3$$

dla $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ oraz $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$.

(1) Wyznacz macierz $M_B(\varphi)$ formy φ w bazie

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 2, 3), (2, 1, 0)\}.$$

(2) Wyznacz dopełnienie ortogonalne $U^\perp$ podprzestrzeni

$$U = \{(x, y, z) \in V : x + 2y - z = 0\}.$$

Czy przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni U oraz $U^\perp$? Czy forma $\varphi|_{U\times U}$ jest niezdegenerowana?

Zadanie 4.10. Niech $V = \mathbb{R}^4$ oraz $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ będzie formą zdefiniowaną przez macierz

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz bazę ortogonalną przestrzeni V.

(2) Wyznacz dopełnienie ortogonalne $U^\perp$ podprzestrzeni

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 + x_3 = 0 \text{ oraz } x_2 = 0\}.$$

Czy przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni U oraz $U^\perp$? Czy forma $\varphi|_{U\times U}$ jest niezdegenerowana?

Zadanie 4.11. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Zdefiniujmy formę dwuliniową $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ przy pomocy macierzy

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz bazę ortogonalną przestrzeni V.

(2) Udowodnij, że istnieją dokładnie dwie dwuwymiarowe oraz całkowicie izotropowe podprzestrzenie w V.

Zadanie 4.12. Rozważmy formę $\varphi \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^3)$ zadaną macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Podaj przykład takiej podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^3$, że $0 \neq V \neq \mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$.

(2) Podaj przykład takiej podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^3$, że $\dim V + \dim V^\perp \neq 3$.

(3) Podaj przykład takiej podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^3$, że żadna baza ortogonalna V nie może być rozszerzona do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4.13. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Określmy formę $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ za pomocą macierzy

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Wyznacz bazę ortogonalną przestrzeni V.

Zbadaj czy istnieje podprzestrzeń $U \subseteq V$ spełniająca:

(2) $\dim U = 2$ oraz $\varphi(u, v) = 0$ dla dowolnych $u, v \in U$.

(3) $\dim U = 2$ oraz $\varphi(u, u) \geqslant 0$ dla dowolnego $u \in U$.

(4) $\dim U = 2$ oraz $\varphi(u, u) > 0$ dla dowolnego $0 \neq u \in U$.

Zadanie 4.14. Które z macierzy

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 30 & -25 \\ -25 & 30 \end{bmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? To samo pytanie gdy ciało $\mathbb{Q}$ zastąpimy przez $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Zadanie 4.15. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze A oraz B są kongruentne nad $\mathbb{R}$?

(2) Dla jakich $t \in \mathbb{C}$ macierze A oraz B są kongruentne nad $\mathbb{C}$?

Zadanie 4.16. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nad którym z ciał $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$ macierze A, B są kongruentne?

Zadanie 4.17. Dla $n \in \mathbb{Z}$ zdefiniujmy macierz

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}).$$

Dla jakich par $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ macierze A_n oraz A_m są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? To samo pytanie gdy ciało $\mathbb{Q}$ zastąpimy przez $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Zadanie 4.18. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna. Wykaż, że macierze A oraz A^3 są kongruentne.

Zadanie 4.19. Sprawdź czy istnieje taka macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, że:

(1) $m_1(A) < 0$, $m_2(A) > 0$, $m_3(A) = 0$ oraz $m_4(A) < 0$.

(2) $m_1(A) < 0$, $m_2(A) > 0$, $m_3(A) = 0$ oraz $m_4(A) > 0$.

Uwaga. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Jeśli $1 \leqslant k \leqslant n$, to *$k$-ty minor główny* macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ definiujemy jako

$$m_k(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4.20. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Dowiedź, że gdy $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$, zaś $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V + \dim(U \cap V^{\perp}).$$

Zadanie 4.21. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Przypuśćmy, że forma $\varphi \in \mathrm{Bil}_a(V)$ jest niezdegenerowana. Uzasadnij, że $\dim V$ jest liczbą parzystą. Pokaż, iż istnieje taka baza B przestrzeni V, że

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \qquad (n = \tfrac{1}{2}\dim V).$$

Uwaga. Niezdegenerowaną formę antysymetryczną nazywamy *formą symplektyczną*, zaś baza B z powyższego zadania nosi nazwę *bazy symplektycznej* dla formy φ.

Zadanie 4.22. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V_1, \dots, V_n$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Załóżmy, że $\varphi_i \in \mathrm{Bil}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Rozważmy produkt $V = V_1 \times \dots \times V_n$ oraz zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi\colon V \times V \to K$ wzorem

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1) + \dots + \varphi_n(u_n, v_n)$$

dla $u = (u_1, \dots, u_n) \in V$ oraz $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$. Udowodnij, że:

(1) odwzorowanie φ jest formą dwuliniową.

(2) podprzestrzenie $V_1, \dots, V_n$ przestrzeni V są parami wzajemnie ortogonalne.

(3) forma φ jest niezdegenerowana dokładnie wtedy, gdy wszystkie formy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są niezdegenerowane.

(4) forma φ jest symetryczna (odpowiednio antysymetryczna) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie formy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są symetryczne (odpowiednio antysymetryczne).

Uwaga. Przestrzeń V wraz z wprowadzoną formą $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ nazywamy *sumą ortogonalną* przestrzeni $V_1, \dots, V_n$. Można spotkać zapis $V = V_1 \perp \dots \perp V_n$ oraz $\varphi = \varphi_1 \perp \dots \perp \varphi_n$.

Zadanie 4.23. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V_1, \dots, V_n$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Załóżmy, że $\varphi_i \in \mathrm{Bil}(V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Rozważmy przestrzeń $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ oraz zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi\colon V \times V \to K$ określając je na tensorach prostych wzorem

$$\varphi(u_1 \otimes \dots \otimes u_n, v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \varphi_1(u_1, v_1) \cdots \varphi_n(u_n, v_n).$$

Dowiedź, że:

(1) odwzorowanie φ jest poprawnie określoną formą dwuliniową.

(2) jeżeli formy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są symetryczne, to forma φ jest również symetryczna.

(3) jeżeli formy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są antysymetryczne, to forma φ jest symetryczna, gdy n jest liczbą parzystą albo antysymetryczna, gdy n jest liczbą nieparzystą.

(4) gdy $\dim V_i < \infty$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to $\mathrm{Bil}(V) \cong \mathrm{Bil}(V_1) \otimes \dots \otimes \mathrm{Bil}(V_n)$.

(5) gdy $\dim V_i = d_i < \infty$ oraz zbiór $B_i = \{v_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant d_i\}$ jest bazą przestrzeni V_i dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to dla $B = \{v_{1j_1} \otimes \dots \otimes v_{nj_n} : 1 \leqslant j_i \leqslant d_i \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ (wiemy, że zbiór B jest bazą przestrzeni V) mamy $M_B(\varphi) = M_{B_1}(\varphi_1) \otimes \dots \otimes M_{B_n}(\varphi_n)$ (iloczyn Kroneckera macierzy).

Uwaga. Formę φ oznacza się zazwyczaj symbolem $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ i nazywa *iloczynem tensorowym* form $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Zadanie 4.24. Niech $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ oraz forma $\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ będzie zdefiniowana wzorem

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Wyznacz maksymalny wymiar całkowicie izotropowej podprzestrzeni przestrzeni V.

Zadanie 4.25. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{C}^n$. Rozważmy formę $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Wykaż, że przestrzeń V zawiera całkowicie izotropową podprzestrzeń wymiaru $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ale nie zawiera całkowicie izotropowej podprzestrzeni większego wymiaru.

Zadanie 4.26. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ oraz $\dim V = n < \infty$. Niech $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ oraz

$$I(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v, v) = 0\}$$

będzie *stożkiem izotropowym* formy φ. Wiemy (przypomnij skąd), iż istnieje taka baza B przestrzeni V oraz jednoznacznie wyznaczone liczby $p, q \geqslant 0$ spełniające $p + q \leqslant n$, że $M_B(\varphi) = \mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0)$. Wykaż, że:

(1) istnieje podprzestrzeń $U \subseteq I(\varphi)$ spełniająca $\dim U = n - \max\{p, q\}$.

(2) stożek $I(\varphi)$ nie zawiera podprzestrzeni wymiaru większego od $n - \max\{p, q\}$.

Zadanie 4.27. Załóżmy, że V jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Udowodnij, że dla symetrycznej formy dwuliniowej $\varphi\colon V \times V \to K$ następujące warunki są równoważne:

(1) przestrzeń V jest niezdegenerowana oraz *izotropowa* (tzn. V zawiera niezerowy wektor izotropowy).

(2) istnieje taka baza B przestrzeni V, że

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) istnieje taka baza C przestrzeni V, że

$$M_C(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Przestrzeń V wraz z formą $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ spełniającą powyższe warunki nazywamy *płaszczyzną hiperboliczną* (lub *płaszczyzną Minkowskiego*) i oznaczamy przez $\mathcal{H}$.

Zadanie 4.28. Uzasadnij, iż płaszczyzna hiperboliczna $\mathcal{H}$ zawiera taki wektor v, że

$$\mathrm{Span}\{v\} = \mathrm{Span}\{v\}^{\perp}.$$

Zadanie 4.29. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Udowodnij, że dla niezdegenerowanej formy $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ następujące warunki są równoważne:

(1) istnieje taka podprzestrzeń $U \subseteq V$, że $U = U^{\perp}$.

(2) $V \cong \mathcal{H} \perp \cdots \perp \mathcal{H}$ jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych.

(3) $\dim V$ jest liczbą parzystą i istnieje taka baza B przestrzeni V, że

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (n = \tfrac{1}{2}\dim V).$$

Uwaga. Przestrzeń V o powyższych własnościach nazywamy *przestrzenią hiperboliczną*.

Zadanie 4.30. Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią liniową. Załóżmy, że $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ oraz, że $V = V_+ \perp V_-$ jest sumą ortogonalną podprzestrzeni $V_\pm \subseteq V$ spełniających $\dim V_+ = \dim V_- = n$. Przypuśćmy ponadto, że forma φ jest dodatnio określona na V_+ oraz jest ujemnie określona na V_-. Dowiedź, że:

(1) istnieje całkowicie izotropowa podprzestrzeń $U \subseteq V$ wymiaru n.

(2) każda całkowicie izotropowa podprzestrzeń $U \subseteq V$ spełnia $\dim U \leqslant n$.

(3) dowolna całkowicie izotropowa podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest zawarta w całkowicie izotropowej podprzestrzeni wymiaru n.

Zadanie 4.31. *Inwolucją* w ciele K nazywamy każde odwzorowanie $K \ni x \mapsto x^* \in K$ spełniające warunki:

$$(x^*)^* = x, \qquad (x+y)^* = x^* + y^*, \qquad (x \cdot y)^* = x^* \cdot y^*$$

dla $x, y \in K$ (równoważnie: inwolucja w ciele K, to automorfizm ciała K rzędu $\leqslant 2$). Załóżmy, że $\operatorname{char} K \neq 2$ oraz, że $K \ni x \mapsto x^* \in K$ jest *nietrywialną* inwolucją (tzn. inwolucją różną od identyczności). Udowodnij, że:

(1) zbiór $F = \{x \in K : x^* = x\}$ jest podciałem ciała K.

(2) istnieje taki element $0 \neq i \in K$, że $i^* = -i$ (w szczególności $i^2 \in F$). Ponadto każdy element $x \in K$ może być jednoznacznie zapisany w postaci $x = a + ib$ dla pewnych $a, b \in F$ (w szczególności $K = F \oplus iF$) i wtedy $x^* = a - ib$.

Jeśli V jest przestrzenią liniową nad K, to odwzorowanie $\varphi\colon V \times V \to K$ nazywamy *formą półtoraliniową*, gdy:

$$\begin{aligned} \varphi(u+v, w) &= \varphi(u,w) + \varphi(v,w), \qquad & \varphi(\lambda u, v) &= \lambda\varphi(u,v), \\ \varphi(u, v+w) &= \varphi(u,v) + \varphi(u,w), \qquad & \varphi(u, \lambda v) &= \lambda^*\varphi(u,v) \end{aligned}$$

dla dowolnych $u, v, w \in V$ oraz $\lambda \in K$. Mówimy, że forma φ jest *hermitowsko symetryczna*, gdy $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)^*$ dla dowolnych $u, v \in V$.

(3) Pokaż, że gdy $V = K^n$ oraz $A = [a_{jk}] \in \mathrm{M}_n(K)$, to odwzorowanie $\varphi_A\colon V \times V \to K$ dane wzorem

$$\varphi_A(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j y_k^*,$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, jest formą półtoraliniową. Uzasadnij, że każda forma półtoraliniowa na V jest tej postaci.

(4) Kiedy forma φ_A z punktu (3) jest hermitowsko symetryczna?

Uwaga. Oczywiście najważniejszymi dla nas przykładami ciał z inwolucją są: ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z trywialną inwolucją (tzn. identycznością) oraz ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ z inwolucją będącą sprzężeniem.

Zadanie 4.32. Niech K będzie ciałem z inwolucją. Załóżmy, że $\varphi\colon V \times V \to K$ jest formą półtoraliniową. *Grupę ortogonalną* formy φ definiujemy jako

$$\mathrm{O}(\varphi) = \{f \in \mathrm{Aut}(V) : \varphi(f(u), f(v)) = \varphi(u, v) \text{ dla dowolnych } u, v \in V\}.$$

Gdy $\dim V < \infty$, to można zdefiniować *specjalną grupę ortogonalną* formy φ jako

$$\mathrm{SO}(\varphi) = \{f \in \mathrm{O}(\varphi) : \det f = 1\}.$$

Sprawdź, że $\mathrm{O}(\varphi)$ jest podgrupą $\mathrm{Aut}(V)$. Uzasadnij, że gdy $\dim V < \infty$, to $\mathrm{SO}(\varphi)$ jest podgrupą $\mathrm{O}(\varphi)$.

Uwaga. Czasem można też spotkać zapis $\mathrm{O}(V)$ oraz $\mathrm{SO}(V)$ zamiast $\mathrm{O}(\varphi)$ oraz $\mathrm{SO}(\varphi)$, odpowiednio. Ponadto wybierając stosownie przestrzeń V oraz formę φ uzyskuje się wiele klasycznych grup macierzowych.

(1) Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$ spełniają $n = p + q \geqslant 1$. Gdy $V = \mathbb{R}^n$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j y_j - \sum_{j=p+1}^{n} x_j y_j,$$

to dostajemy *grupę ortogonalną* $\mathrm{O}(p, q) = \mathrm{O}(\varphi)$ oraz *specjalną grupę ortogonalną* $\mathrm{SO}(p, q) = \mathrm{SO}(\varphi)$ typu (p, q). Gdy zaś $q = 0$, to uzyskujemy *grupę ortogonalną* $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, 0)$ oraz *specjalną grupę ortogonalną* $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n, 0)$ stopnia n.

(2) Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$ spełniają $n = p + q \geqslant 1$. Gdy $V = \mathbb{C}^n$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j \overline{y}_j - \sum_{j=p+1}^{n} x_j \overline{y}_j,$$

to otrzymujemy *grupę unitarną* $\mathrm{U}(p, q) = \mathrm{O}(\varphi)$ oraz *specjalną grupę unitarną* $\mathrm{SU}(p, q) = \mathrm{SO}(\varphi)$ typu (p, q). Natomiast gdy $q = 0$, to dostajemy *grupę unitarną* $\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(n, 0)$ oraz *specjalną grupę unitarną* $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}(n, 0)$ stopnia n.

(3) Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Gdy $V = K^{2n}$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{n+j} - \sum_{j=1}^{n} x_{n+j} y_j,$$

to uzyskujemy *grupę symplektyczną* $\mathrm{Sp}_{2n}(K) = \mathrm{O}(\varphi)$ stopnia $2n$.

Dlaczego nie zdefiniowaliśmy „specjalnej grupy symplektycznej”? Warto też zaznaczyć, że *grupa Lorenza* $\mathrm{O}(3, 1)$ gra ważną rolę w *Szczególnej Teorii Względności*, natomiast grupa $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$ jest istotna w tzw. *Modelu Standardowym* opisującym trzy z czterech fundamentalnych oddziaływań w przyrodzie.

Zadanie 4.33. Niech K będzie ciałem z inwolucją. Załóżmy, że U oraz V są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad K, zaś $\varphi\colon U \times U \to K$ oraz $\psi\colon V \times V \to K$ są formami półtoraliniowymi. Udowodnij, że gdy forma φ jest niezdegenerowana, to dla dowolnego homomorfizmu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ istnieje dokładnie jeden taki homomorfizm $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$, że

$$\psi(f(u), v) = \varphi(u, g(v))$$

dla dowolnych $u \in U$ oraz $v \in V$.

Uwaga. Odwzorowanie g oznaczamy przez f^* i nazywamy *hermitowskim sprzężeniem* homomorfizmu f względem form φ oraz ψ.

Zadanie 4.34. Niech K będzie ciałem z inwolucją. Załóżmy, że U, V, W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad K, zaś $\varphi\colon U \times U \to K$, $\psi\colon V \times V \to K$ oraz $\chi\colon W \times W \to K$ są formami półtoraliniowymi. Dowiedź, że gdy formy φ oraz ψ są niezdegenerowane i hermitowsko symetryczne, to:

(1) $(f^*)^* = f$ dla $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$.
(2) $(\lambda f)^* = \lambda^* f^*$ oraz $(f + g)^* = f^* + g^*$ dla $\lambda \in K$ oraz $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$.
(3) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ dla $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ oraz $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Zadanie 4.35. Niech K będzie ciałem z inwolucją. Załóżmy, że U oraz V są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad K, zaś $\varphi\colon U \times U \to K$ oraz $\psi\colon V \times V \to K$ są formami półtoraliniowymi. Udowodnij, że gdy forma φ jest niezdegenerowana, A jest bazą przestrzeni U, zaś B jest bazą przestrzeni V, to

$$M_A(\varphi) M_{BA}(f^*)^* = M_{AB}(f)^t M_B(\psi)$$

(tutaj $M^* = [a^*_{jk}] \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ dla $M = [a_{jk}] \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$). W szczególności gdy bazy A oraz B są ortonormalne, to $M_{BA}(f^*)^* = M_{AB}(f)^t$.

Zadanie 4.36. Załóżmy, że ciało z inwolucją K jest algebraicznie domknięte. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K. Wykaż, że gdy $\varphi\colon V \times V \to K$ jest formą połtoraliniową, hermitowsko symetryczną i anizotropową, zaś endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest *normalny* (tzn. spełnia $f \circ f^* = f^* \circ f$), to istnieje ortonormalna baza własna dla f; w szczególności endomorfizm f jest diagonalizowalny.

Uwaga. W klasie endomorfizmów normalnych można wyróżnić kilka ważnych podklas. Mianowicie mówimy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest:

(1) *izometrią*, gdy $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$.
(2) *symetryczny* (lub *hermitowski* lub *samosprzężony*), gdy $f^* = f$.
(3) *antysymetryczny* (lub *antyhermitowski* lub *antysamosprzężony*), gdy $f^* = -f$.
(4) *dodatni*, gdy $f = g^* \circ g$ dla pewnego $g \in \mathrm{End}(V)$.

Zadanie 4.37. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Niech $n \geqslant 1$. Ustalmy skalary $\lambda_{ij} \in K$ dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ oraz funkcjonały $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ i zdefiniujmy odwzorowanie $Q\colon V \to K$ wzorem

$$Q(v) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \lambda_{ij} f_i(v) f_j(v).$$

Sprawdź, że Q jest formą kwadratową. Następnie dowiedź, że każda forma kwadratowa na przestrzeni V jest tej postaci.

Zadanie 4.38. Niech $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant 2\}$. Zdefiniujmy odwzorowanie $Q\colon V \to \mathbb{R}$ wzorem

$$Q(f) = \int_0^1 f(x)f'(1-x)dx.$$

(1) Uzasadnij, że Q jest formą kwadratową i znajdź symetryczną formę dwuliniową $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ stowarzyszoną z formą Q.

(2) Wyznacz macierz $M_B(Q)$ formy kwadratowej Q w bazie $B = \{1, x, x^2\}$, a następnie oblicz rząd i sygnaturę tej formy.

Zadanie 4.39. Oblicz rząd i sygnaturę formy kwadratowej $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, danej warunkiem

$$M_{\mathrm{st}}(Q) = \begin{bmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{bmatrix},$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.40. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Wykaż, że odwzorowanie $Q\colon V \to \mathbb{R}$, dane wzorem $Q(A) = \operatorname{tr} A^2$, jest formą kwadratową. Znajdź rząd i sygnaturę formy Q.

Zadanie 4.41. Załóżmy, że X jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Niech $r, s \geqslant 1$ oraz $f_1, \ldots, f_{r+s} \in X^*$. Sprawdź, że odwzorowanie $Q\colon X \to \mathbb{R}$, dane wzorem

$$Q(x) = f_1(x)^2 + \cdots + f_r(x)^2 - f_{r+1}(x)^2 - \cdots - f_{r+s}(x)^2,$$

jest formą kwadratową. Uzasadnij, że gdy rząd formy Q jest równy $p + q$, zaś sygnatura formy Q jest równa $p - q$ dla pewnych $p, q \geqslant 0$, to $p \leqslant r$ oraz $q \leqslant s$.

Zadanie 4.42. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Podaj automorfizm $f \in \mathrm{Aut}(V)$ sprowadzający formę kwadratową $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ do *postaci kanonicznej* (tzn.

$$(Q \circ f)(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

dla pewnych, jednoznacznie wyznaczonych, $p, q \geqslant 0$ spełniających $p + q \leqslant n$), gdy:

(1) $n = 3$ oraz $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2$.

(2) $n = 4$ oraz $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

Zadanie 4.43. Niech $V = \mathbb{R}^3$, zaś forma kwadratowa $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ będzie zdefiniowana wzorem

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4yz - z^2.$$

Wyznacz bazę przestrzeni V, w której macierz formy Q jest diagonalna. Rozwiąż to zadanie dwiema metodami, mianowicie znajdując ortogonalną bazę własną stosownego endomorfizmu samosprzężonego oraz stosując metodę uzupełniania do kwadratów.

Zadanie 4.44. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q \in \operatorname{Quad}(V)$ dane jako

$$P(x,y,z) = 3x^2 + 4xy + 4xz + 5y^2 + 2yz + z^2,$$
$$Q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 4yz + tz^2.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ formy P oraz Q są równoważne?

Zadanie 4.45. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Zbadaj określoność formy $Q \in \operatorname{Quad}(V)$, gdy:

(1) $n = 2$ oraz $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$.

(2) $n = 3$ oraz $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$.

(3) $n = 4$ oraz $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 5x_3^2$.

Zadanie 4.46. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Zdefiniujmy formę kwadratową $Q\colon V \to \mathbb{R}$ wzorem

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + 4xy + 2xz + sy^2 + tz^2.$$

Dla jakich par $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ forma Q jest:

(1) dodatnio określona?

(2) dodatnio półokreślona?

Zadanie 4.47. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Rozważmy formy $P, Q \in \operatorname{Quad}(V)$ dane jako

$$P(x,y,z) = 5x^2 + 2xy + 2txz + y^2,$$
$$Q(x,y,z) = x^2 - 2xy - y^2 - z^2.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ nierówność:

(1) $P(v) > Q(v)$ jest prawdziwa dla każdego $0 \neq v \in V$?

(2) $P(v) \geqslant Q(v)$ jest prawdziwa dla każdego $v \in V$?

Zadanie 4.48. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Rozważmy formy kwadratowe $P, Q \in \operatorname{Quad}(V)$ dane wzorami

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \min\{i,j\} x_i x_j, \qquad Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \max\{i,j\} x_i x_j.$$

Wyznacza postacie kanoniczne form P oraz Q. Oblicz rzędy i sygnatury form P, Q oraz zbadaj ich określoność.

Zadanie 4.49. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że $A = A^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest macierzą o wartościach własnych $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Wyznacz wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, dla których wszystkie formy kwadratowe $Q_k \in \operatorname{Quad}(V)$ dla $k \in \mathbb{N}$, zadane warunkiem $M_{\mathrm{st}}(Q_k) = (A + \lambda I)^k$, są dodatnio określone.

Zadanie 4.50. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że forma $Q \in \operatorname{Quad}(V)$ jest dodatnio określona. Wykaż, że gdy $M_{\mathrm{st}}(Q) = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, to $a_{ii} > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Czy można sformułować podobny warunek dla form ujemnie określonych/półokreślonych?

Zadanie 4.51. Niech $K = \mathbb{F}_2$ oraz $V = K^2$. Pokaż, że forma kwadratowa $Q\colon V \to K$, dana wzorem $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$, nie może być *zdiagonalizowana*, tzn. nie istnieje taki automorfizm $f \in \operatorname{Aut}(V)$, że $(Q \circ f)(x,y) = ax^2 + by^2$ dla pewnych $a, b \in K$.

Zadanie 4.52. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Udowodnij, że $\operatorname{Quad}(V) \cong (\Sigma^2 V)^*$.

Uwaga. Zauważmy, że gdy $\dim V = n < \infty$, to izomorfizm $\operatorname{Quad}(V) \cong (\Sigma^2 V)^*$ pozwala identyfikować formy kwadratowe na V z wielomianami jednorodnymi w $K[x_1, \ldots, x_n]$ stopnia 2 (dlatego można spotkać również taką definicję form kwadratowych).

Zadanie 4.53. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Zdefiniujmy *zbiór skalarów reprezentowanych przez formę* $Q \in \operatorname{Quad}(V)$ jako

$$D(Q) = \{a \in K^\times : a = Q(v) \text{ dla pewnego } v \in V\}.$$

Uzasadnij, że:

(1) $a \in D(Q) \iff ab^2 \in D(Q)$ dla dowolnych $a, b \in K^\times$.
(2) $a \in D(Q) \iff a^{-1} \in D(Q)$ dla dowolnego $a \in K^\times$.
(3) zbiór $D(Q)$ nie musi być podgrupą $K^\times$ nawet wtedy, gdy $1 \in D(Q)$.

Uwaga. Formę kwadratową $Q \in \operatorname{Quad}(V)$, dla której zbiór $D(Q)$ jest grupą nazywamy *grupową formą kwadratową.*

Zadanie 4.54. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{Q}^n$. Rozważmy formę $Q \in \operatorname{Quad}(V)$ daną wzorem

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Twierdzenie Lagrange'a o sumie czterech kwadratów mówi, że każda liczba naturalna da się przedstawić jako suma co najwyżej czterech kwadratów liczb naturalnych. Wywnioskuj stąd, że gdy $n \geqslant 4$, to $D(Q) = \mathbb{Q}_+$, gdzie $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$. Dowiedź, że gdy $n \leqslant 3$, to $D(Q) \neq \mathbb{Q}_+$ (lub, równoważnie, $\mathbb{N} \nsubseteq D(Q)$).

Zadanie 4.55. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Załóżmy, że G jest podgrupą grupy $\operatorname{Aut}(V)$. Dla dowolnego $g \in G$ oraz $Q \in \operatorname{Quad}(V)$ określmy nowe odwzorowanie $g \cdot Q\colon V \to K$ wzorem

$$g \cdot Q = Q \circ g^{-1}.$$

(1) Sprawdź, że określona powyżej operacja zadaje *działanie grupy G* na przestrzeni form kwadratowych $\operatorname{Quad}(V)$, tzn. $g \cdot Q \in \operatorname{Quad}(V)$, a ponadto $\mathrm{id}_V \cdot Q = Q$ oraz $(g \circ h) \cdot Q = g \cdot (h \cdot Q)$ dla dowolnych $g, h \in G$ oraz $Q \in \operatorname{Quad}(V)$.
(2) Wykaż, że relacja $\sim_G$ w $\operatorname{Quad}(V)$, zdefiniowana dla $P, Q \in \operatorname{Quad}(V)$ jako

$$P \sim_G Q \iff P = g \cdot Q \text{ dla pewnego } g \in G,$$

jest relacją równoważności. Klasy abstrakcji relacji $\sim_G$ nazywamy *G-orbitami.*

(3) Pokaż, że *G-stabilizator*
$$\{g \in G : g \cdot Q = Q\}$$
formy $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ jest podgrupą grupy G.

(4) Załóżmy, że $G = \mathrm{Aut}(V)$. Czym jest relacja $\sim_G$? Czym są G-orbity? Czym jest G-stabilizator formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$?

Zadanie 4.56. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Niech $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ oraz $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ będzie formą stowarzyszoną z Q. *Radykał* formy Q definiujemy jako
$$\mathrm{rad}\, Q = \{v \in V : \varphi(v, w) = 0 \text{ dla dowolnego } w \in V\}.$$
Udowodnij, że:

(1) $\mathrm{rad}\, Q$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

(2) $\mathrm{rad}\, Q = \{v \in V : Q(v + w) = Q(w) \text{ dla dowolnego } w \in V\}$.

(3) gdy $X = V/\mathrm{rad}\, Q$, to odwzorowanie $q \colon X \to K$, dane wzorem
$$q(v + \mathrm{rad}\, Q) = Q(v),$$
jest *dobrze określone* (tzn. wartość $Q(v)$ nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $v + \mathrm{rad}\, Q \in X$) i jest formą kwadratową na X. Jak wygląda symetryczna forma dwuliniowa na X wyznaczona przez q?

(4) forma q jest *niezdegenerowana*, tzn. $\mathrm{rad}\, q = 0$.

Zadanie 4.57. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Niech $Q \in \mathrm{Quad}(V)$. Dowiedź, że istnieje taka podprzestrzeń $U \subseteq V$, że $V = U \perp \mathrm{rad}\, Q$, zaś forma kwadratowa $Q|_U \in \mathrm{Quad}(U)$ jest niezdegenerowana. Czy podprzestrzeń U jest wyznaczona jednoznacznie?

Zadanie 4.58. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. *Grupę ortogonalną* formy $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ definiujemy jako
$$\mathrm{O}(Q) = \{f \in \mathrm{Aut}(V) : Q \circ f = Q\}.$$
Gdy $\dim V < \infty$, to można też wprowadzić *specjalną grupę ortogonalną* formy Q jako
$$\mathrm{SO}(Q) = \{f \in \mathrm{O}(Q) : \det f = 1\}.$$

(1) Wykaż, że gdy $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ jest formą wyznaczoną przez Q, to $\mathrm{O}(Q) = \mathrm{O}(\varphi)$ oraz gdy $\dim V < \infty$, to $\mathrm{SO}(Q) = \mathrm{SO}(\varphi)$.

(2) Niech $V = \mathbb{C}^2$, zaś forma $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ będzie dana wzorem $Q(x, y) = x^2 + y^2$. Wyznacz grupy $\mathrm{O}(Q)$ oraz $\mathrm{SO}(Q)$ (zwane *zespoloną grupą ortogonalną* stopnia 2 oraz *zespoloną specjalną grupą ortogonalną* stopnia 2, odpowiednio).

(3) Niech $V = \mathbb{R}^2$, zaś forma $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ będzie dana wzorem $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Uzasadnij, że $\mathrm{O}(Q) \cong \mathrm{O}(1, 1)$ oraz $\mathrm{SO}(Q) \cong \mathrm{SO}(1, 1)$ i pokaż, że
$$\mathrm{SO}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ spełniają } a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

Uwaga. Z opisu grupy $\mathrm{SO}(1,1)$ w punkcie (3) wynika, że ma ona dwie *spójne składowe* (w sensie topologicznym; odpowiadające dwóm sytuacjom: $a \leqslant -1$ lub $a \geqslant 1$). Składowa zawierająca macierz identycznościową jest podgrupą i oznacza się ją przez $\mathrm{SO}^+(1,1)$. Ponadto

$$\mathrm{SO}^+(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

gdzie *sinus hiperboliczny* oraz *cosinus hiperboliczny* liczby $z \in \mathbb{C}$ zdefiniowane są wzorami

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{oraz} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

(zauważmy, że $\sinh z = -i\sin(iz)$ oraz $\cosh z = \cos(iz)$). Nietrudno też sprawdzić, że

$$\begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(x+y) & \sinh(x+y) \\ \sinh(x+y) & \cosh(x+y) \end{bmatrix}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Stąd wniosek, że grupa $\mathrm{SO}^+(1,1)$ jest izomorficzna z grupą addytywną liczb rzeczywistych.

Definicja. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$ oraz $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ (wtedy parę (V, Q), lub czasem samą przestrzeń V, nazywamy *przestrzenią kwadratową*). Mówimy, że wektor $v \in V$ jest *izotropowy*, gdy $Q(v) = 0$. W przeciwnym przypadku (tzn. gdy $Q(v) \neq 0$) powiemy, że wektor v jest *anizotropowy*. Mówimy, że podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest:

(1) *zdegenerowana*, gdy forma kwadratowa $Q|_U$ jest zdegenerowana.
(2) *izotropowa*, gdy $Q(u) = 0$ dla pewnego $0 \neq u \in U$ (tzn. gdy U zawiera niezerowy wektor izotropowy).
(3) *anizotropowa*, gdy $Q(u) \neq 0$ dla dowolnego $0 \neq u \in U$ (tzn. gdy U nie zawiera niezerowego wektora izotropowego).
(4) *całkowicie izotropowa*, gdy $Q(u) = 0$ dla dowolnego $u \in U$ (tzn. gdy każdy wektor $u \in U$ jest izotropowy).
(5) *hiperboliczna*, gdy $U \cong \mathcal{H} \perp \cdots \perp \mathcal{H}$ (skończona suma ortogonalna płaszczyzn hiperbolicznych; w szczególności $\dim U$ jest liczbą parzystą).

Zaznaczmy, że gdy (X, P) oraz (Y, Q) są przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem K, to zapis $X \cong Y$ oznacza, iż przestrzenie te są *izometryczne*, tzn. istnieje taki izomorfizm $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, że $Q \circ f = P$.

Zadanie 4.59. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$. Przypuśćmy, że $a, b \in K$ spełniają $c = a^2 + b^2 \neq 0$. Niech $V = K^4$ i rozważmy formę kwadratową $Q\colon V \to K$ daną wzorem

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - cx_3^2 - cx_4^2.$$

Pokaż, że przestrzeń V jest hiperboliczna, czyli $V \cong \mathcal{H} \perp \mathcal{H}$.

Zadanie 4.60 (twierdzenia Witta). Przypuśćmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$. Dowiedź, że poniższe twierdzenia są równoważne.

(1) Załóżmy, że U_1, U_2 oraz V_1, V_2 są przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem K. Jeśli $U_1 \cong U_2$ oraz $U_1 \perp V_1 \cong U_2 \perp V_2$, to $V_1 \cong V_2$.

(2) Załóżmy, że $X_1 = U_1 \perp V_1$ oraz $X_2 = U_2 \perp V_2$ są przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem K. Jeśli $X_1 \cong X_2$ oraz $f\colon U_1 \to U_2$ jest izometrią, to istnieje taka izometria $F\colon X_1 \to X_2$, że $F|_{U_1} = f$ oraz $F(V_1) = V_2$.

Uwaga. Punkt (1) powyższego zadania nosi nazwę twierdzenia Witta o skracaniu, zaś punkt (2) nazywany jest twierdzeniem Witta o rozszerzaniu.

Zadanie 4.61. Załóżmy, że X jest przestrzenią kwadratową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Przypuśćmy, że podprzestrzenie $U, V \subseteq X$ są niezdegenerowane. Uzasadnij, że gdy $f\colon U \to V$ jest izometrią, to istnieje taka izometria $F\colon X \to X$, że $F|_U = f$.

Zadanie 4.62. Załóżmy, że $X = \mathbb{Q}^3$, zaś forma $Q \in \mathrm{Quad}(X)$ jest zadana wzorem $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$. Niech $u = (1, 1, 0) \in X$ oraz $v = (2, 1, 1) \in X$. Czy istnieje taka izometria $F \in \mathrm{O}(X)$, że $F(u) = v$? Jeśli tak, to podaj przykład takiej izometrii. Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego.

Zadanie 4.63. Niech $X = \mathbb{R}^3$ oraz $Q\colon X \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową daną wzorem $Q(x, y, z) = x^2 - y^2$. Rozważmy podprzestrzenie

$$U = \mathrm{Span}\{(1, 1, 0)\} \qquad \text{oraz} \qquad V = \mathrm{Span}\{(0, 0, 1)\}$$

przestrzeni X.

(1) Wskaż izometrię $f\colon U \to V$.

(2) Pokaż, że nie istnieje taka izometria $F\colon X \to X$, że $F|_U = f$.

Zadanie 4.64 (rozkład Witta)**.** Załóżmy, że (V, Q) jest przestrzenią kwadratową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Dowiedź, że istnieje rozkład $V = V_t \perp V_h \perp V_a$, w którym podprzestrzeń V_t jest całkowicie izotropowa, podprzestrzeń V_h jest hiperboliczna, zaś podprzestrzeń V_a jest anizotropowa. Uzasadnij, że w każdym takim rozkładzie $V_t = \mathrm{rad}\, Q$.

Uwaga. Można pokazać (np. korzystając z twierdzenia Witta o skracaniu), że wszystkie trzy podprzestrzenie V_t, V_h, V_a są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do izometrii. Liczbę $i(Q) = \frac{1}{2} \dim V_h$ nazywamy *indeksem Witta* formy kwadratowej Q.

Zadanie 4.65. Niech (V, Q) będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem charakterystyki $\neq 2$. Udowodnij, że gdy forma Q jest niezdegenerowana, to $i(Q) = \dim U$ dla dowolnej maksymalnej podprzestrzeni całkowicie izotropowej $U \subseteq V$. Jak można uogólnić ten fakt pomijając założenie o niezdegenerowaniu formy Q?

Zadanie 4.66. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$ spełniają $p + q \leqslant n$. Wyznacz rozkład Witta przestrzeni $V = \mathbb{R}^n$ dla formy kwadratowej $Q \in \mathrm{Quad}(V)$ danej wzorem

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Oblicz indeks Witta $i(Q)$ formy Q.

Zadanie 4.67. Załóżmy, że G jest grupą skończoną. Rozważmy przestrzeń wektorową $V = \mathbb{R}G = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{R}g$ o bazie G oraz odwzorowanie $Q\colon V \to \mathbb{R}$ zadane wzorem

$$Q\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g\in G} \lambda_g \lambda_{g^{-1}}.$$

(1) Uzasadnij, że Q jest formą kwadratową. Następnie sprawdź, że forma $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(V)$ stowarzyszona z Q jest dana formułą $\varphi(u, v) = T(uv)$ (mnożenie w V definiujemy jako $\mathbb{R}$-dwuliniowe rozszerzenie mnożenia w G), gdzie funkcjonał $T \in V^*$ jest zadany wzorem $T(\sum_{g\in G} \lambda_g g) = \lambda_1$. Czym jest T w języku bazy sprzężonej do G?

(2) Uzasadnij, że $i(Q) = \frac{1}{2}(|G| - n)$, gdzie $n = |\{g \in G : g^2 = 1\}|$. Czy równość ta pozostanie prawdziwa, gdy ciało $\mathbb{R}$ zastąpimy innym ciałem charakterystyki $\neq 2$?

Uwaga. Punkt (2) zapewnia, że $|G| \equiv n \pmod 2$. Czy potrafisz podać niezależny dowód tego faktu?

Zadanie 4.68. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$.

(1) Klasa przestrzeni kwadratowych nad ciałem K rozkłada się na rozłączne *klasy izometrii*, których elementami są izometryczne przestrzenie kwadratowe nad K. Uzasadnij, iż rodzina $\mathrm{W}(K)$ złożona z klas izometrii anizotropowych przestrzeni kwadratowych nad K stanowi zbiór. Element zbioru $\mathrm{W}(K)$ wyznaczony przez anizotropową przestrzeń kwadratową V nad K oznaczamy przez $[V]$.

(2) Jeśli V jest przestrzenią kwadratową nad ciałem K, to niech V_a oznacza część anizotropową w rozkładzie Witta $V = V_t \perp V_h \perp V_a$ przestrzeni V. Z twierdzenia Witta wynika, że gdy przestrzenie kwadratowe U, V nad ciałem K są izometryczne, to przestrzenie anizotropowe U_a, V_a także są izometryczne. Korzystając z tego faktu pokaż, że działania dodawania i mnożenia w $\mathrm{W}(K)$, dane jako

$$[U] + [V] = [(U \perp V)_a] \qquad \text{oraz} \qquad [U] \cdot [V] = [(U \otimes V)_a],$$

są poprawnie zdefiniowane.

(3) Udowodnij, że trójka $(\mathrm{W}(K), +, \cdot\,)$ jest *przemiennym pierścieniem z jedynką*, tzn. spełnia wszystkie aksjomaty ciała prócz (ewentualnie) aksjomatu mówiącego, że każdy niezerowy element ma multiplikatywną odwrotność. Jak wygląda element neutralny dodawania w $\mathrm{W}(K)$? Czym jest element neutralny mnożenia w $\mathrm{W}(K)$? Opisz element przeciwny oraz element odwrotny do $0 \neq [V] \in \mathrm{W}(K)$?

Uwaga. Pierścień $\mathrm{W}(K)$ nazywamy *pierścieniem Witta* ciała K.

Zadanie 4.69. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $\neq 2$. Uzasadnij, że:

(1) gdy $K = K^2 = \{a^2 : a \in K\}$, to $\mathrm{W}(K) \cong \mathbb{F}_2$.

(2) gdy $K = \mathbb{R}$, to $\mathrm{W}(K) \cong \mathbb{Z}$.

Uwaga. Ciało F spełniające $F = F^2$ nazywamy *kwadratowo domkniętym*. Oczywiście ciało algebraicznie domknięte jest kwadratowo domknięte. W szczególności $\mathrm{W}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{F}_2$.

Zadanie 4.70. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki zero. Niech $n \geqslant 2$. Udowodnij, że dla odwzorowania $Q\colon V \to K$ następujące warunki są równoważne:

(1) istnieje takie odwzorowanie n-liniowe $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to K$, że $Q(v) = \varphi(v, \ldots, v)$ dla dowolnego $v \in V$.

(2) $Q(\lambda v) = \lambda^n Q(v)$ dla dowolnego $\lambda \in K$ oraz $v \in V$, a ponadto odwzorowanie $\varphi\colon V \times \cdots \times V \to K$, dane wzorem

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} Q(\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n),$$

jest n-liniowe i symetryczne.

Uwaga. Odwzorowanie Q spełniające powyższe warunki nazywamy *formą stopnia n* na przestrzeni V (dla $n = 2$ mamy definicję formy kwadratowej). Ponadto odwzorowanie φ zdefiniowane w punkcie (2) jest jedynym symetrycznym odwzorowaniem n-liniowym o własności $Q(v) = \varphi(v, \ldots, v)$ dla $v \in V$ (równość definiująca odwzorowanie φ nosi nazwę *formuły polaryzacyjnej*). W szczególności zachodzi tożsamość

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$

5 Przestrzenie euklidesowe i unitarne

Umawiamy się, że *przestrzeń euklidesowa* (odpowiednio *unitarna*), to przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ (odpowiednio nad $\mathbb{C}$), niekoniecznie skończonego wymiaru, z iloczynem skalarnym, czyli formą dwuliniową, symetryczną i dodatnio określoną (odpowiednio półtoraliniową, hermitowsko symetryczną i dodatnio określoną). Ponadto, gdy nie powiedziano inaczej, to w przestrzeni $V = K^n$, gdzie $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz $n \geqslant 1$ posługujemy się standardowym iloczynem skalarnym, indukowaną przez niego normą i metryką. Mianowicie:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, \qquad \rho(x,y) = \|x - y\|$$

dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ oraz $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$.

Zadanie 5.1. Udowodnij, że:

(1) gdy V jest przestrzenią euklidesową oraz $u, v \in V$, to

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\big(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

(2) gdy V jest przestrzenią unitarną oraz $u, v \in V$, to

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \frac{1}{2}\big(\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)(\|u\|^2 + \|v\|^2)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - \|u-v\|^2 - i\|u-iv\|^2\big).\end{aligned}$$

Zadanie 5.2. Przypuśćmy, że $u \neq 0$ oraz v są wektorami przestrzeni euklidesowej V. Dowiedź, że następujące warunki są równoważne:

(1) $v = \lambda u$ dla pewnego $\lambda \geqslant 0$.

(2) $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$.

(3) $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\|$.

Czy warunki (1), (2) oraz (3) są równoważne, gdy V jest przestrzenią unitarną?

Zadanie 5.3. Załóżmy, że V jest przestrzenią unitarną oraz $u, v \in V$.

(1) Wykaż, że $u \perp v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|u+v\|^2 = \|u+iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(2) Udowodnij, że równość $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ nie gwarantuje, iż $u \perp v$.

Zadanie 5.4. Załóżmy, że V jest rzeczywistą przestrzenią wektorową.

(1) Czy suma iloczynów skalarnych w V jest iloczynem skalarnym w V?

(2) Czy iloczyny skalarne w V tworzą podprzestrzeń przestrzeni $\mathrm{Bil}_s(V)$?

Zadanie 5.5. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową lub unitarną. Przypomnijmy, że *dopełnienie ortogonalne* podprzestrzeni $U \subseteq V$ definiujemy jako

$$U^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0 \text{ dla dowolnego } u \in U\}.$$

Dowiedź, że gdy $(U_i)_{i\in I}$ jest rodziną podprzestrzeni przestrzeni V, to:

(1) $(\sum_{i\in I} U_i)^{\perp} = \bigcap_{i\in I} U_i^{\perp}$.
(2) $(\bigcap_{i\in I} U_i)^{\perp} \supseteq \sum_{i\in I} U_i^{\perp}$.

Uzasadnij, że gdy $\dim V < \infty$, to inkluzję w punkcie (2) można zastąpić równością. Czy można to zrobić zawsze?

Zadanie 5.6. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$.

(1) Sprawdź, że formuła $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ zadaje iloczyn skalarny w przestrzeni V.
(2) Wyznacz dopełnienie ortogonalne $U^{\perp}$ podprzestrzeni $U = \{A \in V : \mathrm{tr}\, A = 0\}$.

Zadanie 5.7. Niech $n, m \geqslant 1$ oraz $V = \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.

(1) Pokaż, że formuła $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^h)$ zadaje iloczyn skalarny w przestrzeni V.
(2) Skonstruuj bazę ortonormalną przestrzeni V.

Zadanie 5.8. Niech $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz $V = \{f \in \mathbb{C}[x] : \deg f \leqslant n\}$. Czy formuła

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0)\overline{g^{(j)}(0)}$$

zadaje iloczyn skalarny w przestrzeni V? Jeśli tak, to wyznacz dopełnienie ortogonalne $U^{\perp}$ podprzestrzeni $U = \mathrm{Span}\{x^j : 0 \leqslant j \leqslant k\}$.

Zadanie 5.9. Niech $X = \mathbb{R}[x]$ oraz $n \geqslant 1$.

(1) Uzasadnij, że istnieje jedyny iloczyn skalarny w X spełniający $\langle x^i, x^j\rangle = \delta_{ij}$ dla dowolnych $i, j \geqslant 0$.
(2) Wyznacz dopełnienie ortogonalne $U^{\perp}$ podprzestrzeni $U = \{(x^n - 1)f : f \in X\}$ oraz wykaż, że $X = U \oplus V$, gdzie $V = \{f \in X : \deg f < n\}$.
(3) Podaj przykład podprzestrzeni $U, V \subseteq X$ nieskończonego wymiaru spełniających $X = U \oplus V$ oraz $V^{\perp} = 0$.

Zadanie 5.10. Niech $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

(1) Jakie warunki musi spełniać funkcja $\rho \in V$, aby formuła

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

definiowała iloczyn skalarny w przestrzeni V?

(2) Dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ zdefiniujmy funkcję $f_n \in V$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Uzasadnij, że układ $F = \{f_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq V$ jest ortonormalny względem iloczynu skalarnego wyznaczonego przez funkcję $\rho \in V$ daną jako $\rho(x) = 1$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Zadanie 5.11. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Dowolna macierz $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ wyznacza formę dwuliniową $\varphi_A \in \mathrm{Bil}(V)$ za pomocą wzoru

$$\varphi_A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

dla $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ oraz $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$.

(1) Jakie warunki musi spełniać macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, by forma φ_A była iloczynem skalarnym w V?

(2) Udowodnij, że gdy forma φ_A zadana przez macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest iloczynem skalarnym w V, to forma φ_{A^k} jest iloczynem skalarnym w V dla dowolnego $k \geqslant 1$.

(3) Załóżmy, że $n = 2$. Podaj przykład takiej symetrycznej macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, że forma φ_A nie jest iloczynem skalarnym w V, natomiast forma φ_{A^2} jest iloczynem skalarnym w V.

Zadanie 5.12. Korzystając z kryterium Sylvestera wyznacz te pary $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dla których forma dwuliniowa $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadana macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & s & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix},$$

jest iloczynem skalarnym.

Zadanie 5.13. Wyznacz $\min S$ oraz $\max S$ zbioru

$$S = \{\langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, u\rangle : u, v, w \in \mathbb{R}^2 \text{ spełniają } \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1\}.$$

Zadanie 5.14. Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Oblicz $\|u\| + \|v\|$ oraz $\|u\| \cdot \|v\|$ wiedząc, że wektory $u, v \in V$ spełniają:

$$\|u + v\| = 3, \qquad \|u - v\| = 2, \qquad \cos\sphericalangle(u, v) = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 5.15. Załóżmy, że wektory $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ spełniają $\langle v_i, v_j\rangle < 0$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że pewne trzy spośród niech są liniowo niezależne. Czy każde trzy spośród wektorów v_1, v_2, v_3, v_4 muszą być liniowo niezależne?

Zadanie 5.16. Wyznacz bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zawartą w zbiorze

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{-1, 1\}\}.$$

Zadanie 5.17. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. Pokaż, że gdy zbiór $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni V, zaś wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ spełniają $\sum_{j=1}^n \|v_j\|^2 < 1$, to zbiór $B = \{e_1 + v_1, \ldots, e_n + v_n\}$ jest bazą przestrzeni V.

Zadanie 5.18. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. Niech zbiór $\{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Wykaż, że:

(1) $v = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j$ dla dowolnego $v \in V$.

(2) $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle \langle e_j, v \rangle$ dla dowolnych $u, v \in V$.

(3) $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2$ dla dowolnego $v \in V$ (*tożsamość Parsevala*).

Zadanie 5.19. Rozważmy wektory:

$$v_1 = (2, -1, 0, -2), \quad v_2 = (4, 1, 4, -4), \quad v_3 = (0, 0, 1, 0), \quad v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Stosując algorytm Grama–Schmidta wyznacz taką bazę ortonormalną $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że $\mathrm{Span}\{e_1, \ldots, e_i\} = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_i\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Zadanie 5.20. Niech $V = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leqslant 3\}$. Iloczyn skalarny w przestrzeni V definiujemy wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

(1) Posługując się algorytmem Grama–Schmidta skonstruuj taką bazę ortonormalną $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ przestrzeni V, że $\mathrm{Span}\{f_0, \ldots, f_j\} = \mathrm{Span}\{1, \ldots, x^j\}$ dla $0 \leqslant j \leqslant 3$.

(2) Wyznacz taki wielomian $\delta \in V$, że $\int_{-1}^1 f(x)\delta(x)dx = f(0)$ dla dowolnego $f \in V$.

(3) Czy istnieje taka funkcja $\delta \in \mathcal{C}([-1, 1])$, że $\int_{-1}^1 f(x)\delta(x)dx = f(0)$ dla dowolnego wielomianu $f \in \mathbb{R}[x]$?

Zadanie 5.21. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(1) $A = P^t P$ dla pewnej macierzy $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(2) $A = M_{\mathrm{st}}(\varphi)$ dla pewnego iloczynu skalarnego $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zadanie 5.22. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dowiedź, że istnieje dokładnie jedna taka macierz dolno-trójkątna $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ z dodatnimi elementami na diagonali oraz dokładnie jedna taka macierz górno-trójkątna $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ z dodatnimi elementami na diagonali, że macierze LA oraz UA są ortogonalne.

Uwaga. Przypomnijmy, iż macierz $M = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ nad ciałem K jest *dolno-trójkątna* (odpowiednio *górno-trójkątna*), gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (odpowiednio $a_{ij} = 0$ dla $i > j$).

Zadanie 5.23 (rozkład Iwasawy)**.** Niech $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n^+(\mathbb{R}) &= \{[a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : a_{11}, \ldots, a_{nn} > 0 \text{ oraz } a_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j\}, \\ \mathrm{UT}_n(\mathbb{R}) &= \{[a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1 \text{ oraz } a_{ij} = 0 \text{ dla } i > j\}. \end{aligned}$$

Wykorzystując algorytm Grama–Schmidta udowodnij, że dowolną macierz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ można zapisać jednoznacznie jako $P = RDU$, gdzie $(R, D, U) \in \mathrm{O}(n) \times \mathrm{D}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$. Spróbuj uzyskać podobny rozkład dla macierzy z $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 5.24. Wyznacz rozkład Iwasawy macierzy

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{oraz} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Zadanie 5.25. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową lub unitarną. *Wyznacznik Grama* wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ definiujemy wzorem

$$G(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \langle v_n, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Dowiedź, że:

(1) $G(v_1, \ldots, v_n) \geqslant 0$ dla dowolnych $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne.

(2) $G(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m) \leqslant G(v_1, \ldots, v_n) G(w_1, \ldots, w_m)$ dla dowolnych wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz $w_1, \ldots, w_m \in V$. Ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle v_i, w_j \rangle = 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j \leqslant m$ lub gdy jeden z ciągów $v_1, \ldots, v_n$ lub $w_1, \ldots, w_m$ jest liniowo zależny.

Zadanie 5.26. Niech $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, że zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *zwarty* (tzn. domknięty i ograniczony), *wypukły* (tzn. $x, y \in B \Longrightarrow tx + (1-t)y \in B$ dla dowolnego $t \in [0,1]$), *symetryczny* (tzn. $x \in B \Longrightarrow -x \in B$) oraz ma niepuste wnętrze. Wykaż, iż istnieje taka norma $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, że

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) \leqslant 1\}$$

(tzn. norma, względem której zbiór B jest domkniętą kulą jednostkową).

Zadanie 5.27. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest przestrzenią euklidesową lub unitarną. *Ciało wartości* endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ definiujemy jako

$$W(f) = \{\langle f(v), v \rangle : v \in V \text{ spełnia } \|v\| = 1\}.$$

Pokaż, że gdy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ (lub $\lambda \in \mathbb{C}$ w przypadku unitarnym), to:

(1) $\sigma(f) \subseteq W(f)$.

(2) $W(\lambda f) = \lambda W(f)$.

(3) $W(f+g) \subseteq W(f) + W(g)$ oraz $W(f + \lambda\, \mathrm{id}_V) = W(f) + \lambda$.

Czy w pierwszej części punktu (3) inkluzja zawsze może być zastąpiona równością?

Zadanie 5.28. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. Przypuśćmy, że $d \in \operatorname{End}(V)$ spełnia $d^2 = 0$. *Operator Laplace'a–de Rhama* definiujemy wzorem

$$\Delta = (d + d^*)^2 = d \circ d^* + d^* \circ d.$$

Udowodnij, że:

(1) $\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker} d^*$ oraz $\operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Im} d \perp \operatorname{Im} d^*$.

(2) $V = \operatorname{Ker} d + \operatorname{Ker} d^* = \operatorname{Ker} \Delta \perp \operatorname{Im} d \perp \operatorname{Im} d^*$ (*rozkład Hodge'a*).

(3) $\operatorname{Ker} d = \operatorname{Ker} \Delta \perp \operatorname{Im} d$. W szczególności otrzymujemy $\operatorname{Ker} \Delta \cong \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$.

(4) gdy wymiar przestrzeni V jest liczbą nieparzystą, to $\operatorname{Ker} \Delta \neq 0$. Wskaż przykład, w którym $\dim V = 2$ oraz $\operatorname{Ker} \Delta = 0$.

Zadanie 5.29. Niech $V \neq 0$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. *Normę operatorową* endomorfizmu $f \in \operatorname{End}(V)$ definiujemy wzorem

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| : v \in V \text{ spełnia } \|v\| \leqslant 1\}.$$

Uzasadnij równości

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{\|f(v)\| : v \in V \text{ spełnia } \|v\| = 1\} \\ &= \inf\{L \geqslant 0 : \|f(v)\| \leqslant L\|v\| \text{ dla } v \in V\} \end{aligned}$$

i wykaż, że:

(1) zdefiniowana powyżej norma operatorowa jest normą w przestrzeni $\operatorname{End}(V)$.

(2) $\|f(v)\| \leqslant \|f\| \cdot \|v\|$ dla $f \in \operatorname{End}(V)$ oraz $v \in V$.

(3) $\|f \circ g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ dla $f, g \in \operatorname{End}(V)$.

(4) $\|f\|^2 = \|f \circ f^*\| = \|f^* \circ f\| = \|f^*\|^2$ dla $f \in \operatorname{End}(V)$.

(5) $\|\exp f\| \leqslant e^{\|f\|}$ dla $f \in \operatorname{End}(V)$, gdzie $\exp f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n \in \operatorname{End}(V)$.

Uwaga. Przestrzeń $\operatorname{End}(V)$ z wprowadzoną powyżej normą jest przykładem szczególnego typu *algebry Banacha* — tzw. *C^*-algebry.*

Zadanie 5.30. Załóżmy, że V jest przestrzenią unitarną skończonego wymiaru.

(1) Dla dowolnego $v \in V$ zdefiniujmy funkcję $f_v \colon V \to \mathbb{C}$ wzorem $f_v(u) = \langle u, v \rangle$ dla $u \in V$. Sprawdź, że $f_v \in V^*$.

(2) Punkt (1) pozwala zdefiniować odwzorowanie $F \colon V \to V^*$ wzorem $F(v) = f_v$. Dowiedź, że F jest *antyizomorfizmem*, tzn. F jest *antyliniową* bijekcją, co znaczy, że F jest bijekcją spełniającą $F(v + w) = F(v) + F(w)$ oraz $F(\lambda v) = \overline{\lambda} F(v)$ dla dowolnych $v, w \in V$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3) Uzasadnij, że istnieje jedyny iloczyn skalarny $\varphi \colon V^* \times V^* \to \mathbb{C}$, przy którym odwzorowanie F z punktu (2) jest *izometrycznym antyizomorfizmem*, tzn. spełnia dodatkowo $\varphi(F(v), F(w)) = \langle v, w \rangle$ dla dowolnych $v, w \in V$.

Uwaga. Skonstruowane w powyższym zadaniu odwzorowanie F nazywane jest zwykle *antyizomorfizmem Frécheta–Riesza*. Gdy przestrzeń V jest euklidesowa, to analogiczna konstrukcja prowadzi do *izomorfizmu Frécheta–Riesza*.

Zadanie 5.31. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Wykaż, że endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ dany wzorem

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

jest samosprzężony. Wyznacz bazę ortonormalną przestrzeni V składającą się z wektorów własnych endomorfizmu f.

Zadanie 5.32. Załóżmy, że $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ ma w pewnej bazie B przestrzeni $\mathbb{R}^2$ macierz postaci

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uzasadnij, że endomorfizm f nie jest samosprzężony.

Zadanie 5.33. Niech $u = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

(1) Podaj przykład endomorfizmu samosprzężonego $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz takiej bazy B przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $M_B(f) = A$. Czy taki endomorfizm jest jedyny?

(2) Znajdź taki endomorfizm samosprzężony $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz wektor $v \in \mathbb{R}^2$, że $B = \{u, v\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz $M_B(f) = A$. Czy taki endomorfizm jest wyznaczony jednoznacznie?

Zadanie 5.34. Niech $n \geqslant 2$. W przestrzeni $V = \operatorname{Map}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ rozważmy iloczyn skalarny dany formułą

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}_n} f(k)g(k).$$

Zdefiniujmy $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ wzorem

$$\Phi(f)(k) = \frac{f(k-1) + f(k+1)}{2} - f(k)$$

dla $f \in V$ oraz $k \in \mathbb{Z}_n$. Udowodnij, że endomorfizm Φ jest samosprzężony. Opisz $\operatorname{Ker}\Phi$ oraz pokaż, że wszystkie niezerowe wartości własne endomorfizmu Φ są ujemne.

Zadanie 5.35. Rozważmy przestrzeń

$$V = \{f \in \operatorname{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) : \text{istnieje takie } N = N(f) \geqslant 0, \text{ że } f(n) = 0 \text{ gdy } |n| > N\}$$

z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\overline{g(n)}.$$

Uzasadnij, że endomorfizm $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ dany wzorem

$$\Phi(f)(n) = \frac{f(n-1) + f(n+1)}{2}$$

dla $f \in V$ oraz $n \in \mathbb{Z}$ jest samosprzężony. Wyznacz wartości własne endomorfizmu Φ.

Zadanie 5.36. Niech X będzie zbiorem ścian sześciennej kostki do gry. W przestrzeni $V = \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ zdefiniujmy iloczyn skalarny wzorem

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x).$$

Oznaczmy przez $x^* \in X$ ścianę kostki przeciwległą do ściany $x \in X$. Niech ponadto $N(x)$ oznacza zbiór tych ścian kostki, które mają wspólną krawędź ze ścianą $x \in X$.

(1) Pokaż, że $V = V_0 \perp V_+ \perp V_-$, gdzie V_0 jest podprzestrzenią V złożoną z funkcji stałych oraz

$$V_\pm = \{f \in V : \sum_{x \in X} f(x) = 0 \text{ oraz } f(x^*) = \pm f(x) \text{ dla } x \in X\}.$$

(2) Zdefiniujmy endomorfizm $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ wzorem

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} f(y) \quad (f \in V \text{ oraz } x \in X).$$

Uzasadnij, że Φ jest samosprzężony i wyznacz jego ortonormalną bazę własną B. Jak wygląda macierz $M_B(\Phi)$?

(3) Dowiedź, że

$$\lim_{n \to \infty} \Phi^n(f)(x_0) = \frac{1}{6} \sum_{x \in X} f(x)$$

dla dowolnych $f \in V$ oraz $x_0 \in X$.

Zadanie 5.37. Niech $n \geqslant 1$. Pokaż, że gdy macierze $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ są hermitowskie, to:

(1) $\mathrm{tr}(AB)^k \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $k \geqslant 1$.

(2) $\mathrm{tr}(A^2B^2) \in \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{tr}(AB)^2 \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 5.38. Niech $n \geqslant 1$. Dla macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zdefiniujmy

$$S(A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

(1) Podaj przykład macierzy $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ spełniającej $S(A)^2 > nS(A^2)$.

(2) Udowodnij, że gdy macierz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna, to $S(A)^2 \leqslant nS(A^2)$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 5.39. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Niech B będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Wykaż, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M_B(f)$ jest symetryczna.

Zadanie 5.40. Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Dowiedź, że gdy endomorfizm samosprzężony $f \in \mathrm{End}(V)$ spełnia $\langle f(v), v \rangle = 0$ dla dowolnego $v \in V$, to $f = 0$. Czy bez założenia samosprzężoności endomorfizmu f teza pozostanie prawdziwa?

Zadanie 5.41. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. Wykaż, że gdy $f \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony, to $V = \mathrm{Ker}\, f \perp \mathrm{Im}\, f$. Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe gdy wymiar przestrzeni V jest nieskończony?

Zadanie 5.42. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią wymiaru $n \geqslant 1$. Udowodnij, że gdy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony oraz spełnia $\langle f(u), u\rangle > 0$ dla $0 \neq u \in U$, to f ma przynajmniej n (licząc z krotnościami) dodatnich wartości własnych.

Zadanie 5.43. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{C}^n$. Gdy $f \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony, to oznaczmy przez $\lambda_{\min}(f) = \min \sigma(f)$ (odpowiednio $\lambda_{\max}(f) = \max \sigma(f)$) najmniejszą (odpowiednio największą) wartość własną endomorfizmu f. Wykaż, że

$$\lambda_{\min}(f) = \inf\{\langle f(v), v\rangle : v \in S\}, \qquad \lambda_{\max}(f) = \sup\{\langle f(v), v\rangle : v \in S\},$$

gdzie $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$ jest sferą jednostkową. Udowodnij, że gdy endomorfizmy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ są samosprzężone, to

$$\lambda_{\min}(f) + \lambda_{\min}(g) \leqslant \lambda_{\min}(f+g) \leqslant \min\{\lambda_{\min}(f) + \lambda_{\max}(g), \lambda_{\max}(f) + \lambda_{\min}(g)\}$$

oraz

$$\max\{\lambda_{\min}(f) + \lambda_{\max}(g), \lambda_{\max}(f) + \lambda_{\min}(g)\} \leqslant \lambda_{\max}(f+g) \leqslant \lambda_{\max}(f) + \lambda_{\max}(g).$$

Zadanie 5.44. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony. Rozważmy sferę jednostkową $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$ oraz zdefiniujmy funkcję $Q\colon S \to \mathbb{R}$ wzorem $Q(v) = \langle f(v), v\rangle$. Dowiedź, że:

(1) istnieje takie $v \in S$, że $Q(v) = \inf Q(S)$.
(2) gdy $\lambda = \inf Q(S)$, to $\lambda \in \sigma(f)$ oraz $f(v) = \lambda v$.
(3) podprzestrzeń $U = \mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$ jest f-niezmiennicza.

Stosując indukcję wywnioskuj, iż istnieją takie liczby rzeczywiste $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ i baza ortonormalna $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ przestrzeni V, że $M_B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Zadanie 5.45. Niech

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}.$$

(1) Wyznacz bazę ortonormalną przestrzeni V.
(2) Znajdź wzór odwzorowania $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ będącego rzutem prostopadłym na V. Podaj macierz $M_{\mathrm{st}}(f)$.

Zadanie 5.46. Wyznacz wzór rzutu prostopadłego $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ na podprzestrzeń

$$V = \mathrm{Span}\{(1, 2, 2, -1)\}^{\perp}.$$

Zadanie 5.47. Rozważmy podprzestrzenie

$$U = \mathrm{Span}\{(1, 2, 1), (1, 0, 1)\} \qquad \text{oraz} \qquad V = \mathrm{Span}\{(1, 0, 1)\}^{\perp}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wskaż taką izometrię $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f(U) = V$.

Zadanie 5.48. Załóżmy, że $U, V \neq 0$ są przestrzeniami euklidesowymi, zaś $f \colon U \to V$ jest dowolnym odwzorowaniem. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(1) odwzorowanie f jest liniową izometrią.

(2) odwzorowanie f jest addytywne i zachowuje długość wektorów.

Zadanie 5.49. Załóżmy, że $U, V \neq 0$ są przestrzeniami euklidesowymi. Udowodnij, że dla $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ następujące warunki są równoważne:

(1) odwzorowanie f jest izometrią.

(2) odwzorowanie f zachowuje prostopadłość wektorów (tzn. $u \perp v \Longrightarrow f(u) \perp f(v)$ dla $u, v \in U$) oraz $\|f(u_0)\| = \|u_0\|$ dla pewnego $0 \neq u_0 \in U$.

Zadanie 5.50. Niech V będzie przestrzenią euklidesową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Pokaż, że:

(1) gdy endomorfizm f jest samosprzężony, to f jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy f jest symetrią prostopadłą.

(2) gdy endomorfizm f jest izometrią, to f jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy f jest symetrią prostopadłą.

Zadanie 5.51. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową oraz $f \in \operatorname{End}(V)$. Wykaż, że gdy dla dowolnej bazy B przestrzeni V macierz $M_B(f)$ jest ortogonalna, to $f = \pm \operatorname{id}_V$.

Zadanie 5.52. Niech V będzie przestrzenią euklidesową oraz $f, g \in \mathrm{O}(V)$. Uzasadnij, że zachodzi $\operatorname{Ker}(f - g) \perp \operatorname{Ker}(f + g)$.

Zadanie 5.53. Niech X będzie rzeczywistą lub zespoloną przestrzenią liniową. Załóżmy, że $G \subseteq \operatorname{Aut}(X)$ jest podgrupą skończoną.

(1) Dowiedź, że istnieje taki iloczyn skalarny φ w przestrzeni X, względem którego dowolny automorfizm $g \in G$ jest izometrią, tzn. $G \subseteq \mathrm{O}(\varphi)$.

(2) Udowodnij, że dla dowolnej G-niezmienniczej podprzestrzeni $U \subseteq X$ (tzn. takiej podprzestrzeni $U \subseteq X$, że $g(U) \subseteq U$ dla każdego $g \in G$) istnieje G-niezmiennicza podprzestrzeń $V \subseteq X$ spełniająca $X = U \oplus V$.

Uwaga. Punkt (1) oznacza, że dowolna skończona rzeczywista lub zespolona grupa liniowa jest podgrupą grupy ortogonalnej.

Zadanie 5.54. Niech $V \neq 0$ będzie przestrzenią euklidesową skończonego wymiaru. Załóżmy, że $f \in \operatorname{Aut}(V)$ zachowuje prostopadłość wektorów (tzn. $u \perp v \Longrightarrow f(u) \perp f(v)$ dla $u, v \in V$). Wykaż, iż istnieje taka izometria $g \in \mathrm{O}(V)$ oraz *jednokładność* $h \in \operatorname{Aut}(V)$ (tzn. $h = \lambda \operatorname{id}_V$ dla pewnego $\lambda > 0$), że $f = g \circ h = h \circ g$.

Zadanie 5.55. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{O}(n)$. Uzasadnij, że wiersze macierzy A, traktowane jako wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$, tworzą bazę ortonormalną tej przestrzeni.

Zadanie 5.56. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Przypuśćmy, że macierz A^k jest unitarna dla pewnego $k \geqslant 2$. Czy wynika stąd, że macierz A jest unitarna?

Zadanie 5.57. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ jest macierzą antysymetryczną. Pokaż, że gdy $I - A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (czy jest tak zawsze?), to macierz $B = (I-A)^{-1}(I+A)$ jest ortogonalna oraz $-1 \notin \sigma(B)$.

Zadanie 5.58. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{U}(n)$. Udowodnij, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ istnieje taki wielomian $p \in \mathbb{C}[x]$ (na ogół zależny od A oraz od k), że $A = p(A)^k$.

Zadanie 5.59. Niech $n \geqslant 1$. Dowiedź, że:

(1) jeśli $A = A^h \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, to $B = \exp(iA) \in \mathrm{U}(n)$.

(2) jeśli $B \in \mathrm{U}(n)$, to $B = \exp(iA)$ dla pewnego $A = A^h \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Zadanie 5.60. Niech $n \geqslant 1$ oraz $A \in \mathrm{O}(n)$. Uzasadnij, że $(-x)^n \chi_A(x^{-1}) = \chi_A(x)$.

Zadanie 5.61. Załóżmy, że $A = [a_{ij}] \in \mathrm{SO}(3)$. Sprawdź, że:

(1) $(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2 = 2 \operatorname{tr} A$.

(2) $(\operatorname{tr} A - 1)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$.

Zadanie 5.62. Załóżmy, że $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy $A \in \mathrm{O}(n)$, to istnieje taka macierz $P \in \mathrm{O}(n)$, że $PAP^{-1} = \operatorname{diag}(I_r, -I_s, R(\varphi_1), \ldots, R(\varphi_t))$ dla pewnych liczb $r, s, t \geqslant 0$ spełniających $r + s + 2t = n$ oraz $0 \neq \varphi_1, \ldots, \varphi_t \in (-\pi, \pi)$, gdzie

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

Czy liczby r, s, t oraz $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ są wyznaczone jednoznacznie?

Zadanie 5.63. Niech

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Sprawdź, że $A \in \mathrm{O}(4)$ oraz wyznacz taką macierz $P \in \mathrm{O}(4)$, że macierz PAP^{-1} ma postać blokowo-diagonalną (z blokami 2×2, różnymi od $\pm I$, odpowiadającymi obrotom oraz blokami 1×1 o wyrazach ± 1).

Zadanie 5.64. Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f, g \in \mathrm{Aut}(V)$.

(1) Przypuśćmy, że istnieje ciągłe odwzorowanie $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{Aut}(V)$ (względem normy operatorowej w $\mathrm{End}(V)$) spełniające $\gamma(0) = f$ oraz $\gamma(1) = g$. Uzasadnij, że f zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy g zachowuje orientację.

(2) Przypuśćmy, że automorfizmy f oraz g zachowują orientację. Dowiedź, iż istnieje takie odwzorowanie ciągłe $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{Aut}(V)$, że $\gamma(0) = f$ oraz $\gamma(1) = g$.

Zadanie 5.65. Niech $n \geqslant 1$. Wykaż, że gdy $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\det f = -1$, to $-1 \in \sigma(f)$.

Zadanie 5.66. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Gdy $0 \neq v \in V$, to zdefiniujmy odwzorowanie $f_v \colon V \to V$ wzorem

$$f_v(x) = x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v.$$

Pokaż, że:

(1) odwzorowanie f_v jest *izometryczną symetrią* (tzn. $f_v \in \mathrm{O}(V)$ oraz $f_v \circ f_v = \mathrm{id}_V$).

(2) istnieje taka baza ortonormalna B przestrzeni V, że $M_B(f_v) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$; w szczególności $\mathrm{tr}\, f_v = n - 2$ oraz $\det f_v = -1$.

(3) jeśli $f \in \mathrm{O}(V)$ jest izometrią, dla której podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej $1 \in \sigma(f)$ ma kowymiar 1, to $f = f_v$ dla pewnego $0 \neq v \in V$.

(4) jeśli $g \in \mathrm{O}(V)$, to $g \circ f_v \circ g^{-1} = f_{g(v)}$ dla dowolnego $0 \neq v \in V$.

Uwaga. Izometryczną symetrię $f_v \in \mathrm{O}(V)$ dla $0 \neq v \in V$ nazywamy *odbiciem* względem podprzestrzeni $\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$ kowymiaru 1. Zauważmy też, że gdy $u = \frac{1}{\|v\|}v$, to $f_u = f_v$.

Zadanie 5.67. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową lub unitarną. Udowodnij, że gdy $u, v \in V$ spełniają $\|u\| = \|v\|$, to istnieje taka *symetria* $f \in \mathrm{O}(V)$ (tzn. $f \circ f = \mathrm{id}_V$; mówimy też, że f jest *izometryczną symetrią*), że $f(u) = v$ oraz $f(v) = u$.

Zadanie 5.68 (twierdzenie Cartana–Dieudonnégo)**.** Załóżmy, że $V \neq 0$ jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Dowiedź, że gdy $\dim V = n$, to każda izometria $\mathrm{id}_V \neq f \in \mathrm{O}(V)$ jest złożeniem co najwyżej n odbić.

Uwaga. Tzn. grupa $\mathrm{O}(V)$ jest generowana przez odbicia względem hiperpłaszczyzn.

Zadanie 5.69. Załóżmy, że $V = \mathbb{R}^3$. Wskaż przykład izometrii $f \in \mathrm{O}(V)$ różnej od $\pm \mathrm{id}_V$ i nie dającej się przedstawić jako złożenie mniej niż trzech odbić. Przedstaw f jako złożenie trzech odbić.

Zadanie 5.70. Niech $1 \leqslant k < n$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Wykaż, że gdy $f \in \mathrm{End}(V)$ zachowuje objętość k-wymiarowych równoległościanów, to f jest izometrią.

Zadanie 5.71. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ wyznaczony przez macierz

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uzasadnij, że f jest *obrotem* (tzn. $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$) i znajdź oś oraz kąt tego obrotu.

Zadanie 5.72. Przypomnijmy, że *moduł kwaternionu* $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ definiujemy wzorem $|q| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Rozważmy rzeczywistą przestrzeń liniową $V = \mathrm{Span}\{i, j, k\} \subseteq \mathbb{H}$ z iloczynem skalarnym, względem którego $B = \{i, j, k\}$ jest bazą ortonormalną. Dla dowolnego $q \in \mathbb{H}$ spełniającego $|q| = 1$ określmy endomorfizm $f_q \in \mathrm{End}(V)$ wzorem $f_q(v) = qvq^{-1}$ dla $v \in V$ (uzasadnij, że definicja jest poprawna).

(1) Sprawdź, że $f_q \in \mathrm{SO}(V)$. Wyznacz kąt oraz oś tego obrotu.

(2) Jak wygląda macierz $M_B(f_q)$ obrotu f_q w bazie B?

Zadanie 5.73. Pokaż, że kwadrat każdej izometrii liniowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest obrotem.

Zadanie 5.74. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przedstaw endomorfizm f jak złożenie symetrii i obrotu.

Zadanie 5.75. Załóżmy, że $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ jest obrotem o kąt $\varphi \in [0, 2\pi)$ względem pewnej osi. Wyznacz zależność łączącą kąt obrotu φ ze śladem $\mathrm{tr}\, f$.

Zadanie 5.76. Załóżmy, że $f, g \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ są nieidentycznościowymi obrotami. Wykaż, że $f \circ g = g \circ f$ wtedy i tylko wtedy, gdy osie obrotów f, g pokrywają się lub gdy f, g są obrotami o kąt π względem wzajemnie prostopadłych osi.

Zadanie 5.77. Wyznacz macierz $M_{\mathrm{st}}(f)$ endomorfizmu $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ będącego obrotem wokół osi $L = \mathrm{Span}\{(1, 0, 2)\}$ o kąt $\varphi \in [0, \pi]$ spełniający $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$.

Zadanie 5.78. Przypuśćmy, iż wektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ spełniają $\|u\| = \|v\| = 1$. Wskaż obrót $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ o własności $f(u) = v$ oraz $f(v) = u$. Opisz kąt i oś obrotu f. Czy istnieje tylko jeden taki obrót?

Zadanie 5.79. Załóżmy, że $V = \mathbb{R}^3$. Dowiedź, że obrót $f \in \mathrm{SO}(V)$ jest endomorfizmem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy $f = \mathrm{id}_V$ lub f jest obrotem o kąt π.

Zadanie 5.80. Niech $V = \mathbb{C}^2$. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(V)$ zadany macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 4+2i & 5+4i \\ 4+3i & 2 \end{bmatrix}.$$

Przedstaw f jako złożenie $f = u \circ p$, gdzie $u \in \mathrm{O}(V)$, zaś endomorfizm $p \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony i dodatnio określony.

Zadanie 5.81. Wyznacz rozkład biegunowy macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Zadanie 5.82. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową lub unitarną. Niech $n \geqslant 1$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{End}(V)$. Pokaż, że $\mathrm{tr}(f_1^* \circ f_1 + \cdots + f_n^* \circ f_n) = 0$ implikuje $f_1 = \cdots = f_n = 0$.

Zadanie 5.83. Niech $V = \mathbb{C}^2$. Rozważmy endomorfizmy $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zadane przez macierze

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad M_{\mathrm{st}}(g) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) Sprawdź, że f oraz g są endomorfizmami normalnymi.

(2) Uzasadnij, że endomorfizm $f+g$ nie jest normalny.

Zadanie 5.84. Niech $V=\mathbb{C}^3$. Zdefiniujmy $f\in \mathrm{End}(V)$ za pomocą macierzy

$$M_{\mathrm{st}}(f)=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 3\\ 3 & 6 & -2\\ -2 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

(1) Dowiedź, że endomorfizm f jest normalny.

(2) Znajdź bazę ortonormalną przestrzeni V złożoną z wektorów własnych dla f.

Zadanie 5.85. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Wykaż, że dla $f\in\mathrm{End}(V)$ następujące warunki są równoważne:

(1) endomorfizm f jest normalny.

(2) endomorfizm f^* jest normalny.

(3) $\|f(v)\|=\|f^*(v)\|$ dla dowolnego $v\in V$.

(4) endomorfizm f komutuje z endomorfizmem $f^*\circ f$.

(5) endomorfizm f komutuje z endomorfizmem $f^*\circ f - f\circ f^*$.

(6) istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych dla f.

(7) istnieją takie endomorfizmy $p_1,\dots,p_n\in\mathrm{End}(V)$, że $\sum_{j=1}^n p_j=\mathrm{id}_V$, $p_j^*=p_j$, $p_j\circ p_k=\delta_{jk}p_k$ dla $1\leqslant j,k\leqslant n$ oraz $f=\sum_{j=1}^n\lambda_j p_j$ dla pewnych $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$.

(8) dla każdej f-niezmienniczej podprzestrzeni $U\subseteq V$ podprzestrzeń $U^\perp$ jest także f-niezmiennicza.

Uwaga. Równoważność warunków (1) oraz (6) zazwyczaj nazywana jest twierdzeniem spektralnym dla operatorów normalnych. Ponadto rodzinę endomorfizmów $\{p_1,\dots,p_n\}$ o własnościach z punktu (7) nazywamy *ortogonalnym rozkładem jedności*, zaś sam zapis endomorfizmu f w postaci sumy $f=\sum_{j=1}^n\lambda_j p_j$ nazywamy *rozkładem spektralnym* tego endomorfizmu.

Zadanie 5.86. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Udowodnij, że gdy endomorfizm $f\in\mathrm{End}(V)$ jest normalny, to:

(1) jeśli $f(v)=\lambda v$ dla pewnego $\lambda\in\mathbb{C}$ oraz $v\in V$, to $f^*(v)=\overline{\lambda}v$.

(2) $\mathrm{Ker}\, f^n=\mathrm{Ker}\, f$ oraz $\mathrm{Im}\, f^n=\mathrm{Im}\, f$ dla $n\geqslant 1$.

(3) $\mathrm{Ker}\, f^*=\mathrm{Ker}\, f=(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ oraz $\mathrm{Im}\, f^*=\mathrm{Im}\, f=(\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

(4) wielomian minimalny μ_f nie ma pierwiastków wielokrotnych.

(5) przestrzenie własne endomorfizmu f odpowiadające różnym własnością własnym są wzajemnie ortogonalne.

Zadanie 5.87. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Wykaż, że każdy endomorfizm normalny (odpowiednio unitarny) $f\in\mathrm{End}(V)$ jest postaci $f=g^2$ dla pewnego endomorfizmu normalnego (odpowiednio unitarnego) $g\in\mathrm{End}(V)$.

Zadanie 5.88. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ jest normalny. Udowodnij, że gdy $g \in \operatorname{End}(V)$ oraz każda f-niezmiennicza podprzestrzeń $U \subseteq V$ jest także g-niezmiennicza, to $f \circ g = g \circ f$.

Zadanie 5.89. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną oraz $n \geqslant 2$. Dowiedź, że gdy endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{End}(V)$ są normalne, to następujące warunki są równoważne:

(1) istnieje taka baza ortonormalna B przestrzeni V, że macierze $M_B(f_1), \ldots, M_B(f_n)$ są diagonalne (tzn. dowolny wektor bazy ortonormalnej B jest wektorem własnych każdego z endomorfizmów $f_1, \ldots, f_n$).

(2) endomorfizmy $f_1, \ldots, f_n$ są *przemienne* (tzn. $f_j \circ f_k = f_k \circ f_j$ dla $1 \leqslant j, k \leqslant n$).

Zadanie 5.90. Niech $V = \mathbb{R}^4$. Rozważmy $f, g \in \operatorname{End}(V)$ zadane macierzami

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad M_{\mathrm{st}}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona ze wspólnych wektorów własnych endomorfizmów f, g? Jeśli tak, to wyznacz taką bazę.

Zadanie 5.91. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną oraz $n \geqslant 2$. Udowodnij, że gdy endomorfizmy normalne $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{End}(V)$ są przemienne, to dla dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ endomorfizm $p(f_1, \ldots, f_n)$ jest normalny.

Zadanie 5.92. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną.

(1) Uzasadnij, że każdy endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ może być jednoznacznie zapisany w postaci $f = g + ih$, gdzie endomorfizmy $g, h \in \operatorname{End}(V)$ są samosprzężone.

(2) Wykaż, że endomorfizm f jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $g \circ h = h \circ g$.

Zadanie 5.93. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ jest antyhermitowski. Udowodnij, że:

(1) gdy B jest bazą ortonormalną przestrzeni V oraz $A = M_B(f)$, to $A^h = -A$.

(2) gdy $u \in \mathrm{O}(V)$, to endomorfizm $g = u \circ f \circ u^{-1}$ jest także antyhermitowski.

(3) endomorfizm f^3 jest antyhermitowski. Kiedy f^2 jest antyhermitowski?

Zadanie 5.94. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Niech $f \in \operatorname{End}(V)$. Wykaż, że:

(1) gdy endomorfizm f jest unitarny, to $|\lambda| = 1$ dla dowolnego $\lambda \in \sigma(f)$.

(2) gdy endomorfizm f jest hermitowski, to $\lambda \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $\lambda \in \sigma(f)$.

(3) gdy endomorfizm f jest antyhermitowski, to $\lambda \in i\mathbb{R}$ dla dowolnego $\lambda \in \sigma(f)$.

Zadanie 5.95. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Pokaż, że gdy endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ jest *idempotentny* (tzn. $f^2 = f$), to następujące warunki są równoważne:

(1) f jest samosprzężony.
(2) f jest normalny.
(3) $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Zadanie 5.96. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią unitarną. Załóżmy, że endomorfizm $f \in \operatorname{End}(V)$ jest normalny. Dowiedź, że:

(1) gdy f jest idempotentny, to f jest samosprzężony.
(2) gdy f jest nilpotentny, to $f = 0$.

Zadanie 5.97. Dowiedź, że $u \times (v \times u) = (u \times v) \times u$ dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^3$. Czy dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$?

Zadanie 5.98. Załóżmy, że $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$. Pokaż, że:

(1) $\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \times v_3 \rangle$.
(2) $\|v_1 \times v_2\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2$.
(3) $v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$.
(4) $v_1 \times (v_2 \times v_3) + v_2 \times (v_3 \times v_1) + v_3 \times (v_1 \times v_2) = 0$.
(5) $v_1 \times (v_2 \times v_3) - (v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_3, v_2 \rangle v_1 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$.
(6) $(v_1 \times v_2) \times (v_3 \times v_4) = \langle v_1, v_3 \times v_4 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \times v_4 \rangle v_1$.

Zadanie 5.99. Zdefiniujmy działanie w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ wzorem

$$(\lambda_1, v_1) \cdot (\lambda_2, v_2) = (\lambda_1 \lambda_2 - \langle v_1, v_2 \rangle, \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + v_1 \times v_2)$$

dla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ oraz $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Wykaż, że działanie to jest łączne.

Zadanie 5.100. Niech

$$u_1 = (1, 2, -1), \qquad u_2 = (-1, 2, 0), \qquad u_3 = (-2, 3, 1).$$

Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające $u_1 \times v = u_2$ oraz $\langle u_3, v \rangle = 3$.

Zadanie 5.101. Niech $u = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(1) Opisz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające $u \times (u \times v) = v$.
(2) Udowodnij, że gdy $v \in \mathbb{R}^3$, to $u = v \times (u \times v) \iff u \perp v$ oraz $\|v\| = 1$.

Zadanie 5.102. Niech $u, v \in \mathbb{R}^3$. Oblicz $\|(2u + 3v) \times (5u - 4v)\|$ wiedząc, że $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$ oraz $\sphericalangle(u, v) = \frac{2\pi}{3}$.

Zadanie 5.103. Traktując wektory $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ jako wiersze macierzy pokaż, że

$$\det \begin{bmatrix} v_1 \times v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \times v_4 \end{bmatrix} = \langle v_1 \times v_2, v_3 \times v_4 \rangle.$$

Zadanie 5.104. Niech $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Zdefiniujmy macierze

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{bmatrix} v_1 \times v_2 \\ v_2 \times v_3 \\ v_3 \times v_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

w których występujące wektory traktujemy jako wiersze. Wykaż, że:

(1) $\det(\operatorname{adj} A) = \det B$.

(2) $\det B = \det A^2$.

Zadanie 5.105. Niech $u = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = (1, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$. Uzasadnij, że wektory u, $u \times v$ oraz $u \times (v \times u)$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz współrzędne wektora v w tej bazie.

Zadanie 5.106. Załóżmy, że $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Pokaż, że zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą ortogonalną (odpowiednio ortonormalną) w $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{u \times v, v \times w, w \times u\}$ jest bazą ortogonalną (odpowiednio ortonormalną) w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5.107. Niech $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Wykaż, że istnieje taka dodatnio zorientowana baza ortonormalna $\{e_1, e_2, e_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $v_i \in \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_i\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Zadanie 5.108. Załóżmy, iż wektory $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ zostały uzyskane przez zastosowanie algorytmu Grama–Schmidta do układu liniowo niezależnych wektorów $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$. Udowodnij, że $u_1 \times u_2 \times u_3 = v_1 \times v_2 \times v_3$.

Zadanie 5.109. Załóżmy, że wektor $v \in \mathbb{R}^3$ jest unormowany. Pokaż, że rzut prostopadły $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ na podprzestrzeń $V = \operatorname{Span}\{v\}^\perp$ dany jest wzorem $f(x) = v \times (x \times v)$.

Zadanie 5.110. Załóżmy, że $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$. Wykaż, że:

(1) gdy f jest obrotem, to $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ dla $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(2) gdy f spełnia $\operatorname{Ker} f \neq 0$ oraz $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ dla $u, v \in \mathbb{R}^3$, to $f = 0$.

(3) gdy f spełnia $\operatorname{Ker} f = 0$ oraz $f(u \times v) = f(u) \times f(v)$ dla $u, v \in \mathbb{R}^3$, to f jest obrotem.

Definicja. *Grafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie $V \neq \varnothing$ jest dowolnym zbiorem skończonym, zaś $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ oraz } u \neq v\}$. Elementy zbioru V nazywanym *wierzchołkami* grafu G, natomiast elementy zbioru E nazywamy *krawędziami* grafu G. Wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} v(G) &= |V| \quad \text{(liczba wierzchołków grafu } G\text{)}, \\ e(G) &= |E| \quad \text{(liczba krawędzi grafu } G\text{)}. \end{aligned}$$

Niech $n \geqslant 1$. Mówimy, że ciąg $(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in V^{n+1}$ jest *drogą* w G o *początku* v_0, *końcu* v_n oraz *długości* n, gdy $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Drogę $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ nazywamy *zamkniętą*, gdy $v_0 = v_n$.

Uwaga. Definicja grafu podana przez nas jest dostosowana do kilku poniższych zadań. Odpowiada ona temu, co bywa nazywane skończonym grafem prostym (tzn. skończonym grafem niezorientowanym bez pętli). W literaturze można znaleźć różne uogólnienia.

Definicja. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem. *Macierzą sąsiedztwa* grafu G nazywamy macierz $A_G = [a_{uv}] \in \mathrm{M}_V(\mathbb{R})$, gdzie

$$a_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{u, v\} \in E, \\ 0 & \text{gdy } \{u, v\} \notin E. \end{cases}$$

Uwaga. Gdy $X, Y \neq \varnothing$ są dowolnymi zbiorami, natomiast K jest ciałem, to przez macierz $A = [a_{xy}] \in \mathrm{M}_{X,Y}(K)$ rozumiemy odwzorowanie $A\colon X \times Y \ni (x, y) \mapsto a_{xy} \in K$. Zatem $\mathrm{M}_{X,Y}(K) = \mathrm{Map}(X \times Y, K)$. Ponadto $\mathrm{M}_X(K) = \mathrm{M}_{X,X}(K)$. Oczywiście gdy $|X| = n < \infty$ oraz $|Y| = m < \infty$, to $\mathrm{M}_{X,Y}(K) \cong \mathrm{M}_{n,m}(K)$ oraz $\mathrm{M}_X(K) \cong \mathrm{M}_n(K)$.

Zadanie 5.111. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem. Niech $v(G) = n$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi, niekoniecznie parami różnymi, wartościami własnymi macierzy $A = A_G$. Uzasadnij, że

$$\operatorname{tr} A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \text{liczba zamkniętych dróg w } G \text{ długości } k$$

dla każdego $k \geqslant 1$. W szczególności $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ oraz $\operatorname{tr} A^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2e(G)$.

Definicja. Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *dwudzielny*, gdy $V = V_1 \cup V_2$ dla pewnych $V_1, V_2 \subseteq V$ spełniających $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ oraz $E \subseteq \{\{u, v\} : u \in V_1 \text{ oraz } v \in V_2\}$ (tzn. żadne dwa wierzchołki grafu G leżące jednocześnie w V_1 lub w V_2 nie są połączone krawędzią).

Zadanie 5.112. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem oraz $A = A_G$. Udowodnij, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(A) = -\sigma(A)$ (tzn. $\lambda \in \sigma(A) \implies -\lambda \in \sigma(A)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$) oraz $m_a(A, \lambda) = m_a(A, -\lambda)$ dla $\lambda \in \sigma(A)$.

Definicja. Mówimy, że graf $G = (V, E)$ jest *spójny*, gdy dla dowolnych wierzchołków $u, v \in V$ istnieje droga w G o początku u oraz końcu v.

Definicja. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem. *Stopniem* wierzchołka $v \in V$ nazywamy liczbę

$$\deg(v) = |\{u \in V : \{u, v\} \in E\}|.$$

Ponadto definiujemy minimalny i maksymalny stopień wierzchołka w grafie G jako

$$\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V\} \qquad \text{oraz} \qquad \Delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V\}.$$

Gdy $\delta(G) = \Delta(G) = k$ dla pewnego $k \geqslant 0$, to mówimy, że graf G jest *k-regularny*.

Zadanie 5.113. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem spójnym. Niech $v(G) = n$ oraz $\lambda_{\max}(G)$ oznacza największą wartość własną macierzy $A = A_G$. Pokaż, że:

(1) krotność geometryczna wartości własnej $\lambda_{\max}(G)$ jest równa 1.

(2) gdy $0 \neq v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym macierzy A stowarzyszonym z wartością własną $\lambda_{\max}(G)$, to $v_1, \ldots, v_n > 0$ lub $v_1, \ldots, v_n < 0$.

(3) gdy $0 \neq v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym macierzy A stowarzyszonym z wartością własną $\lambda \in \sigma(A)$ oraz $v_1, \ldots, v_n \geqslant 0$, to $\lambda = \lambda_{\max}(G)$.

(4) gdy G jest k-regularny dla pewnego $k \geqslant 0$, to $\lambda_{\max}(G) = k$.

Definicja. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem spójnym. *Odległość* $\rho(u, v)$ wierzchołków $u, v \in V$ spełniających $u \neq v$ definiujemy jako długość najkrótszej drogi w G o początku u oraz końcu v. Gdy $u = v$, to kładziemy $\rho(u, v) = 0$. *Średnicę* grafu G definiujemy jako

$$\operatorname{diam} G = \max\{\rho(u, v) : u, v \in V\}.$$

Uwaga. Jeśli graf $G = (V, E)$ jest spójny, to zbiór V wraz z funkcją $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ jest przykładem *przestrzeni metrycznej*.

Zadanie 5.114. Wykaż, że gdy $G = (V, E)$ jest grafem spójnym, to

$$\operatorname{diam} G \leqslant |\sigma(A_G)| - 1.$$

Zadanie 5.115. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. Dowiedź, że

$$\delta(G) \leqslant \frac{2e(G)}{v(G)} \leqslant \lambda_{\max}(G) \leqslant \Delta(G),$$

gdzie $\lambda_{\max}(G)$ oznacza największą wartość własną macierzy A_G.

Zadanie 5.116. Znajdź punkt symetryczny do $p = (7, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 3\}.$$

Zadanie 5.117. Wyznacz odległość punktu $p = (4, 2, -5, 1) \in \mathbb{R}^4$ od płaszczyzny

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12\}.$$

Zadanie to rozwiąż przynajmniej dwoma sposobami.

Zadanie 5.118. Niech A, B będą podprzestrzeniami afinicznej przestrzeni euklidesowej X. Udowodnij, że jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to istnieje prosta $L \subseteq X$ prostopadła do A i B, spełniająca $L \cap A \neq \varnothing$ oraz $L \cap B \neq \varnothing$.

Zadanie 5.119. Rozważmy proste

$$L_1 = (0, 7, 1, 2) + \operatorname{Span}\{(0, 1, -1, 0)\},$$
$$L_2 = (1, 1, 1, 1) + \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, -1)\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Znajdź płaszczyznę $P \subseteq \mathbb{R}^4$ zawierającą punkt $p = (4, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^4$ i spełniającą $P \perp L_1$ oraz $P \cap L_2 = \varnothing$.

Zadanie 5.120. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy proste

$$L_1 = (1, -1, 5) + \operatorname{Span}\{(2, -2, -1)\},$$
$$L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1,\ y - 2z = 8\}.$$

Znajdź prostą $L \subseteq \mathbb{R}^3$ spełniającą $L \perp L_1, L_2$ oraz $\rho(L, L_1) = \rho(L, L_2) = 3$.

Zadanie 5.121. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy proste

$$L_1 = (1, 2, 3) + \operatorname{Span}\{(1, 0, 2)\}, \qquad L_2 = (0, 0, 7) + \operatorname{Span}\{(0, 1, 3)\}.$$

(1) Oblicz odległość $\rho(L_1, L_2)$ pomiędzy prostymi L_1 oraz L_2.
(2) Podaj wzór symetrii prostopadłej $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ względem prostej L_2.
(3) Opisz obraz $f(L_1)$ prostej L_1 w symetrii f z punktu (2).

Zadanie 5.122. Rozważmy prostą i płaszczyznę

$$L = (1, 2, 0, 0) + \operatorname{Span}\{(1, -1, 2, 1)\},$$
$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(1) Oblicz odległość $\rho(L, P)$ pomiędzy prostą L a płaszczyzną P.
(2) Wyznacz wzór symetrii prostopadłej $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ względem płaszczyzny P.
(3) Wyznacz obraz $L' = f(L)$ prostej L w symetrii f z punktu (2).
(4) Oblicz odległość $\rho(L, L')$ pomiędzy prostą L a jej obrazem L' z punktu (3).

Zadanie 5.123. Rozważmy proste

$$L_1 = p_1 + \operatorname{Span}\{v_1\}, \qquad L_2 = p_2 + \operatorname{Span}\{v_2\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wykaż, że:

(1) gdy $v = v_1 = v_2$ (tzn. proste L_1 oraz L_2 są równoległe), to

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\|v \times \overrightarrow{p_1p_2}\|}{\|v\|}.$$

(2) gdy proste L_1 oraz L_2 nie są równoległe, to

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\langle v_1 \times v_2, \overrightarrow{p_1p_2}\rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Zadanie 5.124. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = a\}.$$

Wyznacz wzór na:

(1) odległość $\rho(x, A)$ punktu $x \in \mathbb{R}^n$ od hiperpowierzchni A.
(2) rzut prostopadły na hiperpowierzchnię A.
(3) symetrię prostopadłą względem hiperpowierzchni A.

Zadanie 5.125. Załóżmy, że X jest afiniczną przestrzenią euklidesową. Przypuśćmy, że wektory $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{T}(X)$ są liniowe niezależne. Niech $V = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz $A = p + V$ dla pewnego $p \in X$. Udowodnij, że gdy $x \in X$, to

$$\rho(x, A)^2 = \frac{G(v_1, \ldots, v_n, \overrightarrow{px})}{G(v_1, \ldots, v_n)}.$$

Zadanie 5.126. Niech $n \geqslant 3$. Załóżmy, że $L \subseteq \mathbb{R}^n$ jest prostą, natomiast $P \subseteq \mathbb{R}^n$ jest płaszczyzną. Dowiedź, że odległość $\rho(L, L')$ pomiędzy prostą L a jej obrazem L' w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny P jest dwukrotnie większa od odległości $\rho(L, P)$ pomiędzy prostą L a płaszczyzną P (w skrócie $\rho(L, L') = 2\rho(L, P)$).

Zadanie 5.127. Rozważmy wektory

$$v_1 = (1, 1, 0), \qquad v_2 = (1, 0, 1), \qquad v_3 = (1, 2, 1)$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $p_0 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ oraz $p_i = p_0 + v_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Oblicz objętość oraz pole powierzchni bocznej:

(1) równoległościanu $P = P(p_0; v_1, v_2, v_3)$.
(2) sympleksu $S = S(p_0, p_1, p_2, p_3)$.

Zadanie 5.128. Rozważmy płaszczyzny

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 6\},$$
$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz równanie opisujące płaszczyznę $f(Q)$, gdzie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią prostopadłą względem P.

Zadanie 5.129. Niech $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subseteq \mathbb{R}^2$, gdzie:

$$p_1 = (1, 1), \qquad p_2 = (1, -1), \qquad p_3 = (-1, 1), \qquad p_4 = (-1, -1).$$

Zdefiniujmy $G = \{f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2) : f(S) = S\}$.

(1) Uzasadnij, że G jest grupą i oblicz jej rząd.
(2) Podaj wzór pewnej izometrii $f \in G$, która nie jest obrotem.

Zadanie 5.130. Wykaż, że gdy izometria f skończenie wymiarowej afinicznej przestrzeni euklidesowej X posiada dwie niezmiennicze podprzestrzenie afiniczne $A, B \subseteq X$, które są skośne (przypomnijmy, iż oznacza to, że $A \cap B = \varnothing$ oraz $\mathrm{T}(A) \cap \mathrm{T}(B) = 0$), to f ma punkt stały.

6 Afiniczne i rzutowe zbiory algebraiczne

Zadanie 6.1. Przypuśćmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Gdy $n \geqslant 1$, to zdefiniujmy odwzorowanie $\Delta_n \in \mathrm{Hom}(V, V^n)$ wzorem $\Delta_n(v) = (v, \ldots, v)$ dla $v \in V$. Niech

$$\mathrm{F}^n(V) = \{f \in \mathrm{Map}(V, K) : f = \varphi \circ \Delta_n \text{ dla pewnego } \varphi \in \mathrm{Hom}^n_s(V, K)\}.$$

Gdy $n = 0$, to połóżmy $\mathrm{F}^n(V) = \{f \in \mathrm{Map}(V, K) : f \text{ jest funkcją stałą}\}$. Niech ponadto

$$\mathrm{PF}^n(V) = \mathrm{F}^0(V) + \cdots + \mathrm{F}^n(V) \quad (n \geqslant 0).$$

(1) Pokaż, że $\mathrm{F}^n(V)$ oraz $\mathrm{PF}^n(V)$ są podprzestrzeniami $\mathrm{Map}(V, K)$ dla każdego $n \geqslant 0$.

(2) Pokaż, że $\mathrm{PF}(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}^n(V) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{PF}^n(V)$ jest podprzestrzenią $\mathrm{Map}(V, K)$.

(3) Dowiedź, że gdy ciało K jest nieskończone, to $\mathrm{PF}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{F}^n(V)$.

(4) Dowiedź, że gdy $\mathrm{char}\, K = 0$, to odwzorowanie

$$\Delta_n^* \colon \mathrm{Hom}^n_s(V, K) \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \Delta_n \in \mathrm{F}^n(V)$$

jest izomorfizmem dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Uwaga. Elementy przestrzeni $\mathrm{F}^n(V)$ nazywamy *formami stopnia n* (lub *n-formami*) na przestrzeni V. Oczywiście $\mathrm{F}^0(V) \cong K$ oraz $\mathrm{F}^1(V) = V^*$. Ponadto $\mathrm{F}^2(V) = \mathrm{Quad}(V)$ gdy $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Elementy przestrzeni $\mathrm{PF}^n(V)$ oraz $\mathrm{PF}(V)$ nazywamy, odpowiednio, *formami wielomianowymi stopnia $\leqslant n$* oraz *formami wielomianowymi* na przestrzeni V.

Zadanie 6.2. Przypuśćmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi \colon K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{PF}(K^n)$ wzorem

$$\Phi(f)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0} a_{k_1, \ldots, k_n} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$$

dla $f = \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$ oraz $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$. Pokaż, że odwzorowanie Φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy ciało K jest nieskończone.

Zadanie 6.3. Rozważmy endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dany wzorem

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 5y + 2z, x + 2y)$$

i oznaczmy przez $\Phi \colon \mathbb{R}[x, y, z] \to \mathrm{PF}(\mathbb{R}^3)$ izomorfizm, który przypisuje wielomianowi wyznaczoną przez niego formę wielomianową.

(1) Niech $p(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x + 1 \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Wyznacz taki wielomian $q \in \mathbb{R}[x, y, z]$, że $\Phi(p) \circ f = \Phi(q)$.

(2) Niech $p(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^3 \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Wyznacz taki wielomian $q \in \mathbb{R}[x, y, z]$, że $\Phi(p) = \Phi(q) \circ f$.

Zadanie 6.4. Rozważmy formę dwuliniową $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(\mathbb{R}^3)$ zadaną macierzą

$$M_{\mathrm{st}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Wskaż taką bazę B przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że macierz $M_B(\varphi)$ jest diagonalna.

(2) Zbadaj czy istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^3$ o tej własności, że para $(V, \varphi|_{V\times V})$ jest przestrzenią euklidesową.

(3) Niech

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - 4xy + 4yz + 6x + 4y - 4z - 5 = 0\}.$$

Zbadaj czy istnieje izomorfizm afiniczny $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający $f(A) = I(\varphi)$, gdzie $I(\varphi) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \varphi(v,v) = 0\}$ to stożek izotropowy formy φ.

Zadanie 6.5. Niech

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}.$$

(1) Wyznacz równania opisujące krzywe $f(P)$ oraz $f^{-1}(P)$, gdzie $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ jest odwzorowaniem danym wzorem $f(x,y) = (x+3, 2x-y+1)$.

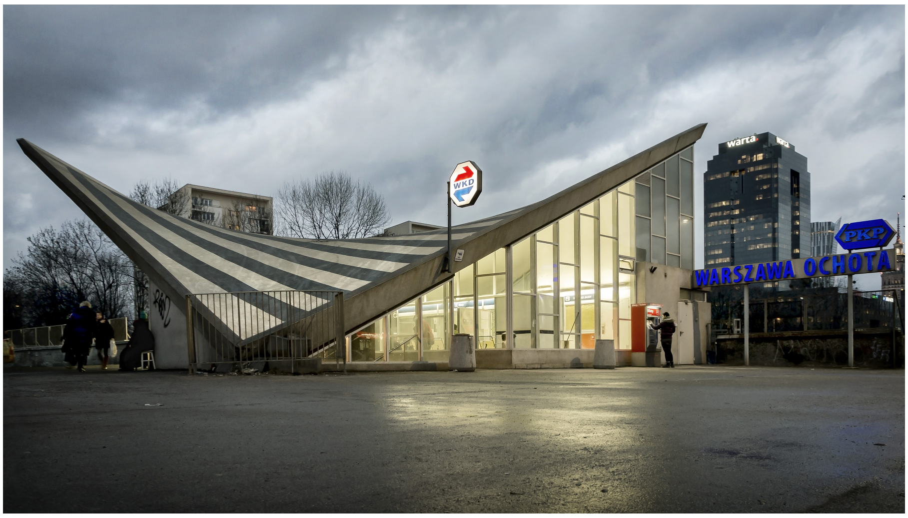
(2) Wyznacz wszystkie odwzorowania $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ spełniające $g(P) = P$. Które z nich są izometriami?

Zadanie 6.6. Niech

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - 1 = 0\}.$$

Wyznacz równanie opisujące hiperbolę H w układzie bazowym $\mathcal{B} = (p; v_1, v_2)$, gdzie $p = (1,2)$, $v_1 = (2,3)$ oraz $v_2 = (3,4)$.

Zadanie 6.7. Jaką kwadrykę przypomina dach dworca kolejowego Warszawa Ochota?



Zadanie 6.8. Niech

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xz - yz + ty + 1 = 0\}.$$

(1) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest paraboloidą hiperboliczną?
(2) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(3) Udowodnij, że gdy $t = 0$, to hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.

Zadanie 6.9. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4xy - xz + 2yz + tz + 2 = 0\}.$$

(1) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest hiperboloidą dwupowłokową?
(2) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(3) Udowodnij, że gdy $t = 2$, to hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.

Zadanie 6.10. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 6xz + 2yz - 6x - 2y + 4tz - 2t + 4 = 0\}.$$

(1) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(2) Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.

Zadanie 6.11. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : tz^2 + 4xy - 4yz + 2x + 2y + 1 = 0\}.$$

(1) Określ typ afiniczny hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$. Podaj jej nazwę i naszkicuj ją.
(2) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6.12. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : tz^2 + xy - 2y + 1 = 0\}.$$

(1) Określ typ afiniczny hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$. Podaj jej nazwę i naszkicuj ją.
(2) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(3) Zbadaj czy istnieje taka macierz $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$, że

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z, 1)M(x, y, z, 1)^t = 0\}.$$

Zadanie 6.13. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4xy - txz + 2tyz - x - 2y + t + 1 = 0\}.$$

(1) Określ typ afiniczny hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(2) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A posiada środek symetrii należący do A?
(3) Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.

Zadanie 6.14. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 18xy + 4xz + 8yz - 2x + (8 - 6t)y - 4tz - (t - 1)^2 = 0\}.$$

(1) Określ typ afiniczny hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

(2) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A posiada środek symetrii?

(3) Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.

Zadanie 6.15. Niech

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 8xy + 2xz - 4yz - 2x - 4y - 4z + 5 = 0\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 0\}.$$

(1) Opisz zbiór środków symetrii hiperpowierzchni A oraz B.

(2) Czy hiperpowierzchnie A oraz B są afinicznie izomorficzne? Jeśli tak, po podaj przykład takiego izomorfizmu.

Zadanie 6.16. Dla każdej z krzywych

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x + 2y + 3 = 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 + 24xy + 10x + 55y + 75 = 0\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 + 24xy + 50x + 25y + 75 = 0\}$$

znajdź izomorfizm afiniczny przekształcający tę krzywą na parabolę

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = 0\}.$$

Definicja. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Gdy $V = 0$, to połóżmy $\mathbb{P}(V) = \varnothing$. Jeśli zaś $V \neq 0$, to niech $\mathbb{P}(V) = X/R$, gdzie $X = V \setminus \{0\}$ oraz

$$R = \{(x, y) \in X \times X : y = \lambda x \text{ dla pewnego } \lambda \in K\}.$$

Tak wprowadzony zbiór $\mathbb{P}(V)$ nazywamy *przestrzenią rzutową* przestrzeni liniowej V. Ponadto *wymiar przestrzeni rzutowej* $\mathbb{P}(V)$ definiujemy jako

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1.$$

Gdy $V \neq 0$, to element przestrzeni $\mathbb{P}(V)$ wyznaczony przez wektor $0 \neq v \in V$ oznaczamy przez $[v]$ (oczywiście $[v] = \{\lambda v : 0 \neq \lambda \in K\}$). Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to podzbiór $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ nazywamy *podprzestrzenią rzutową* przestrzeni $\mathbb{P}(V)$. Ponadto piszemy $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$ dla $n \geqslant 0$, natomiast element przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$ wyznaczony przez wektor $0 \neq (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$ oznaczamy przez $[x_0, \ldots, x_n]$.

Zadanie 6.17. Załóżmy, że K jest ciałem spełniającym $|K| = q < \infty$. Niech $0 \leqslant d \leqslant n$.

(1) Ile elementów posiada przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^n(K)$?

(2) Ile jest d-wymiarowych podprzestrzeni rzutowych w przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$?

(3) Ile jest wszystkich podprzestrzeni rzutowych w przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$?

Zadanie 6.18. Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową. Pokaż, że:

(1) gdy $(U_i)_{i\in I}$ jest rodziną podprzestrzeni X, to $\bigcap_{i\in I}\mathbb{P}(U_i)=\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I}U_i)$.

(2) dla dowolnego podzbioru $S\subseteq\mathbb{P}(X)$ istnieje najmniejsza podprzestrzeń rzutowa $\mathbb{P}(U)\subseteq\mathbb{P}(X)$ (nazywamy *podprzestrzenią rzutową generowaną przez zbiór S*), dla której $S\subseteq\mathbb{P}(U)$. Czy podprzestrzeń $U\subseteq X$ jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór S? Jeśli tak, to jakiej postaci jest U?

(3) gdy $(U_i)_{i\in I}$ jest rodziną podprzestrzeni X, to podprzestrzeń rzutowa generowana przez zbiór $\bigcup_{i\in I}\mathbb{P}(U_i)$ jest równa $\mathbb{P}(\sum_{i\in I}U_i)$.

Zadanie 6.19. Załóżmy, że $V\neq 0$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przypuśćmy, że $\dim V=n<\infty$ i wybierzmy bazę $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ przestrzeni V. Dla $1\leqslant i\leqslant n$ zdefiniujmy $V_i=\operatorname{Span}(B\setminus\{e_i\})$ oraz $A_i=e_i+V_i$. Dowiedź, że odwzorowanie

$$\Phi_i\colon\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(V_i)\ni[v]\mapsto e_i^*(v)^{-1}v\in A_i$$

jest poprawnie określone oraz bijektywne (zauważmy, że $A_i\cap\operatorname{Span}\{v\}=\{\Phi_i([v])\}$).

Uwaga. Parę (A_i,Φ_i) złożoną z przestrzeni afinicznej A_i (zauważmy, że $\mathrm{T}(A_i)=V_i$) oraz bijekcji $\Phi_i\colon\mathbb{P}(V)\setminus\mathbb{P}(V_i)\to A_i$ (lub czasem samą bijekcję Φ_i) nazywamy *mapą afiniczną* przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(V)$ związaną z bazą B przestrzeni V. Podprzestrzeń rzutową $\mathbb{P}(V_i)$ nazywamy *podprzestrzenią w nieskończoności* (lub *podprzestrzenią niewłaściwą*), zaś jej elementy nazywamy *punktami w nieskończoności* (lub *punktami niewłaściwymi*).

Zadanie 6.20. Załóżmy, że K jest ciałem nieskończonym oraz $n\geqslant 0$. Udowodnij, że gdy $S\subseteq\mathbb{P}^n(K)$ jest zbiorem skończonym, to istnieje taka mapa afiniczna (A,Φ) przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$ (oczywiście $\Phi\colon\mathbb{P}^n(K)\setminus\mathbb{P}(V)\to A$, gdzie $V=\mathrm{T}(A)$), że $S\cap\mathbb{P}(V)=\varnothing$.

Zadanie 6.21. Niech K będzie ciałem oraz $0\leqslant d\leqslant n$. Uzasadnij, że każdą d-wymiarową podprzestrzeń rzutową $\mathbb{P}(V)$ przestrzeni $\mathbb{P}^n(K)$ można pokryć $d+1$ mapami afinicznymi (tzn. dziedziny tych map pokrywają przestrzeń $\mathbb{P}(V)$), ale nie można jej pokryć mniejszą liczbą takich map.

Zadanie 6.22. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n\geqslant 1$. Niech $f\in K[x_1,\ldots,x_n]$ będzie wielomianem stopnia $d\geqslant 0$.

(1) Sprawdź, że

$$g(x_0,\ldots,x_n)=x_0^d f(x_1/x_0,\ldots,x_n/x_0)\in K[x_0,\ldots,x_n]$$

jest wielomianem jednorodnym stopnia d.

(2) Załóżmy, że $B=\{e_0,\ldots,e_n\}$ jest bazą standardową przestrzeni K^{n+1}. Połóżmy $V_0=\operatorname{Span}\{e_1,\ldots,e_n\}$ oraz $A_0=e_0+V_0$. Pokaż, że gdy $\Phi_0\colon\mathbb{P}^n(K)\setminus\mathbb{P}(V_0)\to A_0$ jest mapą afiniczną przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(K)$ związaną z bazą B oraz

$$S=\{[a_0,\ldots,a_n]\in\mathbb{P}^n(K):g(a_0,\ldots,a_n)=0\},$$

to $\Phi_0(S\setminus\mathbb{P}(V_0))=\{1\}\times S_0$, gdzie

$$S_0=\{(a_1,\ldots,a_n)\in K^n:f(a_1,\ldots,a_n)=0\}.$$

Uwaga. Punkt (2) pozwala identyfikować, za pomocą mapy (A_0, Φ_0), część $S \setminus \mathbb{P}(V_0)$ rzutowego zbioru algebraicznego S z afinicznym zbiorem algebraicznym S_0.

Zadanie 6.23. Niech $U, V \neq 0$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K oraz $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dowiedź, że:

(1) gdy f jest monomorfizmem, to odwzorowanie $\mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(V)$, dane wzorem $\mathbb{P}(f)([u]) = [f(u)]$ dla $[u] \in \mathbb{P}(U)$, jest poprawnie określone oraz injektywne.

(2) jeżeli f jest izomorfizmem, to odwzorowanie $\mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(V)$ zdefiniowane w punkcie (1) jest bijekcją.

(3) gdy f, g są monomorfizmami, to $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(g) \iff [f] = [g]$ w $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, V))$.

Zadanie 6.24. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech

$$\mathrm{PGL}(V) = \{\mathbb{P}(f) : f \in \mathrm{GL}(V)\}.$$

(1) Sprawdź, że $\mathbb{P}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$ oraz $\mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g) = \mathbb{P}(f \circ g)$ dla $f, g \in \mathrm{GL}(V)$.

(2) Wywnioskuj z punktu (1), że zbiór $\mathrm{PGL}(V)$ wraz ze składaniem odwzorowań stanowi grupę (nazywaną *rzutową grupą liniową* przestrzeni V).

(3) Uzasadnij, że odwzorowanie $\mathbb{P}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ jest morfizmem grup, który indukuje krótki ciąg dokładny

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } \mathrm{PGL}(V) \longrightarrow 1.$$

(4) Oblicz rząd grupy $\mathrm{PGL}(V)$ gdy $\dim V = n < \infty$ oraz $|K| = q < \infty$.

Zadanie 6.25. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K.

(1) Udowodnij, że gdy ciało K jest algebraicznie domknięte (np. $K = \mathbb{C}$), to każde odwzorowanie rzutowe $f \in \mathrm{PGL}(V)$ ma punkt stały.

(2) Pokaż, że gdy $K = \mathbb{R}$, natomiast wymiar $\dim \mathbb{P}(V)$ jest liczbą parzystą, to każde odwzorowanie rzutowe $f \in \mathrm{PGL}(V)$ ma punkt stały.

(3) Wskaż przykład odwzorowania rzutowego $f \in \mathrm{PGL}(V)$, które nie posiada punktu stałego.

Zadanie 6.26. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad nieskończonym ciałem K, spełniającą $\dim V = n < \infty$. Uzasadnij, że gdy odwzorowanie rzutowe $f \in \mathrm{PGL}(V)$ ma skończenie wiele punktów stałych, to ma ich co najwyżej n.

Zadanie 6.27. Załóżmy, że K jest ciałem. Podaj przykład injektywnego odwzorowania wielomianowego $f\colon \mathbb{P}^1(K) \times \mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^3(K)$, którego obrazem jest kwadryka

$$Q = \{[a_0, a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^3(K) : a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0\}.$$

Uwaga. Gdy ciało K jest algebraicznie domknięte oraz $\mathrm{char}\, K \neq 2$, to każda *nieosobliwa* kwadryka w $\mathbb{P}^3(K)$ (tzn. taka kwadryka w $\mathbb{P}^3(K)$, dla której macierz stowarzyszonej z nią formy kwadratowej jest nieosobliwa) jest w pewnym układzie współrzędnych opisana równaniem $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$.

Zadanie 6.28. Przypuśćmy, że K jest ciałem, natomiast $f \in K[x_0, x_1]$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $n \geqslant 0$. Udowodnij, że równanie $f(x_0, x_1) = 0$ ma co najwyżej n rozwiązań w $\mathbb{P}^1(K)$, a jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to równanie $f(x_0, x_1) = 0$ ma dokładnie n rozwiązań (licząc z krotnościami).

Uwaga. Gdy $[a_0, a_1] \in \mathbb{P}^1(K)$ jest rozwiązaniem równania $f(x_0, x_1) = 0$, to jego *krotność* definiujemy jako największą taką liczbę $k \in \mathbb{N}$, że wielomian $(a_1x_0 - a_0x_1)^k \in K[x_0, x_1]$ dzieli f.

Zadanie 6.29. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $\neq 2$. Załóżmy, że $f \in K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ jest wielomianem jednorodnym stopnia 2. Niech

$$Q = \{[a_0, a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^3(K) : f(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0\}$$

oraz $L \subseteq \mathbb{P}^3(K)$ będzie prostą. Wykaż, że:

(1) Zbiór $L \cap Q$ jest zawsze niepusty.

(2) $L \subseteq Q \iff |L \cap Q| \geqslant 3$.

Zadanie 6.30. Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $\neq 2$. Załóżmy, że $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbb{P}^3(K)$ są prostymi spełniającymi $L_i \cap L_j = \varnothing$ dla $i \neq j$. Udowodnij, iż istnieje taka nieosobliwa kwadryka $Q \subseteq \mathbb{P}^3(K)$, że $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \subseteq Q$.

7 Konstrukcje uniwersalne

Przypomnijmy, że gdy $U_1, \ldots, U_n$ oraz V są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, to odwzorowanie $\varphi\colon U_1 \times \cdots \times U_n \to V$ nazywamy *n-liniowym* (lub *wieloliniowym*), gdy dla dowolnych $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ odwzorowania

$$U_i \ni x \mapsto \varphi(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n) \in V \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

są liniowe. Przestrzeń odwzorowań n-liniowych z $U_1 \times \cdots \times U_n$ w V oznaczamy przez $\operatorname{Hom}(U_1, \ldots, U_n; V)$. Ponadto jeżeli $U_1 = \cdots = U_n = U$, to wprowadzamy oznaczenie $\operatorname{Hom}^n(U, V) = \operatorname{Hom}(U_1, \ldots, U_n; V)$. Mówimy, że odwzorowanie $\psi \in \operatorname{Hom}^n(U, V)$ jest:

(1) *symetryczne*, gdy $\psi(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \psi(u_1, \ldots, u_n)$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$ oraz $\sigma \in S_n$.

(2) *antysymetryczne* (lub *skośnie symetryczne* lub *alternujące*), gdy $\psi(u_1, \ldots, u_n) = 0$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$ spełniających $u_i = u_j$ dla pewnych $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Podprzestrzeń $\operatorname{Hom}^n(U, V)$ składającą się z odwzorowań symetrycznych (odpowiednio antysymetrycznych) oznaczamy przez $\operatorname{Hom}^n_s(U, V)$ (odpowiednio $\operatorname{Hom}^n_a(U, V)$).

Uwaga. Czasem rozróżnia się pojęcia odwzorowania alternującego od antysymetrycznego (skośnie symetrycznego) przyjmując, że $\psi \in \operatorname{Hom}^n(U, V)$ jest alternujące gdy spełnia warunek (2), zaś jest antysymetryczne, gdy $\psi(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\psi(u_1, \ldots, u_n)$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$ oraz $\sigma \in S_n$. Nietrudno sprawdzić, że przy tej terminologii każde odwzorowanie alternujące jest antysymetryczne i gdy $\operatorname{char} K \neq 2$, to oba te pojęcia są równoważne. My jednak nie będziemy wprowadzać takiego podziału. W końcu gdy $n = 0$, to wygodnie jest przyjąć, że $\operatorname{Hom}^n(U, V) = \operatorname{Hom}^n_s(U, V) = \operatorname{Hom}^n_a(U, V) = V$.

Zadanie 7.1. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $U_1, \ldots, U_n$ oraz V są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykaż, że

$$\operatorname{Hom}(U_1, \ldots, U_i; \operatorname{Hom}(U_{i+1}, \ldots, U_n; V)) \cong \operatorname{Hom}(U_1, \ldots, U_n; V)$$

dla dowolnego $1 \leqslant i < n$. W szczególności gdy $U_1 = \cdots = U_n = U$, to

$$\operatorname{Hom}^p(U, \operatorname{Hom}^q(U, V)) \cong \operatorname{Hom}^n(U, V)$$

dla dowolnych $p, q \geqslant 1$ spełniających $p + q = n$.

Zadanie 7.2. Parę (T, τ) nazywamy *iloczynem tensorowym* przestrzeni wektorowych $V_1, \ldots, V_n$ nad ciałem K, gdy T jest przestrzenią K-liniową, $\tau \in \operatorname{Hom}(V_1, \ldots, V_n; T)$ oraz dla dowolnego $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1, \ldots, V_n; W)$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f \in \operatorname{Hom}(T, W)$ spełniające $\varphi = f \circ \tau$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "f"'] & & W
\end{tikzcd}$$

(1) Niech F będzie przestrzenią wektorową nad K o bazie $V_1 \times \cdots \times V_n$ (elementami przestrzeni F są formalne kombinacje liniowe postaci

$$\sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V_1\times\cdots\times V_n} \lambda_{v_1,\ldots,v_n}(v_1,\ldots,v_n),$$

gdzie tylko skończenie wiele skalarów $\lambda_{v_1,\ldots,v_n} \in K$ jest różnych od zera). Rozważmy podprzestrzeń N przestrzeni F rozpiętą przez wszystkie wektory postaci

$$(v_1,\ldots,u_i+v_i,\ldots,v_n) - (v_1,\ldots,u_i,\ldots,v_n) - (v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n),$$
$$(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_n) - \lambda(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n),$$

gdzie $u_i, v_i \in V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ oraz $\lambda \in K$. Niech $T = F/N$ będzie przestrzenią ilorazową, zaś $\tau\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ będzie złożeniem odwzorowań kanonicznych

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow F \longrightarrow F/N = T.$$

Wykaż, że para (T,τ) jest iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1,\ldots,V_n$.

(2) Udowodnij, że gdy para (S,σ) jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1,\ldots,V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $f \in \operatorname{Hom}(T,S)$ spełniający $\sigma = f \circ \tau$.

Uwaga. Z punktów (1) oraz (2) wynika, że iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych $V_1,\ldots,V_n$ istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. To pozwala wprowadzić oznaczenie $T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Elementy przestrzeni T nazywamy *tensorami*, zaś elementy zbioru $\tau(V_1 \times \cdots \times V_n)$ nazywamy *tensorami prostymi*. Gdy $(v_1,\ldots,v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$, to tensor prosty $\tau(v_1,\ldots,v_n)$ oznaczamy przez $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. Jeśli $V_1 = \cdots = V_n = V$, to przestrzeń liniową $\mathrm{T}^n V = V^{\otimes n} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ nazywamy *n-tą potęgą tensorową* przestrzeni V. W końcu dla $n = 0$ definiujemy $\mathrm{T}^n V = K$.

Zadanie 7.3. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $U_1,\ldots,U_n$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Uzasadnij, że

$$\operatorname{Hom}(U_1,\ldots,U_n;V) \cong \operatorname{Hom}(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n, V)$$

dla dowolnej przestrzeni K-liniowej V. W szczególności jeśli $U_1 = \cdots = U_n = U$, to $\operatorname{Hom}^n(U,V) \cong \operatorname{Hom}(\mathrm{T}^n U, V)$ oraz $(\mathrm{T}^n U)^* \cong \operatorname{Hom}^n(U,K)$.

Zadanie 7.4. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że $V_1,\ldots,V_n$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K.

(1) Wykaż, że $V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)} \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$.

(2) Niech $1 \leqslant s < n$ oraz $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s < n$. Udowodnij, że

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (V_{i_s+1} \otimes \cdots \otimes V_n) \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_n.$$

(3) Załóżmy, że $V_i = \bigoplus_{j\in J_i} V_{ij}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dowiedź, że

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \cong \bigoplus_{(j_1,\ldots,j_n)\in J_1\times\cdots\times J_n} V_{1j_1} \otimes \cdots \otimes V_{nj_n}.$$

Uwaga. Z dokładnością do izomorfizmu: punkt (1) gwarantuje przemienność iloczynu tensorowego, punkt (2) mówi o jego łączności, natomiast punkt (3) można traktować jako rozdzielność iloczynu tensorowego względem sumy prostej.

Zadanie 7.5. Załóżmy, że U, V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej X oraz $n \geqslant 1$. Traktując $U^{\otimes n}$ oraz $V^{\otimes n}$ jako podprzestrzenie $X^{\otimes n}$ pokaż, że $(U \cap V)^{\otimes n} = U^{\otimes n} \cap V^{\otimes n}$.

Zadanie 7.6. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, iż wektory $u_1, \ldots, u_n \in V$ są liniowo niezależne. Udowodnij, że gdy $\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i = 0 \in V \otimes V$ dla pewnych wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$, to $v_1 = \cdots = v_n = 0$.

Zadanie 7.7. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_n$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Przypuśćmy, że B_i jest bazą przestrzeni V_i dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dowiedź, że zbiór

$$\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n : v_i \in B_i \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

jest bazą przestrzeni $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. W szczególności $\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \prod_{i=1}^n \dim V_i$.

Zadanie 7.8. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_n$ są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Rozważmy odwzorowanie $j\colon V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*$ dane wzorem

$$j(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \phi_1(v_1) \cdots \phi_n(v_n)$$

dla $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$. Udowodnij, że:

(1) odwzorowanie j jest poprawnie określone, liniowe i injektywne.

(2) gdy przestrzenie $V_1, \ldots, V_n$ są skończonego wymiaru, to j jest izomorfizmem.

(3) w ogólności odwzorowanie j może nie być izomorfizmem.

Czy prawdą jest, że $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^* \cong V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$ pomimo tego, że odwzorowanie j może nie być izomorfizmem?

Zadanie 7.9. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Jeśli $t \in V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* \cong \mathrm{T}^p V \otimes \mathrm{T}^q V^*$ dla pewnych $p, q \geqslant 0$, zaś $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to tensor t zapisuje się (jednoznacznie) jako

$$t = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p=1 \\ j_1,\ldots,j_q=1}}^{n} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q},$$

gdzie $t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \in K$ dla $1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leqslant n$ (są to *współrzędne tensora t w bazie B*), natomiast $\{e^j = e_j^* : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ jest bazą sprzężoną do B. Wyznacz sposób transformacji współrzędnych tensora t przy zmianie bazy B.

Uwaga. Czasami w zapisie sum typu

$$T^{abc}_{\rho\nu} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=2}^{t} X^a_{ij} Y^{ijk}_{\rho\nu} Z^{bc}_k$$

opuszcza się symbole sumowania i pisze w skrócie

$$T^{abc}_{\rho\nu} = X^a_{ij} Y^{ijk}_{\rho\nu} Z^{bc}_k$$

mając na myśli, że sumujemy względem powtarzających się (raz na górze, raz na dole) indeksów (u nas są to indeksy i, j oraz k), milcząco zakładając, że wiadomo jaki jest zakres sumowania. Umowa taka często znacząco skraca zapis; nosi ona nazwę *konwencji sumacyjnej Einsteina*. Stosując tę konwencję można zapisać tensor t w postaci

$$t = t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

Zadanie 7.10. Niech $n \geqslant 1$ oraz V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Rozważmy n-tą potęgę tensorową $\mathrm{T}^n V = V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$ oraz jej podprzestrzenie

$$N_s = \operatorname{Span}\{v_1 \otimes \dots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)} : v_1, \dots, v_n \in V \text{ oraz } \sigma \in S_n\},$$
$$N_a = \operatorname{Span}\{v_1 \otimes \dots \otimes v_n : v_1, \dots, v_n \in V \text{ oraz } v_i = v_{i+1} \text{ dla pewnego } 1 \leqslant i < n\}.$$

Zdefiniujmy

$$\Sigma^n V = \mathrm{T}^n V / N_s \qquad \text{oraz} \qquad \Lambda^n V = \mathrm{T}^n V / N_a.$$

Niech ponadto

$$\tau_s = p_s \circ \tau \qquad \text{oraz} \qquad \tau_a = p_a \circ \tau,$$

gdzie $\tau \colon V \times \dots \times V \to \mathrm{T}^n V$ to kanoniczne odwzorowanie n-liniowe, zaś $p_s \colon \mathrm{T}^n V \to \Sigma^n V$ oraz $p_a \colon \mathrm{T}^n V \to \Lambda^n V$ to naturalne rzutowania.

(1) Dowiedź, że para $(\Sigma^n V, \tau_s)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnego odwzorowania $\varphi \in \operatorname{Hom}^n_s(V, W)$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f \in \operatorname{Hom}(\Sigma^n V, W)$ spełniające $\varphi = f \circ \tau_s$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & V \times \dots \times V \arrow[dl, "\tau_s"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \Sigma^n V \arrow[rr, dashed, "f"'] & & W \end{tikzcd}$$

(2) Dowiedź, że para $(\Lambda^n V, \tau_s)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnego odwzorowania $\varphi \in \operatorname{Hom}^n_a(V, W)$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f \in \operatorname{Hom}(\Lambda^n V, W)$ spełniające $\varphi = f \circ \tau_a$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & V \times \dots \times V \arrow[dl, "\tau_a"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \Lambda^n V \arrow[rr, dashed, "f"'] & & W \end{tikzcd}$$

(3) Uzasadnij, że $\operatorname{Hom}^n_s(V, W) \cong \operatorname{Hom}(\Sigma^n V, W)$ oraz $\operatorname{Hom}^n_a(V, W) \cong \operatorname{Hom}(\Lambda^n V, W)$ dla dowolnej przestrzeni K-liniowej W. W szczególności $(\Sigma^n V)^* \cong \operatorname{Hom}^n_s(V, K)$ oraz $(\Lambda^n V)^* \cong \operatorname{Hom}^n_a(V, K)$.

(4) Wprowadźmy oznaczenia

$$v_1 \odot \cdots \odot v_n = \tau_s(v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{oraz} \qquad v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \tau_a(v_1, \ldots, v_n)$$

dla dowolnych $v_1, \ldots, v_n \in V$. Udowodnij, że gdy $\dim V = m < \infty$ oraz zbiór $\{e_1, \ldots, e_m\}$ jest bazą przestrzeni V, to zbiory

$$\{e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_n} : 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant m\},$$
$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant m\}$$

są bazami przestrzeni $\Sigma^n V$ oraz $\Lambda^n V$, odpowiednio. W szczególności uzasadnij, że $\dim \Sigma^n V = \binom{n+m-1}{n}$ oraz $\dim \Lambda^n V = \binom{m}{n}$ (gdy $n > m$, to kładziemy $\binom{m}{n} = 0$).

Uwaga. Przestrzenie $\Sigma^n V$ oraz $\Lambda^n V$ nazywamy, odpowiednio, *n-tą potęgą symetryczną* oraz *n-tą potęgą zewnętrzną* przestrzeni V. Elementy przestrzeni $\Lambda^n V$ nazywamy czasami *n-wektorami*. Ponadto dla $n = 0$ kładziemy $\Sigma^n V = \Lambda^n V = K$.

Zadanie 7.11. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K, gdzie $\operatorname{char} K = 0$ lub $\operatorname{char} K > n$. Gdy $\sigma \in S_n$, to określmy automorfizm $P_\sigma \in \operatorname{Aut}(V^{\otimes n})$ formułą

$$P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

dla $v_1, \ldots, v_n \in V$ (sprawdź, że definicja jest poprawna). Ponadto zdefiniujmy *operator symetryzacji* $S \in \operatorname{End}(V^{\otimes n})$ oraz *operator antysymetryzacji* $A \in \operatorname{End}(V^{\otimes n})$ wzorami

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma \qquad \text{oraz} \qquad A = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) P_\sigma.$$

Udowodnij, że:

(1) $P_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{V^{\otimes n}}$ oraz $P_{\sigma\tau} = P_\sigma \circ P_\tau$ dla $\sigma, \tau \in S_n$.

(2) $P_\sigma \circ S = S \circ P_\sigma = S$ oraz $P_\sigma \circ A = A \circ P_\sigma = (\operatorname{sgn} \sigma) A$ dla $\sigma \in S_n$.

(3) operatory S oraz A są *idempotentne*, tzn. $S \circ S = S$ oraz $A \circ A = A$.

(4) $\operatorname{Ker} S = N_s$ oraz $\operatorname{Ker} A = N_a$. Wywnioskuj, że $\Sigma^n V \cong \operatorname{Im} S$ oraz $\Lambda^n V \cong \operatorname{Im} A$.

Uwaga. Mówimy, że tensor $t \in V^{\otimes n}$ jest *symetryczny* (odpowiednio *antysymetryczny*), gdy $S(t) = t$ (odpowiednio $A(t) = t$). Punkt (4) pozwala więc identyfikować przestrzenie $\Sigma^n V$ oraz $\Lambda^n V$ (przynajmniej gdy $\operatorname{char} K = 0$ lub $\operatorname{char} K > n$) z podprzestrzeniami tensorów, odpowiednio, symetrycznych $\operatorname{Im} S$ oraz antysymetrycznych $\operatorname{Im} A$.

Zadanie 7.12. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $n \geqslant 1$. Dowiedź, że wektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0 \in \Lambda^n V$. W szczególności gdy $\dim V < \infty$, to

$$\dim V = \max\{n \geqslant 0 : \Lambda^n V \neq 0\}.$$

Zadanie 7.13. Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wykaż, że

$$\Lambda^n(U \oplus V) \cong \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p U \otimes \Lambda^q V$$

dla dowolnego $n \geqslant 0$. Czy to twierdzenie ma swoje odpowiedniki dla potęg tensorowych lub symetrycznych? Jeśli tak, to sformułuj je i dowiedź.

Zadanie 7.14. Załóżmy, że $V \neq 0$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K. Dla $n \geqslant 1$ rozważmy odwzorowania $j_s \colon \Sigma^n V^* \to (\Sigma^n V)^*$ oraz $j_a \colon \Lambda^n V^* \to (\Lambda^n V)^*$ zadane wzorami

$$\begin{aligned} j_s(\phi_1 \odot \cdots \odot \phi_n)(v_1 \odot \cdots \odot v_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \phi_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \phi_n(v_{\sigma(n)}), \\ j_a(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \phi_1(v_{\sigma(1)}) \cdots \phi_n(v_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

dla $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$. Udowodnij, że:

(1) odwzorowania j_s oraz j_a są poprawnie określone i liniowe.

(2) odwzorowanie j_s jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{char} K = 0$ lub $\operatorname{char} K > n$, natomiast odwzorowanie j_a jest zawsze monomorfizmem.

(3) gdy przestrzeń V jest skończonego wymiaru, to odwzorowanie j_s jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{char} K = 0$ lub $\operatorname{char} K > n$, natomiast odwzorowanie j_a jest zawsze izomorfizmem.

(4) w ogólności odwzorowania j_s oraz j_a mogą nie być izomorfizmami.

Czy prawdą jest, że $\Sigma^n V^* \cong (\Sigma^n V)^*$ oraz $\Lambda^n V^* \cong (\Lambda^n V)^*$ pomimo tego, że odwzorowania j_s oraz j_a mogą nie być izomorfizmami?

Zadanie 7.15. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $f_i \in \operatorname{Hom}(U_i, V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$.

(1) Sprawdź, że odwzorowanie

$$U_1 \times \cdots \times U_n \ni (u_1, \ldots, u_n) \mapsto f_1(u_1) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

jest n-liniowe. Korzystając z definicji iloczynu tensorowego uzasadnij, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, oznaczane $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$, które na każdym tensorze prostym $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ przyjmuje wartość $f_1(u_1) \otimes \cdots \otimes f_n(u_n) \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. W szczególności gdy U, V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K oraz $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, to istnieje jedyne odwzorowanie $\mathrm{T}^n f = f \otimes \cdots \otimes f \in \operatorname{Hom}(\mathrm{T}^n U, \mathrm{T}^n V)$ spełniające

$$\mathrm{T}^n f(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = f(u_1) \otimes \cdots \otimes f(u_n)$$

dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$.

(2) Postępując tak jak w punkcie (1) wykaż, że gdy $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, to istnieją jedyne odwzorowania $\Sigma^n f \in \operatorname{Hom}(\Sigma^n U, \Sigma^n V)$ oraz $\Lambda^n f \in \operatorname{Hom}(\Lambda^n U, \Lambda^n V)$ spełniające

$$\begin{aligned} \Sigma^n f(u_1 \odot \cdots \odot u_n) &= f(u_1) \odot \cdots \odot f(u_n), \\ \Lambda^n f(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) &= f(u_1) \wedge \cdots \wedge f(u_n) \end{aligned}$$

dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$.

Uwaga. Jeżeli $n = 0$, to zgodnie z poprzednimi umowami $\mathrm{T}^n V = \Sigma^n V = \Lambda^n V = K$. W tym przypadku definiujemy $\mathrm{T}^n f = \Sigma^n f = \Lambda^n f = \mathrm{id}_K$.

Zadanie 7.16. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $f_i \in \operatorname{Hom}(U_i, V_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Dowiedź, że

$$\operatorname{Ker}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{i=1}^{n} U_1 \otimes \cdots \otimes U_{i-1} \otimes \operatorname{Ker} f_i \otimes U_{i+1} \otimes \cdots \otimes U_n.$$

Zadanie 7.17. Niech $n \geqslant 2$. Załóżmy, że

$$0 \longrightarrow U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} U_n \longrightarrow 0$$

jest *ciągiem dokładnym przestrzeni wektorowych* nad ciałem K; co oznacza, że f_1 jest monomorfizmem, $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ dla $1 \leqslant i < n$ oraz f_n jest epimorfizmem. Udowodnij, że gdy V jest przestrzenią wektorową nad K, to ciąg indukowany

$$0 \longrightarrow U_0 \otimes V \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}_V} U_1 \otimes V \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}_V} \cdots \xrightarrow{f_n \otimes \mathrm{id}_V} U_n \otimes V \longrightarrow 0$$

jest dokładny.

Zadanie 7.18. Załóżmy, że $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ spełnia $\operatorname{rank} f < \infty$. Udowodnij, że

$$\operatorname{rank} f = \max\{n \geqslant 0 : \Lambda^n f \neq 0\}.$$

Zadanie 7.19. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $f \in \operatorname{End}(K^3)$. Opisz wielomian $\chi_{\Lambda^2 f}$ za pomocą wielomianu χ_f. Czy potrafisz uogólnić ten wynik?

Zadanie 7.20. Załóżmy, że $f \in \operatorname{End}(V)$. Wykaż, że gdy $\dim V = n < \infty$, to

$$\chi_f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{tr}(\Lambda^{n-k} f) x^k.$$

W szczególności $\det f = \operatorname{tr}(\Lambda^n f)$.

Zadanie 7.21 (kompleks Koszula)**.** Załóżmy, że $V \neq 0$ jest przestrzenią wektorową oraz $0 \neq \phi \in V^*$. Zdefiniujmy $C_n = \Lambda^n V$ dla $n \geqslant 0$. Określmy także odwzorowania liniowe $d_n \colon C_n \to C_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$ przyjmując

$$d_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \phi(v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_n$$

dla $v_1, \ldots, v_n \in V$ (tutaj $d_1 = \phi$; uzasadnij, że definicja jest poprawna). Wykaż, że ciąg

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

jest dokładny.

Zadanie 7.22. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem K. Dla $n \geqslant 0$ oznaczmy przez $\Phi_n \colon \Lambda^n V \to \operatorname{Hom}_a^n(V^*, K)$ złożenie izomorfizmów kanonicznych

$$\Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^n V^{**} \longrightarrow (\Lambda^n V^*)^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_a^n(V^*, K)$$

(gdy $n = 0$, to $\Phi_n = \mathrm{id}_K$). Izomorfizmy te pozwalają dla dowolnych $0 \leqslant n \leqslant m$ oraz $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$ określić odwzorowanie liniowe $\Omega^{nm}_{\phi_1,\dots,\phi_n} \colon \Lambda^m V \to \Lambda^{m-n} V$ przez warunek

$$\Phi_{m-n}(\Omega^{nm}_{\phi_1,\dots,\phi_n}(\omega))(\phi_{n+1}, \dots, \phi_m) = \Phi_m(\omega)(\phi_1, \dots, \phi_m)$$

dla $\omega \in \Lambda^m V$ oraz $\phi_{n+1}, \dots, \phi_m \in V^*$ (gdy $n = 0$, to kładziemy $\Omega^{nm}_{\phi_1,\dots,\phi_n} = \mathrm{id}_{\Lambda^m V}$, gdy zaś $n = m$, to definiujemy $\Omega^{nm}_{\phi_1,\dots,\phi_n}(\omega) = \Phi_m(\omega)(\phi_1, \dots, \phi_n)$).

(1) Wykaż, że odwzorowanie

$$V^* \times \cdots \times V^* \ni (\phi_1, \dots, \phi_n) \mapsto \Omega^{nm}_{\phi_1,\dots,\phi_n} \in \mathrm{Hom}(\Lambda^m V, \Lambda^{m-n} V)$$

jest n-liniowe i antysymetryczne. Zatem indukuje ono odwzorowanie liniowe

$$\Omega^{nm} \colon \Lambda^n V^* \to \mathrm{Hom}(\Lambda^m V, \Lambda^{m-n} V).$$

(2) Wykorzystując izomorfizm $\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)) \cong \mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z)$ dla dowolnych przestrzeni K-liniowych X, Y, Z uzasadnij, że gdy $0 \leqslant n \leqslant m$, to odwzorowanie liniowe Ω^{nm} z punktu (1) indukuje odwzorowanie liniowe

$$\Omega_{nm} \colon \Lambda^n V^* \otimes \Lambda^m V \to \Lambda^{m-n} V.$$

Udowodnij, że gdy $m = \dim V$, to powyższe odwzorowanie jest izomorfizmem dla dowolnego $0 \leqslant n \leqslant m$.

(3) Załóżmy dodatkowo, że V jest przestrzenią euklidesową oraz $\dim V = m$. Ustalmy wektor bazowy $0 \neq \omega \in \Lambda^m V$ (tzw. *formę objętości*). Wykorzystując izomorfizm Frécheta–Riesza

$$F \colon V \ni v \mapsto \langle v, - \rangle \in V^*$$

oraz izomorfizm z punktu (2) skonstruuj dla dowolnego $0 \leqslant n \leqslant m$ izomorfizm

$$\star_n \colon \Lambda^n V \to \Lambda^{m-n} V,$$

nazywany *operatorem gwiazdka Hodge'a*. Sprawdź, że

$$\star_n \eta = [(\Omega^{nm} \circ \Lambda^n F)(\eta)](\omega)$$

dla dowolnego $\eta \in \Lambda^n V$.

(4) Załóżmy, że $m \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^m$. Niech $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$, gdzie $\{e_1, \dots, e_m\}$ jest standardową bazą ortonormalną w V. Opisz izomorfizm $\star_{m-n} \circ \star_n \colon \Lambda^n V \to \Lambda^n V$ dla dowolnego $0 \leqslant n \leqslant m$.

Definicja. Przestrzeń liniową A nad ciałem K wyposażoną w K-dwuliniowe *mnożenie*

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in A$$

(zwykle, dla uproszczenia, piszemy ab zamiast $a \cdot b$) nazywamy *K-algebrą* (lub *algebrą nad ciałem K*). Jeśli mnożenie w A jest łączne (odpowiednio przemienne, posiada element neutralny (zwany *jedynką* algebry A i oznaczany przez 1_A)), to mówimy, że algebra A jest *łączna* (odpowiednio *przemienna*, *unitalna*). Odwzorowanie liniowe $\phi \colon A \to B$ nazywamy *morfizmem K-algebr A, B*, gdy

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

dla dowolnych $a, b \in A$. Jeżeli algebry A, B są unitalne, to mówimy, że ϕ jest *morfizmem unitalnych K-algebr*, gdy dodatkowo $\phi(1_A) = 1_B$.

Zadanie 7.23. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

(1) Uzasadnij, że dla dowolnych $p, q \geqslant 0$ odwzorowanie $m_{pq}\colon \mathrm{T}^pV \times \mathrm{T}^qV \to \mathrm{T}^{p+q}V$, zadane na tensorach prostych wzorem
$$m_{pq}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p, v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_q,$$
jest dobrze określone i dwuliniowe.

(2) Dowiedź, że przestrzeń wektorowa
$$\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}^nV$$
(elementy przestrzeni $\mathrm{T}(V)$ zapisywać będziemy jako sumy $t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$, gdzie $t_n \in \mathrm{T}^nV$ dla $n \geqslant 0$ oraz $t_n \neq 0$ dla skończenie wielu $n \geqslant 0$) wraz z mnożeniem $\mathrm{T}(V) \times \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$, określonym wzorem
$$s \cdot t = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=n} m_{pq}(s_p, t_q) \Big)$$
dla $s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \in \mathrm{T}(V)$ oraz $t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \in \mathrm{T}(V)$, jest unitalną K-algebrą łączną.

(3) Postępując tak jak w punktach (1) oraz (2) skonstruuj odwzorowania dwuliniowe $\Sigma^pV \times \Sigma^qV \to \Sigma^{p+q}V$ oraz $\Lambda^pV \times \Lambda^qV \to \Lambda^{p+q}V$ dla dowolnych $p, q \geqslant 0$. Następnie używając skonstruowanych odwzorowań wprowadź struktury unitalnych K-algebr łącznych w przestrzeniach
$$\Sigma(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Sigma^nV \qquad \text{oraz} \qquad \Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^nV.$$

(4) Pokaż, że gdy $\dim V = n < \infty$, to $\dim \Lambda(V) = 2^n$ (zatem $\dim \Lambda(V) < \infty$). Co można powiedzieć o wymiarach algebr $\mathrm{T}(V)$ oraz $\Sigma(V)$?

Uwaga. Algebry $\mathrm{T}(V)$, $\Sigma(V)$ oraz $\Lambda(V)$ nazywane są, odpowiednio, *algebrą tensorową*, *algebrą symetryczną* oraz *algebrą zewnętrzną* przestrzeni V. Zwykle mnożenie w algebrze $\mathrm{T}(V)$ oznaczamy przez $\otimes$, tzn. piszemy $s_p \otimes t_q = m_{pq}(s_p, t_q)$ dla $s_p \in \mathrm{T}^pV$ oraz $t_q \in \mathrm{T}^qV$ i ponadto
$$s \otimes t = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=n} s_p \otimes t_q \Big)$$
gdy $s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \in \mathrm{T}(V)$ oraz $t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \in \mathrm{T}(V)$ (należy pamiętać, że notacja ta wprowadza pewną dwuznaczność; mianowicie symbol $s \otimes t$ można interpretować jako iloczyn w algebrze $\mathrm{T}(V)$ lub jako element przestrzeni liniowej $\mathrm{T}(V) \otimes \mathrm{T}(V)$). Podobnie mnożenie w algebrze $\Sigma(V)$ oznaczamy zwykle przez $\odot$, zaś mnożenie w algebrze $\Lambda(V)$ przez $\wedge$ (trzeba pamiętać o dwuznaczności notacji także w tych przypadkach).

Zadanie 7.24. Udowodnij, że algebra symetryczna $\Sigma(V)$ przestrzeni wektorowej V jest przemienna. Wykaż ponadto, że gdy $\omega \in \Lambda^pV$ oraz $\eta \in \Lambda^qV$ dla pewnych $p, q \geqslant 0$, to
$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega \in \Lambda^{p+q}V.$$

Zadanie 7.25. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $n \geqslant 1$. Niech $0 \neq v \in V$ oraz $\omega \in \Lambda^n V$. Dowiedź, że $v \wedge \omega = 0 \in \Lambda^{n+1} V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega = v \wedge \eta$ dla pewnego $\eta \in \Lambda^{n-1} V$.

Zadanie 7.26. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^{2n}$. Niech $\Omega\colon \Lambda^2 V^* \to \mathrm{Bil}_a(V)$ będzie złożeniem izomorfizmów kanonicznych

$$\Lambda^2 V^* \longrightarrow (\Lambda^2 V)^* \longrightarrow \mathrm{Hom}^2_a(V, \mathbb{R}) = \mathrm{Bil}_a(V).$$

Udowodnij, że jeśli $\omega \in \Lambda^2 V^*$, to forma $\Omega(\omega) \in \mathrm{Bil}_a(V)$ jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0 \in \Lambda^{2n} V^*$.

Zadanie 7.27. Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową oraz $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy odwzorowania $F\colon V \to V^*$ oraz $j_a\colon \Lambda^n V^* \to (\Lambda^n V)^*$ przyjmując $F(u)(v) = \langle u, v\rangle$ dla $u, v \in V$ oraz

$$j_a(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det[\phi_i(v_j)]$$

dla $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$.

(1) Dowiedź, że formuła $\langle \omega, \eta\rangle = [(j_a \circ \Lambda^n F)(\omega)](\eta)$ dla $\omega, \eta \in \Lambda^n V$ zadaje iloczyn skalarny w przestrzeni $\Lambda^n V$.

(2) Pokaż, że $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_n, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\rangle = \det[\langle u_i, v_j\rangle]$ dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in V$ oraz $v_1, \ldots, v_n \in V$. W szczególności $\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|^2 = G(v_1, \ldots, v_n)$.

(3) Uzasadnij, że gdy $\dim V = m < \infty$ oraz $\{e_1, \ldots, e_m\}$ jest bazą ortonormalną V, to baza

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant m\}$$

przestrzeni $\Lambda^n V$ (zakładamy, że $n \leqslant m$) jest ortonormalna.

Zadanie 7.28. Załóżmy, że U oraz V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Wykaż, że $\Sigma(U \oplus V) \cong \Sigma(U) \otimes \Sigma(V)$ jako unitalne K-algebry łączne.

Uwaga. Gdy A oraz B są algebrami nad ciałem K, to przestrzeń wektorowa $A \otimes B$ nad K posiada naturalną strukturę K-algebry, której mnożenie jest określone na tensorach prostych wzorem

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $b_1, b_2 \in B$. Gdy obie algebry A, B są łączne (odpowiednio przemienne, unitalne), to algebra $A \otimes B$ jest także łączna (odpowiednio przemienna, unitalna).

Definicja. Niech A będzie algebrą nad ciałem K. Jeśli $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, gdzie $A_n \subseteq A$ dla $n \geqslant 0$ są podprzestrzeniami spełniającymi

$$A_p A_q \subseteq A_{p+q}$$

dla dowolnych $p, q \geqslant 0$, to mówimy, że A jest *algebrą z gradacją*. Elementy podprzestrzeni A_n dla $n \geqslant 0$ nazywamy *jednorodnymi* stopnia n. Powiemy, że algebra z gradacją A jest *superprzemienna*, gdy

$$ab = (-1)^{pq} ba$$

dla dowolnych elementów jednorodnych $a \in A_p$ oraz $b \in A_q$.

Zadanie 7.29. Załóżmy, że U oraz V są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K. Udowodnij, że $\Lambda(U \oplus V) \cong \Lambda(U) \otimes \Lambda(V)$ jako unitalne łączne superprzemienne K-algebry z gradacją.

Uwaga. Gdy K jest ciałem, zaś $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ oraz $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ są superprzemiennymi K-algebrami z gradacją, to przestrzeń K-liniowa

$$A \otimes B \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Big(\bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q \Big)$$

posiada naturalną strukturę superprzemiennej K-algebry z gradacją, której mnożenie jest określone na tensorach prostych wzorem

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{q_1 p_2} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

dla $(a_1, b_1) \in A_{p_1} \times B_{q_1}$ oraz $(a_2, b_2) \in A_{p_2} \times B_{q_2}$. Jeżeli obie algebry A oraz B są łączne (odpowiednio unitalne), to algebra $A \otimes B$ jest także łączna (odpowiednio unitalna).

Zadanie 7.30. Załóżmy, że V jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

(1) Niech $j \colon V \to \mathrm{T}(V)$ będzie naturalnym zanurzeniem. Dowiedź, że para $(\mathrm{T}(V), j)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnej unitalnej K-algebry łącznej A oraz dowolnego odwzorowania liniowego $f \in \mathrm{Hom}(V, A)$ istnieje dokładnie jeden morfizm unitalnych K-algebr łącznych $\phi \colon \mathrm{T}(V) \to A$ spełniający $f = \phi \circ j$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{T}(V) \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & A \end{tikzcd}$$

(2) Niech $j_s \colon V \to \Sigma(V)$ oraz $j_a \colon V \to \Lambda(V)$ będą naturalnymi zanurzeniami. Pokaż, że pary $(\Sigma(V), j_s)$ oraz $(\Lambda(V), j_a)$ także posiadają pewne własności uniwersalne. Względem jakiego typu algebr i jakich odwzorowań?

Definicja. Przestrzeń liniową L nad ciałem K wyposażoną w K-dwuliniowe mnożenie (nazywane *komutatorem* lub *nawiasem Liego*)

$$L \times L \ni (x, y) \mapsto [x, y] \in L$$

nazywamy *algebrą Liego*, gdy:

(1) $[x, x] = 0$ dla $x \in L$,

(2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ dla $x, y, z \in L$ (*tożsamość Jacobiego*).

Gdy $[x, y] = 0$ dla dowolnych $x, y \in L$, to algebrę Liego L nazywamy *abelową*. Mówimy, że podprzestrzeń $S \subseteq L$ jest *podalgebrą Liego* algebry Liego L, gdy $[S, S] \subseteq S$, tzn. gdy $x, y \in S \implies [x, y] \in S$. Powiemy, że odwzorowanie liniowe $f \colon X \to Y$ jest *morfizmem algebr Liego* X, Y, gdy

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

Uwaga. Z punktu (1) wynika, że $[x, y] = -[y, x]$ dla dowolnych $x, y \in L$. Gdy natomiast $\operatorname{char} K \neq 2$, to oba warunki są równoważne. Jeśli zbiór $\{x_i : i \in I\}$ jest bazą przestrzeni liniowej L, to

$$[x_i, x_j] = \sum_{k \in I} \lambda_{ijk} x_k \quad (i, j \in I).$$

Skalary $\lambda_{ijk} \in K$ dla $i, j, k \in I$ nazywamy *stałymi strukturalnymi* algebry Liego L (stałe strukturalne zależą oczywiście od wyboru bazy w L).

Zadanie 7.31. Załóżmy, że L jest dwuwymiarową algebrą Liego nad ciałem K. Wykaż, że L jest abelową algebrą Liego albo istnieje taka baza $\{x_1, x_2\}$ przestrzeni L, że $[x_1, x_2] = x_1$.

Zadanie 7.32. Uzasadnij, że przestrzeń $L = \mathbb{R}^3$, wyposażona w nawias Liego dany wzorem $[x, y] = x \times y$ dla $x, y \in L$, jest algebrą Liego. Wyznacz stałe strukturalne tej algebry związane z bazą standardową przestrzeni L.

Zadanie 7.33. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Zdefiniujmy w przestrzeni liniowej

$$\mathfrak{gl}_n(K) = \mathrm{M}_n(K)$$

nawias Liego za pomocą wzoru $[A, B] = AB - BA$ dla $A, B \in \mathfrak{gl}_n(K)$. Uzasadnij, że $\mathfrak{gl}_n(K)$ jest algebrą Liego. Niech ponadto

$$\mathfrak{sl}_n(K) = \{A \in \mathrm{M}_n(K) : \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Wykaż, że $\mathfrak{sl}_n(K)$ jest podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{gl}_n(K)$. Wyznacz bazę, wymiar i opisz stałe strukturalne algebry Liego $\mathfrak{sl}_n(K)$.

Zadanie 7.34. Załóżmy, że A jest łączną algebrą nad ciałem K. Niech $\operatorname{Lie}(A)$ oznacza przestrzeń K-liniową A wyposażoną w nawias Liego dany wzorem $[a, b] = ab - ba$ dla $a, b \in A$. Udowodnij, że $\operatorname{Lie}(A)$ jest algebrą Liego.

Zadanie 7.35. Niech K będzie ciałem z inwolucją i niech $F = \{x \in K : x^* = x\}$ będzie podciałem elementów stałych. Załóżmy, że $\varphi \colon V \times V \to K$ jest formą półtoraliniową. *Ortogonalną algebrę Liego* formy φ definiujemy jako

$$\mathfrak{o}(\varphi) = \{f \in \operatorname{End}(V) : \varphi(f(u), v) + \varphi(u, f(v)) = 0 \text{ dla dowolnych } u, v \in V\}.$$

Gdy $\dim V < \infty$, to można zdefiniować *specjalną ortogonalną algebrę Liego* formy φ jako

$$\mathfrak{so}(\varphi) = \{f \in \mathfrak{o}(\varphi) : \operatorname{tr} f = 0\}.$$

Sprawdź, że $\mathfrak{o}(\varphi)$ jest podalgebrą algebry Liego $\mathfrak{gl}(V) = \operatorname{End}(V)$ nad F. Uzasadnij, że gdy $\dim V < \infty$, to $\mathfrak{so}(\varphi)$ jest podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{o}(\varphi)$. Wybierając stosownie przestrzeń V oraz formę φ uzyskuje się wiele klasycznych macierzowych algebr Liego.

(1) Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$ spełniają $n = p + q \geqslant 1$. Gdy $V = \mathbb{R}^n$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j y_j - \sum_{j=p+1}^{n} x_j y_j,$$

to dostajemy *ortogonalną algebrę Liego* $\mathfrak{so}(p, q) = \mathfrak{o}(\varphi) = \mathfrak{so}(\varphi)$ typu (p, q). Gdy zaś $q = 0$, to uzyskujemy *ortogonalną algebrę Liego* $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n, 0)$ stopnia n.

(2) Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$ spełniają $n = p + q \geqslant 1$. Gdy $V = \mathbb{C}^n$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} x_j \overline{y}_j - \sum_{j=p+1}^{n} x_j \overline{y}_j,$$

to otrzymujemy *unitarną algebrę Liego* $\mathfrak{u}(p, q) = \mathfrak{o}(\varphi)$ oraz *specjalną unitarną algebrę Liego* $\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{so}(\varphi)$ typu (p, q). Gdy zaś $q = 0$, to dostajemy *unitarną algebrę Liego* $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{u}(n, 0)$ oraz *specjalną unitarną algebrę Liego* $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}(n, 0)$ stopnia n.

(3) Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 1$. Gdy $V = K^{2n}$ oraz

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_{n+j} - \sum_{j=1}^{n} x_{n+j} y_j,$$

to uzyskujemy *symplektyczną algebrę Liego* $\mathfrak{sp}_{2n}(K) = \mathfrak{o}(\varphi)$ stopnia $2n$.

Oblicz wymiary tak otrzymanych algebr Liego.

Uwaga. Czasami można też spotkać zapis $\mathfrak{o}(V)$ oraz $\mathfrak{so}(V)$ zamiast $\mathfrak{o}(\varphi)$ oraz $\mathfrak{so}(\varphi)$, odpowiednio.

Definicja. Załóżmy, że A jest algebrą nad ciałem K. Podprzestrzeń $I \subseteq A$ nazywamy *ideałem*, gdy $AI \subseteq I$ oraz $IA \subseteq I$, tzn. gdy $a \in A$ oraz $x \in I \Longrightarrow ax \in I$ oraz $xa \in I$.

Zadanie 7.36. Załóżmy, że A jest algebrą nad ciałem K. Pokaż, że gdy I jest ideałem algebry A, to przestrzeń ilorazowa A/I ma naturalną strukturę K-algebry z mnożeniem określonym jako

$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$$

dla $a + I \in A/I$ oraz $b + I \in A/I$.

Zadanie 7.37. Załóżmy, że L jest algebrą Liego nad ciałem K. W algebrze tensorowej $\mathrm{T}(L)$ przestrzeni L rozważmy ideał I_L generowany przez zbiór

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in L\}.$$

Niech

$$\mathrm{U}(L) = \mathrm{T}(L)/I_L,$$

zaś $j \colon L \to \mathrm{U}(L)$ będzie złożeniem odwzorowań kanonicznych

$$L \longrightarrow \mathrm{T}(L) \longrightarrow \mathrm{T}(L)/I_L = \mathrm{U}(L).$$

Dowiedź, że para $(\mathrm{U}(L), j)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnej unitalnej K-algebry łącznej A oraz dowolnego morfizmu K-algebr Liego $f \colon L \to \mathrm{Lie}(A)$ istnieje jedyny morfizm unitalnych K-algebr łącznych $\phi \colon \mathrm{U}(L) \to A$ spełniający $f = \phi \circ j$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{U}(L) \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & A \end{tikzcd}$$

Czym jest algebra $\mathrm{U}(L)$ gdy L jest abelową algebrą Liego?

Uwaga. Algebrę $\mathrm{U}(L)$ nazywa się *algebrą obwiednią* algebry Liego L. Słynne twierdzenie Poincarégo–Birkhoffa–Witta mówi, że gdy $\dim V = n < \infty$ oraz zbiór $\{x_1, \dots, x_n\}$ jest bazą przestrzeni L, to zbiór

$$B = \{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} : k_1, \dots, k_n \geqslant 0\},$$

gdzie symbol $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ oznacza obraz tensora

$$x_1^{\otimes k_1} \otimes \cdots \otimes x_n^{\otimes k_n} \in \mathrm{T}^{k_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}^{k_n} V \cong \mathrm{T}^{k_1 + \cdots + k_n} V$$

w algebrze $\mathrm{U}(L)$, jest bazą przestrzeni liniowej $\mathrm{U}(L)$. Fakt, że zbiór B rozpina przestrzeń $\mathrm{U}(L)$ jest prosty. Znacznie większego wysiłku wymaga dowód liniowej niezależności zbioru B. Dodajmy jeszcze, że z twierdzenia Poincarégo–Birkhoffa–Witta wynika injektywność odwzorowania liniowego $j \colon L \to \mathrm{U}(L)$.

Zadanie 7.38. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $Q \in \mathrm{Quad}(V)$. W algebrze tensorowej $\mathrm{T}(V)$ przestrzeni V rozważmy ideał I_Q generowany przez zbiór

$$\{v \otimes v - Q(v) : v \in V\}.$$

Niech

$$\mathrm{Cl}(Q) = \mathrm{T}(V)/I_Q,$$

zaś $j \colon V \to \mathrm{Cl}(Q)$ będzie złożeniem odwzorowań kanonicznych

$$V \longrightarrow \mathrm{T}(V) \longrightarrow \mathrm{T}(V)/I_Q = \mathrm{Cl}(Q).$$

Wykaż, że para $(\mathrm{Cl}(Q), j)$ ma następującą własność uniwersalną: dla dowolnej unitalnej K-algebry łącznej A oraz dowolnego odwzorowania liniowego $f \colon V \to A$, spełniającego $f(v)^2 = Q(v)1_A$ dla każdego $v \in V$, istnieje jedyny morfizm unitalnych K-algebr łącznych $\phi \colon \mathrm{Cl}(Q) \to A$ spełniający $f = \phi \circ j$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathrm{Cl}(Q) \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Czym jest algebra $\mathrm{Cl}(Q)$ gdy $Q = 0$?

Uwaga. Algebrę $\mathrm{Cl}(Q)$ nazywamy *algebrą Clifforda* formy kwadratowej Q. Algebra $\mathrm{Cl}(Q)$ bywa także oznaczana przez $\mathrm{Cl}(V)$ lub $\mathrm{Cl}(V, Q)$. Można pokazać, że gdy $\dim V = n < \infty$ oraz zbiór $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą przestrzeni V, to zbiór

$$B = \{v_1^{\varepsilon_1} \cdots v_n^{\varepsilon_n} : \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\},$$

gdzie symbol $v_1^{\varepsilon_1} \cdots v_n^{\varepsilon_n}$ oznacza obraz tensora

$$v_1^{\otimes \varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{\otimes \varepsilon_n} \in \mathrm{T}^{\varepsilon_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}^{\varepsilon_n} V \cong \mathrm{T}^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n} V$$

w algebrze $\mathrm{Cl}(Q)$, jest bazą przestrzeni liniowej $\mathrm{Cl}(Q)$ (fakt, że zbiór B rozpina przestrzeń $\mathrm{Cl}(Q)$ jest prosty do wykazania; pracy wymaga dowód liniowej niezależności zbioru B). W szczególności $\dim \mathrm{Cl}(Q) = 2^n$.

Zadanie 7.39. Załóżmy, że $p, q \geqslant 0$. Niech $V = \mathbb{R}^{p+q}$ (gdy $p = q = 0$, to kładziemy $V = 0$). Rozważmy formę kwadratową $Q\colon V \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$Q(x_1, \ldots, x_{p+q}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

i oznaczmy przez $\mathrm{Cl}(p, q)$ algebrę Clifforda formy Q. Wykaż, że:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(0,0) \cong \mathbb{R}, &\qquad &\mathrm{Cl}(0,2) \cong \mathbb{H},\\ &\mathrm{Cl}(0,1) \cong \mathbb{C}, & &\mathrm{Cl}(1,1) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\\ &\mathrm{Cl}(1,0) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}, & &\mathrm{Cl}(2,0) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

jako unitalne $\mathbb{R}$-algebry łączne.

Uwaga. Można pokazać, że:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(p+2, q) &\cong \mathrm{Cl}(q, p) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\\ \mathrm{Cl}(p+1, q+1) &\cong \mathrm{Cl}(p, q) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\\ \mathrm{Cl}(p, q+2) &\cong \mathrm{Cl}(q, p) \otimes \mathbb{H} \end{aligned}$$

dla $p, q \geqslant 0$, co w połączeniu z trzema (którymi?) izomorfizmami z zadania pozwala wyznaczyć strukturę algebr $\mathrm{Cl}(p, q)$ dla dowolnych $p, q \geqslant 0$. Z powyższych wzorów wynika także, iż $\mathrm{Cl}(p+4, q) \cong \mathrm{Cl}(p, q+4)$, co z kolei prowadzi do tzw. *periodyczności Botta*

$$\mathrm{Cl}(p+8, q) \cong \mathrm{Cl}(p, q) \otimes \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Cl}(p, q+8)$$

dla dowolnych $p, q \geqslant 0$.

Zadanie 7.40. Załóżmy, że $n \geqslant 0$. Niech $V = \mathbb{C}^n$ (gdy $n = 0$, to kładziemy $V = 0$). Rozważmy formę kwadratową $Q\colon V \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

i oznaczmy przez $\mathrm{Cl}(n)$ algebrę Clifforda formy Q. Wykaż, że:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(0) \cong \mathbb{C}, &\qquad &\mathrm{Cl}(2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C}),\\ &\mathrm{Cl}(1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}, & &\mathrm{Cl}(3) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

jako unitalne $\mathbb{C}$-algebry łączne.

Uwaga. Można udowodnić, że

$$\mathrm{Cl}(n) \cong \begin{cases} \mathrm{M}_{2^k}(\mathbb{C}) & \text{gdy } n = 2k,\\ \mathrm{M}_{2^k}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{2^k}(\mathbb{C}) & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$$

dla dowolnego $n \geqslant 0$.

Definicja. Parę $(I, \leqslant)$ nazywamy *zbiorem skierowanym*, gdy I jest zbiorem, natomiast $\leqslant$ jest relacją binarną w I, która jest *zwrotna* (tzn. $i \leqslant i$ dla $i \in I$), *przechodnia* (tzn. $i \leqslant j$ oraz $j \leqslant k \Longrightarrow i \leqslant k$ dla $i, j, k \in I$) oraz dla dowolnych $i, j \in I$ istnieje takie $k \in I$, że $i, j \leqslant k$. Wprowadźmy oznaczenie

$$I_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \in I^n : i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n\} \quad (n \geqslant 1).$$

Definicja. *Systemem prostym* (lub *injektywnym*) przestrzeni liniowych nad ciałem K nazywamy taką parę $((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$, że:

(1) V_i jest przestrzenią K-liniową dla $i \in I$ oraz $\phi_{ij} \in \operatorname{Hom}(V_i, V_j)$ dla $(i,j) \in I_2$,

(2) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$ dla $i \in I$ oraz $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ dla $(i,j,k) \in I_3$.

Definicja. Parę $(C, (s_i)_{i\in I})$ nazywamy *kogranicą* (lub *granicą prostą* lub *injektywną*) systemu prostego $\mathcal{S} = ((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ przestrzeni wektorowych nad ciałem K, gdy:

(1) C jest przestrzenią K-liniową, natomiast odwzorowania $s_i \in \operatorname{Hom}(V_i, C)$ dla $i \in I$ spełniają $s_i = s_j \circ \phi_{ij}$ dla dowolnego $(i,j) \in I_2$,

(2) gdy X jest przestrzenią K-liniową, zaś odwzorowania $f_i \in \operatorname{Hom}(V_i, X)$ dla $i \in I$ spełniają $f_i = f_j \circ \phi_{ij}$ dla dowolnego $(i,j) \in I_2$, to istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie $f \in \operatorname{Hom}(C, X)$, że $f_i = f \circ s_i$ dla $i \in I$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "s_i"'] \arrow[ddr, bend right, "f_i"'] & & V_j \arrow[dl, "s_j"] \arrow[ddl, bend left, "f_j"] \\
& C \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Przestrzeń C oznaczamy zwykle przez $\operatorname{colim} \mathcal{S}$ lub $\varinjlim \mathcal{S}$ lub nawet $\operatorname{colim}_{i\in I} V_i$.

Zadanie 7.41. Niech $\mathcal{S} = ((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ będzie systemem prostym przestrzeni wektorowych nad ciałem K.

(1) Zdefiniujmy

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i \qquad \text{oraz} \qquad N = \sum_{(i,j)\in I_2} \operatorname{Im}(u_i - u_j \circ \phi_{ij}),$$

gdzie $u_i\colon V_i \to V$ dla $i \in I$ są naturalnymi zanurzeniami. Przyjmijmy $C = V/N$ oraz $s_i = p \circ u_i$ dla $i \in I$, gdzie $p\colon V \to V/N = C$ jest naturalnym rzutowaniem. Wykaż, że para $(C, (s_i)_{i\in I})$ jest kogranicą systemu $\mathcal{S}$.

(2) Udowodnij, że gdy para $(X, (f_i)_{i\in I})$ jest również kogranicą systemu $\mathcal{S}$, to istnieje jedyny izomorfizm $f \in \operatorname{Hom}(C, X)$ spełniający $f_i = f \circ s_i$ dla $i \in I$.

Zadanie 7.42. Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową. Niech I będzie rodziną wszystkich skończenie wymiarowych podprzestrzeni X.

(1) Uzasadnij, że para $(I, \subseteq)$ jest zbiorem skierowanym.

(2) Gdy $U, V \in I$ spełniają $U \subseteq V$, to niech $\phi_{UV}\colon U \to V$ będzie naturalną inkluzją. Pokaż, że $\mathcal{F} = ((U)_{U\in I}, (\phi_{UV})_{(U,V)\in I_2})$ jest systemem prostym oraz $X \cong \operatorname{colim} \mathcal{F}$.

Zadanie 7.43. Niech X będzie przestrzenią liniową. Przypuśćmy, że $(V_i)_{i\in I}$ jest taką rodziną podprzestrzeni X, iż dla dowolnych $i,j\in I$ istnieje takie $k\in I$, że $V_i+V_j\subseteq V_k$. Zdefiniujmy relację $\leqslant$ w zbiorze I kładąc $i\leqslant j \iff V_i\subseteq V_j$ dla $i,j\in I$.

(1) Sprawdź, że para $(I,\leqslant)$ jest zbiorem skierowanym.

(2) Niech $\phi_{ij}\colon V_i\to V_j$ będzie naturalną inkluzją dla $(i,j)\in I_2$. Uzasadnij, że para $\mathcal{S}=((V_i)_{i\in I},(\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem prostym. Czym jest $\operatorname{colim}\mathcal{S}$?

Zadanie 7.44. Załóżmy, że $\mathcal{S}=((U_i)_{i\in I},(\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem prostym przestrzeni wektorowych nad ciałem K oraz, że V jest przestrzenią liniową nad K.

(1) Pokaż, że $\mathcal{S}\otimes V=((U_i\otimes V)_{i\in I},(\phi_{ij}\otimes \mathrm{id}_V)_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem prostym.

(2) Udowodnij, że $\operatorname{colim}(\mathcal{S}\otimes V)\cong(\operatorname{colim}\mathcal{S})\otimes V$ lub inaczej

$$\operatorname*{colim}_{i\in I}(U_i\otimes V)\cong(\operatorname*{colim}_{i\in I}U_i)\otimes V.$$

Zadanie 7.45. Załóżmy, że $\mathcal{U}=((U_i)_{i\in I},(\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$, $\mathcal{V}=((V_i)_{i\in I},(\psi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ oraz $\mathcal{W}=((W_i)_{i\in I},(\chi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ są systemami prostymi przestrzeni liniowych nad ciałem K.

(1) Mówimy, że rodzina odwzorowań liniowych $f=(f_i\colon U_i\to V_i)_{i\in I}$ jest *morfizmem systemów prostych* $\mathcal{U}$ oraz $\mathcal{V}$ (i piszemy $f\colon\mathcal{U}\to\mathcal{V}$), gdy $f_j\circ\phi_{ij}=\psi_{ij}\circ f_i$ dla dowolnego $(i,j)\in I_2$. Udowodnij, że gdy $f\colon\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ jest morfizmem systemów prostych, to istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\operatorname{colim} f\in\operatorname{Hom}(\operatorname{colim}\mathcal{U},\operatorname{colim}\mathcal{V})$ o tej własności, że diagram

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[rrr, "f_i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\phi_{ij}"'] & & & V_i \arrow[dl] \arrow[dd, "\psi_{ij}"] \\
& \operatorname{colim}\mathcal{U} \arrow[r, dashed, "\operatorname{colim} f"] & \operatorname{colim}\mathcal{V} & \\
U_j \arrow[ur] \arrow[rrr, "f_j"'] & & & V_j \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

jest przemienny dla dowolnego $(i,j)\in I_2$.

(2) Załóżmy, że

$$0\longrightarrow\mathcal{U}\xrightarrow{f}\mathcal{V}\xrightarrow{g}\mathcal{W}\longrightarrow 0$$

jest *ciągiem dokładnym systemów prostych* $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$, co oznacza, że ciąg

$$0\longrightarrow U_i\xrightarrow{f_i}V_i\xrightarrow{g_i}W_i\longrightarrow 0$$

jest dokładny dla dowolnego $i\in I$. Wykaż, że ciąg indukowany

$$0\longrightarrow\operatorname{colim}\mathcal{U}\xrightarrow{\operatorname{colim} f}\operatorname{colim}\mathcal{V}\xrightarrow{\operatorname{colim} g}\operatorname{colim}\mathcal{W}\longrightarrow 0$$

jest dokładny.

Definicja. *Systemem odwrotnym* (lub *projektywnym*) przestrzeni liniowych nad ciałem K nazywamy taką parę $((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$, że:

(1) V_i jest przestrzenią K-liniową dla $i \in I$ oraz $\phi_{ij} \in \operatorname{Hom}(V_j, V_i)$ dla $(i,j) \in I_2$,

(2) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$ dla $i \in I$ oraz $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ dla $(i,j,k) \in I_3$.

Definicja. Parę $(L, (p_i)_{i\in I})$ nazywamy *granicą* (lub *granicą odwrotną* lub *projektywną*) systemu odwrotnego $\mathcal{S}$, gdy:

(1) L jest przestrzenią K-liniową, natomiast odwzorowania $p_i \in \operatorname{Hom}(L, V_i)$ dla $i \in I$ spełniają $p_i = \phi_{ij} \circ p_j$ dla $(i,j) \in I_2$,

(2) gdy X jest przestrzenią K-liniową, natomiast odwzorowania $f_i \in \operatorname{Hom}(X, V_i)$ dla $i \in I$ spełniają $f_i = \phi_{ij} \circ f_j$ dla $(i,j) \in I_2$, to istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie $f \in \operatorname{Hom}(X, L)$, że $f_i = p_i \circ f$ dla $i \in I$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\
& L \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
V_i & & V_j \arrow[ll, "\phi_{ij}"]
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Przestrzeń L oznaczamy zwykle przez $\lim \mathcal{S}$ lub $\varprojlim \mathcal{S}$ lub nawet $\lim_{i\in I} V_i$.

Zadanie 7.46. Niech $\mathcal{S} = ((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ będzie systemem odwrotnym przestrzeni wektorowych nad ciałem K.

(1) Niech
$$L = \Big\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i : v_i = \phi_{ij}(v_j) \text{ dla dowolnego } (i,j) \in I_2\Big\},$$
zaś $p_i \colon L \to V_i$ dla $i \in I$ będą naturalnymi rzutowaniami. Udowodnij, że para $(L, (p_i)_{i\in I})$ jest granicą systemu $\mathcal{S}$.

(2) Dowiedź, że gdy para $(X, (f_i)_{i\in I})$ jest również granicą systemu $\mathcal{S}$, to istnieje jedyny izomorfizm $f \in \operatorname{Hom}(X, L)$ spełniający $f_i = p_i \circ f$ dla $i \in I$.

Zadanie 7.47. Niech X będzie przestrzenią liniową. Przypuśćmy, że $(V_i)_{i\in I}$ jest taką rodziną podprzestrzeni X, iż dla dowolnych $i, j \in I$ istnieje takie $k \in I$, że $V_k \subseteq V_i \cap V_j$. Zdefiniujmy relację $\leqslant$ w zbiorze I kładąc $i \leqslant j \iff V_j \subseteq V_i$ dla $i, j \in I$.

(1) Sprawdź, że para $(I, \leqslant)$ jest zbiorem skierowanym.

(2) Niech $\phi_{ij} \colon V_j \to V_i$ będzie naturalną inkluzją dla $(i,j) \in I_2$. Uzasadnij, że para $\mathcal{S} = ((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem odwrotnym. Czym jest $\lim \mathcal{S}$?

Zadanie 7.48. Niech $\mathcal{S} = ((V_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ będzie systemem odwrotnym przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Jeżeli U jest przestrzenią wektorową nad K, to zdefiniujmy odwzorowania $\phi_{ij*}\colon \operatorname{Hom}(U, V_j) \to \operatorname{Hom}(U, V_i)$ dla $(i,j) \in I_2$ wzorem $\phi_{ij*}(f) = \phi_{ij} \circ f$ dla $f \in \operatorname{Hom}(U, V_j)$.

(1) Pokaż, że $\operatorname{Hom}(U, \mathcal{S}) = ((\operatorname{Hom}(U, V_i))_{i\in I}, (\phi_{ij*})_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem odwrotnym.

(2) Udowodnij, że $\lim \operatorname{Hom}(U, \mathcal{S}) \cong \operatorname{Hom}(U, \lim \mathcal{S})$ lub inaczej
$$\lim_{i\in I} \operatorname{Hom}(U, V_i) \cong \operatorname{Hom}(U, \lim_{i\in I} V_i).$$

Zadanie 7.49. Niech $\mathcal{S} = ((U_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ będzie systemem prostym przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Jeżeli V jest przestrzenią wektorową nad K, to zdefiniujmy odwzorowania $\phi_{ij}^*\colon \operatorname{Hom}(U_j, V) \to \operatorname{Hom}(U_i, V)$ dla $(i,j) \in I_2$ wzorem $\phi_{ij}^*(f) = f \circ \phi_{ij}$ dla $f \in \operatorname{Hom}(U_j, V)$.

(1) Pokaż, że $\operatorname{Hom}(\mathcal{S}, V) = ((\operatorname{Hom}(U_i, V))_{i\in I}, (\phi_{ij}^*)_{(i,j)\in I_2})$ jest systemem odwrotnym.

(2) Udowodnij, że $\lim \operatorname{Hom}(\mathcal{S}, V) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{colim} \mathcal{S}, V)$ lub inaczej
$$\lim_{i\in I} \operatorname{Hom}(U_i, V) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname*{colim}_{i\in I} U_i, V).$$

Zadanie 7.50. Załóżmy, że $\mathcal{U} = ((U_i)_{i\in I}, (\phi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$, $\mathcal{V} = ((V_i)_{i\in I}, (\psi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ oraz $\mathcal{W} = ((W_i)_{i\in I}, (\chi_{ij})_{(i,j)\in I_2})$ są systemami odwrotnymi przestrzeni liniowych nad ciałem K.

(1) Mówimy, że rodzina odwzorowań liniowych $f = (f_i\colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ jest *morfizmem systemów odwrotnych* $\mathcal{U}$ oraz $\mathcal{V}$ (i piszemy $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$), gdy $f_i \circ \phi_{ij} = \psi_{ij} \circ f_j$ dla dowolnego $(i,j) \in I_2$. Udowodnij, że gdy $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ jest morfizmem systemów odwrotnych, to istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $\lim f \in \operatorname{Hom}(\lim \mathcal{U}, \lim \mathcal{V})$ o tej własności, że diagram

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[rrr, "f_i"] & & & V_i \\
& \lim \mathcal{U} \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r, dashed, "\lim f"] & \lim \mathcal{V} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
U_j \arrow[u, "\phi_{ij}"] \arrow[rrr, "f_j"'] & & & V_j \arrow[u, "\psi_{ij}"']
\end{tikzcd}$$

jest przemienny dla dowolnego $(i,j) \in I_2$.

(2) Załóżmy, że
$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{V} \xrightarrow{g} \mathcal{W} \longrightarrow 0$$
jest *ciągiem dokładnym systemów odwrotnych* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, co oznacza, że ciąg
$$0 \longrightarrow U_i \xrightarrow{f_i} V_i \xrightarrow{g_i} W_i \longrightarrow 0$$

jest dokładny dla dowolnego $i \in I$. Wykaż, że ciąg indukowany

$$0 \longrightarrow \lim \mathcal{U} \xrightarrow{\lim f} \lim \mathcal{V} \xrightarrow{\lim g} \lim \mathcal{W}$$

jest dokładny. Czy $\lim g$ musi być epimorfizmem?

Uwaga. Załóżmy, że $(I, \leqslant)$ jest zbiorem skierowanym. Zdefiniujemy kategorię $\mathscr{I}$ kładąc $|\mathscr{I}| = I$ oraz

$$\mathscr{I}(i,j) = \begin{cases} \{(i,j)\} & \text{gdy } (i,j) \in I_2, \\ \varnothing & \text{gdy } (i,j) \in I^2 \setminus I_2. \end{cases}$$

System prosty $\mathcal{S} = ((V_i)_{i \in I}, (\phi_{ij})_{(i,j) \in I_2})$ przestrzeni liniowych nad ciałem K można wtedy identyfikować z funktorem $S\colon \mathscr{I} \to K\text{-}\mathsf{Vect}$ zadanym przez warunki

$$S(i) = V_i \qquad \text{oraz} \qquad S(i,j) = \phi_{ij}$$

dla $i \in I$ oraz $(i,j) \in I_2$. Kogranica $\operatorname{colim} \mathcal{S}$ systemu $\mathcal{S}$ przy powyższej identyfikacji odpowiada kogranicy $\operatorname{colim} S$ funktora S. Podobnych identyfikacji można dokonać dla systemów odwrotnych przestrzeni liniowych nad ciałem K oraz ich granic.

8 Kategorie

Definicja. *Kategoria* $\mathscr{C}$ składa się z:

(1) klasy *obiektów* $|\mathscr{C}|$,

(2) zbiorów *morfizmów* $\mathscr{C}(A, B)$ dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{C}|$,

(3) odwzorowań *składania* (lub *kompozycji*) morfizmów

$$\mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \ni (f, g) \mapsto g \circ f \in \mathscr{C}(A, C)$$

dla dowolnych $A, B, C \in |\mathscr{C}|$,

(4) *morfizmów identycznościowych* $1_A \in \mathscr{C}(A, A)$ dla dowolnego $A \in |\mathscr{C}|$.

Dodatkowo muszą być spełnione następujące aksjomaty:

(5) $(A, B) \neq (C, D) \Longrightarrow \mathscr{C}(A, B) \cap \mathscr{C}(C, D) = \varnothing$ dla dowolnych $A, B, C, D \in |\mathscr{C}|$,

(6) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dla każdych $f \in \mathscr{C}(A, B)$, $g \in \mathscr{C}(B, C)$ oraz $h \in \mathscr{C}(C, D)$,

(7) $1_B \circ f = f$ oraz $g \circ 1_B = g$ dla dowolnych $f \in \mathscr{C}(A, B)$ oraz $g \in \mathscr{C}(B, C)$.

Uwaga. Klasa obiektów $|\mathscr{C}|$ kategorii $\mathscr{C}$ bywa też oznaczana przez $\operatorname{Obj}\mathscr{C}$. Natomiast klasa wszystkich morfizmów kategorii $\mathscr{C}$ to $\operatorname{Mor}\mathscr{C} = \bigcup_{A,B\in|\mathscr{C}|} \mathscr{C}(A, B)$. Gdy $A, B \in |\mathscr{C}|$, to zbiór morfizmów $\mathscr{C}(A, B)$ bywa także oznaczany przez $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ lub $\operatorname{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$. Jeśli $f \in \mathscr{C}(A, B)$, to obiekt $\operatorname{Dom} f = A$ nazywamy *dziedziną* morfizmu f, zaś obiekt $\operatorname{Cod} f = B$ nazywamy *kodziedziną* (lub *przeciwdziedziną*) morfizmu f. Mówimy również, że f jest morfizmem z A w B i piszemy $f\colon A \to B$. W końcu morfizm identycznościowy 1_A bywa oznaczany przez id_A lub I_A.

Zadanie 8.1. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią. Niech $|\mathscr{C}^{\mathrm{op}}| = |\mathscr{C}|$ oraz $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathscr{C}(B, A)$ dla $A, B \in |\mathscr{C}|$. Zdefiniujmy złożenie morfizmów $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}(A, B)$ oraz $g \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}(B, C)$ w $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ wzorem $g \circ_{\mathrm{op}} f = f \circ g$ (złożenie po prawej stronie oznacza kompozycję w $\mathscr{C}$). Uzasadnij, że $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ jest kategorią.

Uwaga. Kategoria $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ jest nazywana *kategorią przeciwną* do $\mathscr{C}$ i powstaje ona przez „odwrócenie wszystkich strzałek” w $\mathscr{C}$.

Zadanie 8.2. Załóżmy, że $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_n$ są kategoriami. Niech $|\mathscr{C}| = |\mathscr{C}_1| \times \dots \times |\mathscr{C}_n|$ oraz połóżmy $\mathscr{C}(A, B) = \mathscr{C}_1(A_1, B_1) \times \dots \times \mathscr{C}_n(A_n, B_n)$ dla $A = (A_1, \dots, A_n) \in |\mathscr{C}|$ oraz $B = (B_1, \dots, B_n) \in |\mathscr{C}|$. Zdefiniujmy złożenie morfizmów $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{C}(A, B)$ oraz $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathscr{C}(B, C)$ w $\mathscr{C}$ jako $g \circ f = (g_1 \circ f_1, \dots, g_n \circ f_n)$. Niech ponadto $1_A = (1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}) \in \mathscr{C}(A, A)$. Pokaż, że $\mathscr{C}$ jest kategorią.

Uwaga. Kategoria $\mathscr{C}$ jest nazywana *produktem kategorii* $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_n$ i zwykle jest ona oznaczana przez $\mathscr{C}_1 \times \dots \times \mathscr{C}_n$.

Jedną z ważniejszych kategorii jest kategoria zbiorów Set. Obiektami tej kategorii są zbiory. Dla zbiorów S, T definiujemy $\mathsf{Set}(S, T) = \operatorname{Map}(S, T) = T^S$. Ponadto $1_S = \operatorname{id}_S$, zaś składanie morfizmów w Set to zwykłe składanie odwzorowań.

Zadanie 8.3. Niech $|\mathscr{R}|$ będzie klasą wszystkich zbiorów. Dla $X, Y \in |\mathscr{R}|$ zdefiniujmy $\mathscr{R}(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$. Gdy $R \in \mathscr{R}(X,Y)$ oraz $S \in \mathscr{R}(Y,Z)$, to złożenie określmy jako

$$S \circ R = \{(x,z) \in X \times Z : (x,y) \in R \text{ oraz } (y,z) \in S \text{ dla pewnego } y \in Y\}.$$

Sprawdź, że klasa $|\mathscr{R}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{R}(X,Y)$ dla $X, Y \in |\mathscr{R}|$, powyżej określonym składaniem jako kompozycją morfizmów oraz zbiorami $\mathrm{id}_X \in \mathscr{R}(X,X)$ dla $X \in |\mathscr{R}|$ jako morfizmami identycznościowymi tworzy *kategorię relacji* $\mathscr{R} = \mathsf{Rel}$.

Drugą ważną dla nas kategorią jest kategoria $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ przestrzeni wektorowych nad ustalonym ciałem K. Obiektami tej kategorii są przestrzenie liniowe nad K. Dla przestrzeni liniowych U, V nad K definiujemy $\mathscr{V}(U,V) = \mathrm{Hom}(U,V)$. Ponadto $1_U = \mathrm{id}_U$, zaś składanie morfizmów w $\mathscr{V}$ to składanie odwzorowań.

Zadanie 8.4. Niech $|\mathscr{Q}|$ będzie klasą wszystkich przestrzeni kwadratowych nad ciałem K charakterystyki $\neq 2$. Jeśli $\mathcal{U} = (U,P) \in |\mathscr{Q}|$ oraz $\mathcal{V} = (V,Q) \in |\mathscr{Q}|$, to zdefiniujmy

$$\mathscr{Q}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \{f \in \mathrm{Hom}(U,V) : Q \circ f = P\}.$$

Sprawdź, że klasa $|\mathscr{Q}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{Q}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ dla $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in |\mathscr{Q}|$, składaniem odwzorowań liniowych jako kompozycją morfizmów oraz odwzorowaniami identycznościowymi tworzy *kategorię przestrzeni kwadratowych* $\mathscr{Q} = K\text{-}\mathsf{QSp}$ nad ciałem K.

Zadanie 8.5. Niech $|\mathscr{A}|$ będzie klasą wszystkich unitalnych algebr łącznych nad ciałem K. Jeśli $A, B \in |\mathscr{A}|$, to definiujemy

$$\mathscr{A}(A,B) = \{\phi \in \mathrm{Hom}(A,B) : \phi \text{ jest morfizmem unitalnych } K\text{-algebr}\}.$$

Pokaż, że klasa $|\mathscr{A}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{A}(A,B)$ dla $A, B \in |\mathscr{A}|$, składaniem odwzorowań liniowych jako kompozycją morfizmów oraz odwzorowaniami identycznościowymi tworzy *kategorię unitalnych K-algebr łącznych* $\mathscr{A} = K\text{-}\mathsf{Alg}$ nad ciałem K.

Definicja. *Podkategoria* $\mathscr{B}$ kategorii $\mathscr{C}$ składa się z:

(1) podklasy $|\mathscr{B}| \subseteq |\mathscr{C}|$,

(2) podzbiorów $\mathscr{B}(A,B) \subseteq \mathscr{C}(A,B)$ dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{B}|$.

Dodatkowo muszą być spełnione następujące aksjomaty:

(3) $1_A \in \mathscr{B}(A,A)$ dla dowolnego $A \in |\mathscr{B}|$,

(4) $g \circ f \in \mathscr{B}(A,C)$ dla każdych $f \in \mathscr{B}(A,B)$ oraz $g \in \mathscr{B}(B,C)$.

Mówimy, że podkategoria $\mathscr{B}$ kategorii $\mathscr{C}$ jest *pełna*, jeżeli dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{B}|$ zachodzi $\mathscr{B}(A,B) = \mathscr{C}(A,B)$.

Zadanie 8.6.

(1) Sprawdź, że Set jest podkategorią kategorii Rel. Czy podkategoria Set jest pełna?

(2) Niech $|\mathscr{F}|$ będzie klasą wszystkich skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem K. Dla $U, V \in |\mathscr{F}|$ zdefiniujmy $\mathscr{F}(U,V) = \mathrm{Hom}(U,V)$. Pokaż, że $\mathscr{F}$ jest podkategorią kategorii $K\text{-}\mathsf{Vect}$. Czy podkategoria $\mathscr{F}$ jest pełna?

Zadanie 8.7. Załóżmy, że $|\mathscr{C}|$ jest klasą wszystkich przemiennych unitalnych algebr łącznych nad ciałem K. Dla $A, B \in |\mathscr{C}|$ przyjmijmy $\mathscr{C}(A, B) = K\text{-}\mathsf{Alg}(A, B)$. Uzasadnij, że $\mathscr{C} = K\text{-}\mathsf{CAlg}$ jest pełną podkategorią kategorii $K\text{-}\mathsf{Alg}$.

Definicja. Morfizm $f \in \mathscr{C}(A, B)$ kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy:

(1) *monomorfizmem*, gdy $f \circ u = f \circ v \Longrightarrow u = v$ dla dowolnych $u, v \in \mathscr{C}(X, A)$.

(2) *epimorfizmem*, gdy $u \circ f = v \circ f \Longrightarrow u = v$ dla dowolnych $u, v \in \mathscr{C}(B, X)$.

(3) *izomorfizmem*, gdy $g \circ f = 1_A$ oraz $f \circ g = 1_B$ dla pewnego $g \in \mathscr{C}(B, A)$.

(4) *sekcją*, gdy $g \circ f = 1_A$ dla pewnego $g \in \mathscr{C}(B, A)$.

(5) *retrakcją*, gdy $f \circ g = 1_B$ dla pewnego $g \in \mathscr{C}(B, A)$.

Zadanie 8.8. Załóżmy, że $f \in \mathscr{C}(A, B)$ jest morfizmem kategorii $\mathscr{C}$. Udowodnij, że:

(1) gdy f jest sekcją, to f jest monomorfizmem.

(2) gdy f jest retrakcją, to f jest epimorfizmem.

(3) gdy f jest izomorfizmem, to f jest sekcją i retrakcją.

(4) gdy f jest sekcją i epimorfizmem, to f jest izomorfizmem.

(5) gdy f jest retrakcją i monomorfizmem, to f jest izomorfizmem.

Zadanie 8.9. Wskaż przykład kategorii $\mathscr{C}$ oraz takiego morfizmu $f \in \mathscr{C}(A, B)$, że:

(1) f jest monomorfizmem i epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

(2) f jest monomorfizmem, ale nie jest sekcją.

(3) f jest epimorfizmem, ale nie jest retrakcją.

Zadanie 8.10. Podaj przykład kategorii $\mathscr{C}$, w której morfizmy są odwzorowaniami oraz takiego morfizmu $f \in \mathscr{C}(A, B)$, że:

(1) f jest monomorfizmem, ale nie jest injekcją.

(2) f jest epimorifzmem, ale nie jest surjekcją.

Zadanie 8.11. Pokaż, że w kategorii $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ przestrzeni liniowych nad ciałem K:

(1) monomorfizmy to injektywne odwzorowania liniowe.

(2) epimorfizmy to surjektywne odwzorowania liniowe.

(3) izomorfizmy to bijektywne odwzorowania liniowe.

(4) każdy monomorfizm jest sekcją, zaś każdy epimorfizm jest retrakcją.

Definicja. Mówimy, że obiekt A kategorii $\mathscr{C}$ jest *początkowy* (odpowiednio *końcowy*), gdy $|\mathscr{C}(A, X)| = 1$ (odpowiednio $|\mathscr{C}(X, A)| = 1$) dla dowolnego $X \in |\mathscr{C}|$. Obiekt, który jest jednocześnie początkowy i końcowy nazywamy *obiektem zerowym*.

Zadanie 8.12. Udowodnij, że dowolne dwa obiekty początkowe (odpowiednio końcowe, zerowe) kategorii $\mathscr{C}$ są izomorficzne. Czy w każdej kategorii istnieją obiekty początkowe (odpowiednio końcowe, zerowe)? Podaj stosowne (kontr)przykłady.

Zadanie 8.13. Opisz, o ile istnieją, obiekty początkowe (odpowiednio końcowe, zerowe) w kategoriach: Set, Rel, Cat, Quiv, K-Vect, K-QSp oraz K-Lie, gdzie K jest ciałem. Czy potrafisz zrobić to samo dla kategorii K-Alg oraz K-CAlg?

Definicja. *Produktem* rodziny obiektów $(A_i)_{i\in I}$ (indeksowanej zbiorem I) kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy taką parę $(P,(p_i)_{i\in I})$, że:

(1) $P \in |\mathscr{C}|$ oraz $p_i \in \mathscr{C}(P, A_i)$ dla $i \in I$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i rodziny morfizmów $(f_i \in \mathscr{C}(X, A_i))_{i\in I}$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f \in \mathscr{C}(X, P)$, że $f_i = p_i \circ f$ dla $i \in I$.

Uwaga. Obiekt P zwykle oznaczamy przez $\prod_{i\in I} A_i$. Jeżeli $I = \{1, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, to piszemy $A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i\in I} A_i$. Gdy zaś $n = 2$, to mówimy o *produkcie binarnym.*

Definicja. *Koproduktem* rodziny obiektów $(A_i)_{i\in I}$ (indeksowanej zbiorem I) kategorii $\mathscr{C}$ nazywamy taką parę $(S,(s_i)_{i\in I})$, że:

(1) $S \in |\mathscr{C}|$ oraz $s_i \in \mathscr{C}(A_i, S)$ dla $i \in I$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i rodziny morfizmów $(f_i \in \mathscr{C}(A_i, X))_{i\in I}$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f \in \mathscr{C}(S, X)$, że $f_i = f \circ s_i$ dla $i \in I$.

Uwaga. Obiekt S zwykle oznaczamy przez $\coprod_{i\in I} A_i$. Jeżeli $I = \{1, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, to piszemy $A_1 + \cdots + A_n = \coprod_{i\in I} A_i$. Gdy zaś $n = 2$, to mówimy o *koprodukcie binarnym.*

Zadanie 8.14. Załóżmy, że $(A_i)_{i\in I}$ jest niepustą rodziną zbiorów niepustych. Wykaż, że:

(1) produktem rodziny $(A_i)_{i\in I}$ w Set jest iloczyn kartezjański $P = \prod_{i\in I} A_i$ razem z rodziną rzutowań $(p_i \colon P \to A_i)_{i\in I}$ danych jako $p_i(a) = a_i$ dla $a = (a_i)_{i\in I} \in P$.

(2) koproduktem rodziny $(A_i)_{i\in I}$ w Set jest suma rozłączna $S = \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}$ razem z rodziną zanurzeń $(s_i \colon A_i \to S)_{i\in I}$ zdefiniowanych jako $s_i(a) = (a, i)$ dla $a \in A_i$.

Opisz, o ile istnieją, produkty i koprodukty w kategorii Rel.

Zadanie 8.15. Niech K będzie ciałem. Opisz produkty i koprodukty w kategorii K-Vect. Uzasadnij, że gdy $(V_i)_{i\in I}$ jest nieskończoną rodziną niezerowych przestrzeni K-liniowych, to kanoniczny morfizm $\coprod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i$ nie jest izomorfizmem. Gdy $\operatorname{char} K \neq 2$, to czy w kategorii K-QSp produkty i koprodukty zawsze istnieją?

Zadanie 8.16. Załóżmy, że A, B są przemiennymi unitalnymi algebrami łączynymi nad ciałem K. Zdefiniujmy mnożenia w przestrzeniach liniowych $P = A \times B$ oraz $S = A \otimes B$ wzorami

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2) \qquad \text{oraz} \qquad (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$$

dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $b_1, b_2 \in B$. Niech $p_A \colon P \to A$ oraz $p_B \colon P \to B$ będą rzutowaniami, zaś odwzorowania $s_A \colon A \to S$ oraz $s_B \colon B \to S$ będą zdefiniowane jako $s_A(a) = a \otimes 1_B$ dla $a \in A$ oraz $s_B(b) = 1_A \otimes b$ dla $b \in B$. Pokaż, że trójki (P, p_A, p_B) oraz (S, s_A, s_B) są, odpowiednio, produktem oraz koproduktem algebr A, B w kategorii K-CAlg.

Uwaga. Produkty w kategorii K-Alg konstruujemy tak samo jak produkty w K-CAlg, za to koprodukty w K-Alg mają znacznie bardziej skomplikowaną postać.

Definicja. *Ekwalizatorem* (lub *jądrem różnicowym*) pary morfizmów $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$ nazywamy taką parę (E, j), że:

(1) $E \in |\mathscr{C}|$, zaś morfizm $j \in \mathscr{C}(E, A)$ spełnia $f \circ j = g \circ j$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i morfizmu $k \in \mathscr{C}(X, A)$ o własności $f \circ k = g \circ k$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $h \in \mathscr{C}(X, E)$, że $k = j \circ h$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "j"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Obiekt E zwykle oznaczamy przez $\mathrm{Eq}(f, g)$ lub $\mathrm{Ker}(f, g)$.

Definicja. *Koekwalizatorem* (lub *kojądrem różnicowym*) pary morfizmów $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$ nazywamy taką parę (C, p), że:

(1) $C \in |\mathscr{C}|$, zaś morfizm $p \in \mathscr{C}(B, C)$ spełnia $p \circ f = p \circ g$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i morfizmu $q \in \mathscr{C}(B, X)$ o własności $q \circ f = q \circ g$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $h \in \mathscr{C}(C, X)$, że $q = h \circ p$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dd, dashed, "h"] \\
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Obiekt C zwykle oznaczamy przez $\mathrm{Coeq}(f, g)$ lub $\mathrm{Coker}(f, g)$.

Zadanie 8.17. Załóżmy, że $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ jest kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Dowiedź, że:

(1) ewkalizatorem pary morfizmów $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ w kategorii $\mathscr{V}$ jest para (E, j), gdzie $E = \mathrm{Ker}(f - g)$, zaś $j \colon E \to U$ jest naturalnym zanurzeniem.

(2) koewkalizatorem pary morfizmów $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ w kategorii $\mathscr{V}$ jest para (C, p), gdzie $C = \mathrm{Coker}(f - g)$, zaś $p \colon V \to C$ jest naturalnym rzutowaniem.

Uwaga. Powyższa charakteryzacja powinna wyjaśnić dlaczego ekwalizator (odpowiednio koekwalizator) nazywamy także jądrem (odpowiednio kojądrem) różnicowym.

Definicja. *Pullbackiem* (lub *produktem włóknistym*) pary morfizmów $f \in \mathscr{C}(A, I)$ oraz $g \in \mathscr{C}(B, I)$ nazywamy taką trójkę (P, p_A, p_B), że:

(1) $P \in |\mathscr{C}|$, zaś morfizmy $p_A \in \mathscr{C}(P, A)$ oraz $p_B \in \mathscr{C}(P, B)$ spełniają $f \circ p_A = g \circ p_B$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i morfizmów $h_A \in \mathscr{C}(X, A)$ oraz $h_B \in \mathscr{C}(X, B)$ o własności $f \circ h_A = g \circ h_B$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $h \in \mathscr{C}(X, P)$, że $h_A = p_A \circ h$ oraz $h_B = p_B \circ h$ (patrz diagram poniżej).

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "h_B"] & \\
A \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B \arrow[dl, "g"] \\
 & I &
\end{tikzcd}
$$

Uwaga. Obiekt P oznaczamy czasami przez $A \times_I B$.

Definicja. *Pushoutem* (lub *koproduktem włóknistym*) pary morfizmów $f \in \mathscr{C}(I, A)$ oraz $g \in \mathscr{C}(I, B)$ nazywamy taką trójkę (S, s_A, s_B), że:

(1) $S \in |\mathscr{C}|$, zaś morfizmy $s_A \in \mathscr{C}(A, S)$ oraz $s_B \in \mathscr{C}(B, S)$ spełniają $s_A \circ f = s_B \circ g$,

(2) dla dowolnego obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ i morfizmów $h_A \in \mathscr{C}(A, X)$ oraz $h_B \in \mathscr{C}(B, X)$ o własności $h_A \circ f = h_B \circ g$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $h \in \mathscr{C}(S, X)$, że $h_A = h \circ s_A$ oraz $h_B = h \circ s_B$ (patrz diagram poniżej).

$$
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[r, "s_A"'] \arrow[dr, "h_A"'] & S \arrow[d, dashed, "h"] & B \arrow[l, "s_B"] \arrow[dl, "h_B"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
$$

Uwaga. Obiekt S oznaczamy czasami przez $A +_I B$.

Zadanie 8.18. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią. Udowodnij, że:

(1) gdy w $\mathscr{C}$ istnieją pushouty i obiekt początkowy, to istnieją też koprodukty binarne.

(2) gdy w $\mathscr{C}$ istnieją koprodukty binarne i koekwalizatory, to istnieją też pushouty.

(3) gdy w $\mathscr{C}$ istnieją produkty binarne i pullbacki, to istnieją też ekwalizatory.

(4) gdy w $\mathscr{C}$ istnieją koekwalizatory i pullbacki, to istnieją też ekwalizatory.

Zadanie 8.19. Wykaż, że pullbackiem w Set odwzorowań $f\colon A \to I$ oraz $g\colon B \to I$ jest zbiór

$$P = \{(a,b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$$

wraz z rzutowaniami $p_A\colon P \to A$ oraz $p_B\colon P \to B$ danymi wzorami $p_A(a,b) = a$ oraz $p_B(a,b) = b$ dla $(a,b) \in P$. Jak wyglądają pushouty w Set?

Uwaga. Ponieważ zbiory

$$f^{-1}(i) = \{a \in A : f(a) = i\} \qquad \text{oraz} \qquad g^{-1}(i) = \{b \in B : g(b) = i\}$$

nazywane są *włóknami* nad $i \in I$, to rozkład

$$P = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(i) \times g^{-1}(i)$$

na sumę (rozłączną) produktów włókien uzasadnia nazywanie pullbacku P produktem włóknistym.

Zadanie 8.20. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$. Pokaż, że pushoutem pary odwzorowań $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ oraz $g \in \operatorname{Hom}(U,W)$ w $\mathscr{V}$ jest przestrzeń ilorazowa

$$S = (V \oplus W)/N, \qquad \text{gdzie } N = \{(f(u), -g(u)) : u \in U\}$$

wraz z odwzorowaniami liniowymi $s_V\colon V \to S$ oraz $s_W\colon W \to S$ zdefiniowanymi jako $s_V(v) = (v,0) + N$ oraz $s_W(w) = (0,w) + N$ dla $v \in V$ oraz $w \in W$. Jak wyglądają pullbacki w kategorii $\mathscr{V}$?

Definicja. *Funktor* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ z kategorii $\mathscr{A}$ w kategorię $\mathscr{B}$ składa się z:

(1) odwzorowania

$$|\mathscr{A}| \ni A \mapsto F(A) \in |\mathscr{B}|$$

pomiędzy klasami obiektów kategorii $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{B}$,

(2) klasy odwzorowań

$$\mathscr{A}(A,B) \ni f \mapsto F(f) \in \mathscr{B}(F(A), F(B))$$

dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{A}|$.

Dodatkowo muszą być spełnione następujące aksjomaty:

(3) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dla dowolnych $f \in \mathscr{C}(A,B)$ oraz $g \in \mathscr{C}(B,C)$,

(4) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dla dowolnego $A \in |\mathscr{C}|$.

Uwaga. Jeśli $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{B}$ są kategoriami, to funktor $F\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ nazywamy *funktorem kontrawariantnym*. Gdy $f \in \mathscr{A}(A,B)$ oraz $g \in \mathscr{A}(B,C)$, to $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Dla odróżnienia „zwykłe” funktory nazywane są czasem *funktorami kowariantnymi*. Funktor $T\colon \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n \to \mathscr{B}$ określony na produkcie kategorii nazywamy *multifunktorem* (lub *funktorem wielu zmiennych*; gdy $n = 2$, to mówimy o *bifunktorze*). Istnieją też funktory *mieszane*. Przykładowo bifunktor $S\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ jest kontrawariantny ze względu na pierwszą „zmienną” i kowariantny ze względu na drugą „zmienną”.

Zadanie 8.21. Załóżmy, że $\mathscr{B}$ jest podkategorią kategorii $\mathscr{C}$. Niech

$$I_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(A) = A \qquad \text{oraz} \qquad I_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) = f$$

dla $A \in |\mathscr{B}|$ oraz $f \in \mathscr{B}(A, B)$. Uzasadnij, że $I_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ jest funktorem.

Uwaga. Funktor $I_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ nazywamy *zanurzeniem* kategorii $\mathscr{B}$ w kategorię $\mathscr{C}$. Gdy $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, to funktor $I_{\mathscr{C}} = I_{\mathscr{C}\mathscr{C}}$ nazywamy *funktorem identycznościowym* na kategorii $\mathscr{C}$.

Zadanie 8.22. Załóżmy, że $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ oraz $G \colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ są funktorami. Zdefiniujmy złożenie przyjmując

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)) \qquad \text{oraz} \qquad (G \circ F)(f) = G(F(f))$$

dla $A \in |\mathscr{A}|$ oraz $f \in \mathscr{A}(A, B)$. Sprawdź, że $G \circ F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ jest funktorem.

Zadanie 8.23. Załóżmy, że $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ oraz $G \colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ są funktorami. Niech $|\mathscr{S}|$ będzie klasą składającą się ze wszystkich trójek (A, f, B), gdzie $A \in |\mathscr{A}|$, $B \in |\mathscr{B}|$ oraz $f \in \mathscr{C}(F(A), G(B))$. Gdy $S = (A_1, f_1, B_1) \in |\mathscr{S}|$ oraz $T = (A_2, f_2, B_2) \in |\mathscr{S}|$, to zdefiniujmy

$$\mathscr{S}(S,T) = \{(\phi_1, \phi_2) \in \mathscr{A}(A_1, A_2) \times \mathscr{B}(B_1, B_2) : G(\phi_2) \circ f_1 = f_2 \circ F(\phi_1)\}$$

(patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "F(\phi_1)"] \arrow[d, "f_1"'] & F(A_2) \arrow[d, "f_2"] \\
G(B_1) \arrow[r, "G(\phi_2)"'] & G(B_2)
\end{tikzcd}$$

Dla $\Phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathscr{S}(S,T)$ oraz $\Psi = (\psi_1, \psi_2) \in \mathscr{S}(T,U)$ przyjmijmy

$$\Psi \circ \Phi = (\psi_1 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \phi_2) \in \mathscr{S}(S,U).$$

W końcu niech $1_S = (1_A, 1_B)$ dla $S = (A, f, B) \in |\mathscr{S}|$. Uzasadnij, że klasa $|\mathscr{S}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{S}(S,T)$ dla $S, T \in |\mathscr{S}|$, zdefiniowanym powyżej składaniem oraz 1_S dla $S \in |\mathscr{S}|$ jako morfizmami identycznościowymi tworzy kategorię.

Uwaga. Kategorię $\mathscr{S}$ oznaczamy zwykle przez $(F \downarrow G)$ lub (F, G) i nazywamy *comma kategorią* funktorów F oraz G (nazwa pochodzi od drugiego oznaczenia).

Zadanie 8.24. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią oraz $A \in |\mathscr{C}|$. Niech $|\mathscr{S}|$ będzie klasą złożoną ze wszystkich par (X, f), gdzie $X \in |\mathscr{C}|$ oraz $f \in \mathscr{C}(A, X)$. Gdy $P = (X, f) \in |\mathscr{S}|$ oraz $Q = (Y, g) \in |\mathscr{S}|$, to przyjmijmy

$$\mathscr{S}(P, Q) = \{\phi \in \mathscr{C}(X, Y) : \phi \circ f = g\}$$

(patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[rr, "\phi"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Dowiedź, że klasa $|\mathscr{S}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{S}(P,Q)$ dla $P,Q \in |\mathscr{S}|$, zwykłym składaniem morfizmów oraz morfizmami identycznościowymi $1_P = 1_X$ dla $P = (X,f) \in |\mathscr{S}|$ tworzy kategorię. Uzasadnij, że kategoria $\mathscr{S}$ może być traktowana jako szczególny przypadek comma kategorii.

Uwaga. Kategoria $\mathscr{S}$ jest zwykle oznaczana przez $\mathscr{C}/A$ lub $(A \downarrow \mathscr{C})$ i nazywana jest *płatem kategorii $\mathscr{C}$ nad A*. Dodajmy, że płat $(A \downarrow \mathscr{C})$ można identyfikowany z comma kategorią $(F \downarrow G)$, gdzie $F\colon \mathbf{1} \to \mathscr{C}$ (tu $\mathbf{1}$ to kategoria o jednym obiekcie $*$ oraz jednym morfizmie) jest funktorem wyznaczonym przez $F(*) = A$, natomiast $G = I_{\mathscr{C}}$.

Zadanie 8.25. Załóżmy, że K jest ciałem oraz $n \geqslant 0$. Niech $\mathscr{A} = K\text{-}\mathsf{Alg}$, $\mathscr{C} = K\text{-}\mathsf{CAlg}$ oraz $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$.

(1) Wykaż, że $\mathrm{T}^n\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, $\Sigma^n\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ oraz $\Lambda^n\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ są funktorami.

(2) Udowodnij, że $\mathrm{T}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{A}$, $\Sigma\colon \mathscr{V} \to \mathscr{C}$ oraz $\Lambda\colon \mathscr{V} \to \mathscr{A}$ także są funktorami.

Definicja. Klasę morfizmów $\phi = (\phi_A)_{A\in|\mathscr{A}|}$ kategorii $\mathscr{B}$ indeksowaną obiektami kategorii $\mathscr{A}$ nazywamy *transformacją naturalną* pomiędzy funktorami $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ (i piszemy $\phi\colon F \Rightarrow G$), gdy:

(1) $\phi_A \in \mathscr{B}(F(A), G(A))$ dla dowolnego $A \in |\mathscr{A}|$,

(2) $\phi_B \circ F(f) = G(f) \circ \phi_A$ dla dowolnego $f \in \mathscr{A}(A,B)$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\phi_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Definicja. Transformację naturalną $\phi\colon F \Rightarrow G$ pomiędzy funktorami $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ nazywamy *izomorfizmem naturalnym*, gdy $\phi_A \in \mathscr{B}(F(A), G(A))$ jest izomorfizmem dla dowolnego $A \in |\mathscr{A}|$. Gdy istnieje izomorfizm naturalny pomiędzy funktorami F oraz G, to mówimy, że funktory F oraz G są *naturalnie izomorficzne* i piszemy $F \cong G$.

Uwaga. Załóżmy, iż kategorie $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{B}$ mają tę własność, że dla dowolnych funktorów $F, G\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ klasa $\mathrm{Nat}(F,G)$ złożona z transformacji naturalnych postaci $\phi\colon F \Rightarrow G$ jest zbiorem. Wtedy można zdefiniować kategorię funktorów $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ (oznaczaną również jako $\mathrm{Fun}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ lub $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$). Obiektami kategorii $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$ są wszystkie funktory z $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$, zaś $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}(F,G) = \mathrm{Nat}(F,G)$ dla $F, G \in |\mathscr{B}^{\mathscr{A}}|$. Gdy $F, G, H \in |\mathscr{B}^{\mathscr{A}}|$, to dla transformacji naturalnych $\phi \in \mathrm{Nat}(F,G)$ oraz $\psi \in \mathrm{Nat}(G,H)$ złożenie $\psi \circ \phi \in \mathrm{Nat}(F,H)$ definiujemy formułą $(\psi \circ \phi)_A = \psi_A \circ \phi_A$ dla $A \in |\mathscr{A}|$. Ponadto $1_F = (1_{F(A)})_{A\in|\mathscr{A}|}$. W tej sytuacji transformacja naturalna $\phi\colon F \Rightarrow G$ jest izomorfizmem naturalnym dokładnie wtedy, gdy ϕ jest izomorfizmem w kategorii $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$.

Zadanie 8.26. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią oraz $A \in |\mathscr{C}|$. Dowiedź, że formuła

$$H(X) = \mathscr{C}(A,X) \qquad \text{oraz} \qquad H(f) = \mathscr{C}(A,f) = f_*,$$

gdzie dla $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ odwzorowanie $f_*\colon \mathscr{C}(A,X) \to \mathscr{C}(A,Y)$ zdefiniowane jest wzorem $f_*(u) = f \circ u$ dla $u \in \mathscr{C}(A,X)$, wyznacza funktor $H\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$.

Uwaga. Zdefiniowany powyżej funktor H oznaczamy zazwyczaj przez $\mathscr{C}(A,-)$. Ponadto każdy funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ naturalnie izomorficzny z funktorem $\mathscr{C}(A,-)$ dla pewnego $A \in |\mathscr{C}|$ nazywany jest *funktorem reprezentowalnym*. Wspomnijmy, że rozważa się także reprezentowalne funktory kontrawariantne $\mathscr{C}(-,A)$.

Zadanie 8.27 (lemat Yonedy)**.** Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią oraz $A \in |\mathscr{C}|$. Niech ponadto $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ będzie funktorem. Oznaczmy przez $\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),F)$ klasę transformacji naturalnych postaci $\phi\colon \mathscr{C}(A,-) \Rightarrow F$. Dla elementu $a \in F(A)$ oraz obiektu $X \in |\mathscr{C}|$ zdefiniujmy odwzorowanie $\phi(a)_X\colon \mathscr{C}(A,X) \to F(X)$ wzorem

$$\phi(a)_X(f) = F(f)(a)$$

dla $f \in \mathscr{C}(A,X)$. Pokaż, że $\phi(a) = (\phi(a)_X)_{X\in|\mathscr{C}|} \in \mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),F)$. Ponadto dowiedź, że odwzorowania

$$\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),F) \ni \phi \mapsto \phi_A(1_A) \in F(A)$$

oraz

$$F(A) \ni a \mapsto \phi(a) \in \mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),F)$$

są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami, czyli $\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),F) \cong F(A)$. W szczególności gdy $F = \mathscr{C}(B,-)$ dla pewnego $B \in |\mathscr{C}|$, to $\mathrm{Nat}(\mathscr{C}(A,-),\mathscr{C}(B,-)) \cong \mathscr{C}(B,A)$.

Zadanie 8.28. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią oraz $A,B \in |\mathscr{C}|$. Udowodnij, że funktory $\mathscr{C}(A,-)$ oraz $\mathscr{C}(B,-)$ są naturalnie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cong B$.

Zadanie 8.29. Załóżmy, że $\mathscr{C}$ jest kategorią, w której istnieją koprodukty. Przypuśćmy, że $(A_i)_{i\in I}$ jest rodziną obiektów kategorii $\mathscr{C}$ indeksowaną niepustym zbiorem I. Określmy funktor $F\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ kładąc

$$F(X) = \prod_{i\in I} \mathscr{C}(A_i,X) \qquad \text{oraz} \qquad F(f)(u) = (f \circ u_i)_{i\in I}$$

dla $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ oraz $u = (u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{C}(A_i,X)$ (uzasadnij, że F rzeczywiście jest funktorem). Dowiedź, że funktor F jest reprezentowalny. Czym jest obiekt $S \in |\mathscr{C}|$, dla którego $F \cong \mathscr{C}(S,-)$?

Zadanie 8.30. Załóżmy, że $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ jest kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Dla $U,V \in |\mathscr{V}|$ zdefiniujmy funktor $F\colon \mathscr{V} \to \mathsf{Set}$ za pomocą wzoru

$$F(X) = \mathrm{Hom}(U,V;X) \qquad \text{oraz} \qquad F(f) = \mathrm{Hom}(U,V;f) = f_*,$$

gdzie dla $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ odwzorowanie $f_*\colon \mathrm{Hom}(U,V;X) \to \mathrm{Hom}(U,V;Y)$ określone jest jako $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$ dla $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V;X)$ (sprawdź, że F istotnie jest funktorem). Udowodnij, że funktor F jest reprezentowalny. Czym jest obiekt $T \in |\mathscr{V}|$, dla którego $F \cong \mathscr{V}(T,-)$?

Zadanie 8.31. Niech K będzie ciałem oraz $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$. Przypomnijmy, że dla $V \in |\mathscr{V}|$ przestrzeń dualna V^* to $\mathrm{Hom}(V,K)$, natomiast dla $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$ odwzorowanie dualne $f^* \in \mathrm{Hom}(V^*,U^*)$ dane jest wzorem $f^*(\phi) = \phi \circ f$ dla $\phi \in V^*$. Zdefiniujmy *funktor przestrzeni bidualnej* $B\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ przyjmując

$$B(V) = V^{**} = (V^*)^* \qquad \text{oraz} \qquad B(f) = f^{**} = (f^*)^*$$

(pokaż, że B rzeczywiście jest funktorem). Wykaż, że klasa $\sigma = (\sigma_V)_{V \in |\mathscr{V}|}$ odwzorowań liniowych $\sigma_V \colon V \to V^{**}$ zdefiniowanych jako $\sigma_V(v)(\phi) = \phi(v)$ dla $v \in V$ oraz $\phi \in V^*$ jest transformacją naturalną $\sigma \colon I_{\mathscr{V}} \Rightarrow B$.

Zadanie 8.32. Przypuśćmy, że $f \colon K \to L$ jest *morfizmem ciał*, tzn. f jest niezerowym odwzorowaniem pomiędzy ciałami K, L spełniającym

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{oraz} \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

dla $x, y \in K$. Jeżeli $A = [a_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(K)$, to macierz $[f(a_{ij})] \in \mathrm{M}_n(L)$ jest odwracalna (uzasadnij to). Zatem f indukuje morfizm grup $\mathrm{GL}_n(f) \colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(L)$ (sprawdź to). Odwzorowanie f indukuje też morfizm grup $f^\times \colon K^\times \to L^\times$. W takim razie gdy $\mathscr{F}$ jest kategorią ciał, zaś $\mathscr{G}$ jest kategorią grup (opisz te kategorie), to możemy określić funktory $G, U \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ wzorami

$$\begin{aligned} G(K) &= \mathrm{GL}_n(K) &\quad \text{oraz} \quad& G(f) = \mathrm{GL}_n(f), \\ U(K) &= K^\times &\quad \text{oraz} \quad& U(f) = f^\times \end{aligned}$$

(uzasadnij, że G oraz U rzeczywiście są funktorami). W końcu gdy $K \in |\mathscr{F}|$, to określmy odwzorowanie $\phi_K \colon \mathrm{GL}_n(K) \to K^\times$ wzorem $\phi_K(A) = \det A$ dla $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wykaż, że klasa morfizmów $\phi = (\phi_K)_{K \in |\mathscr{F}|}$ jest transformacją naturalną $\phi \colon G \Rightarrow U$.

Wszystkie wprowadzone do tej pory konstrukcje (tj. obiekty początkowe i końcowe, produkty i koprodukty, ekwalizatory i koekwalizatory, pullbacki i pushouty), to szczególne przypadki tzw. granic i kogranic funktorów.

Definicja. *Stożkiem* nad funktorem $F \colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ nazywamy parę $(X, (f_I)_{I \in |\mathscr{I}|})$, gdzie:

(1) $X \in |\mathscr{C}|$ (*wierzchołek* stożka) oraz $f_I \in \mathscr{C}(X, F(I))$ dla $I \in |\mathscr{I}|$,

(2) $F(i) \circ f_I = f_J$ dla dowolnego $i \in \mathscr{I}(I, J)$.

Definicja. *Granicą* funktora $F \colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ nazywamy *uniwersalny stożek* nad F, tzn. taki stożek $(L, (p_I)_{I \in |\mathscr{I}|})$ nad F, że dla dowolnego stożka $(X, (f_I)_{I \in |\mathscr{I}|})$ nad F istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f \in \mathscr{C}(X, L)$, że $f_I = p_I \circ f$ dla dowolnego $I \in |\mathscr{I}|$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_I"'] \arrow[ddr, bend left, "f_J"] & \\
& L \arrow[dl, "p_I"'] \arrow[dr, "p_J"] & \\
F(I) \arrow[rr, "F(i)"'] & & F(J)
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Obiekt L oznaczamy zwykle przez $\lim F$ lub $\varprojlim F$. Granice funktorów nazywane bywają granicami odwrotnymi lub projektywnymi. Ponadto stożek nad F o wierzchołku $X \in |\mathscr{C}|$ można identyfikować z transformacją naturalną $\Delta_X \Rightarrow F$, gdzie *funktor stały* $\Delta_X \colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ definiujemy jako $\Delta_X(I) = X$ dla $I \in |\mathscr{I}|$ oraz $\Delta_X(i) = 1_X$ dla $i \in \mathscr{I}(I, J)$.

Definicja. *Kostożkiem* nad funktorem $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ nazywamy parę $(X, (f_I)_{I\in|\mathscr{I}|})$, gdzie:

(1) $X \in |\mathscr{C}|$ (*wierzchołek* kostożka) oraz $f_I \in \mathscr{C}(F(I), X)$ dla $I \in |\mathscr{I}|$,

(2) $f_I = f_J \circ F(i)$ dla dowolnego $i \in \mathscr{I}(I, J)$.

Definicja. *Kogranicą* funktora $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ nazywamy *uniwersalny kostożek* nad F, tzn. taki kostożek $(C, (s_I)_{I\in|\mathscr{I}|})$ nad F, że dla dowolnego kostożka $(X, (f_I)_{I\in|\mathscr{I}|})$ nad F istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f \in \mathscr{C}(C, X)$, że $f_I = f \circ s_I$ dla dowolnego $I \in |\mathscr{I}|$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
F(I) \arrow[rr, "F(i)"] \arrow[dr, "s_I"'] \arrow[ddr, bend right, "f_I"'] & & F(J) \arrow[dl, "s_J"] \arrow[ddl, bend left, "f_J"] \\
& C \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Uwaga. Obiekt C oznaczamy zazwyczaj przez $\operatorname{colim} F$ lub $\varinjlim F$. Kogranice funktorów nazywane bywają także granicami prostymi lub injektywnymi. Ponadto kostożek nad F o wierzchołku $X \in |\mathscr{C}|$ można identyfikować z transformacją naturalną $F \Rightarrow \Delta_X$.

Zadanie 8.33. Wykaż, że wprowadzone wcześniej konstrukcje (tj. obiekty początkowe i końcowe, produkty i koprodukty, ekwalizatory i koekwalizatory, pullbacki i pushouty) rzeczywiście są granicami lub kogranicami odpowiednio zdefiniowanych funktorów. Opisz (np. graficznie) kategorie, na których określone są te funktory.

Definicja. Mówimy, że kategorie $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{B}$ są *równoważne*, gdy istnieją takie funktory $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ oraz $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ (nazywane *równoważnościami kategorii*), że $G \circ F \cong I_{\mathscr{A}}$ oraz $F \circ G \cong I_{\mathscr{B}}$.

Definicja. Mówimy, że funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ jest:

(1) *wierny*, gdy odwzorowanie $\mathscr{A}(A, B) \ni f \mapsto F(f) \in \mathscr{B}(F(A), F(B))$ indukowane przez F jest injektywne dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{A}|$.

(2) *pełny*, gdy odwzorowanie $\mathscr{A}(A, B) \ni f \mapsto F(f) \in \mathscr{B}(F(A), F(B))$ indukowane przez F jest surjektywne dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{A}|$.

(3) *istotnie surjektywny* (lub *właściwie surjektywny* lub *gęsty*), gdy dla dowolnego obiektu $B \in |\mathscr{B}|$ istnieje taki obiekt $A \in |\mathscr{A}|$, że $B \cong F(A)$.

Zadanie 8.34. Udowodnij, że funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ zadaje równoważność kategorii $\mathscr{A}$ oraz $\mathscr{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy F jest wierny, pełny i istotnie surjektywny.

Definicja. Mówimy, że funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ jest *lewym funktorem sprzężonym* funktora $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ oraz, że G jest *prawym funktorem sprzężonym* funktora F (piszemy wtedy $F \dashv G$), gdy bifunktory $\mathscr{B}(F-, -)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathsf{Set}$ oraz $\mathscr{A}(-, G-)\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{B} \to \mathsf{Set}$ są naturalnie izomorficzne.

Zadanie 8.35. Niech $\mathscr{I}$ oraz $\mathscr{C}$ będą kategoriami. Zdefiniujmy funktor $\Delta\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathscr{I}}$ deklarując, że $\Delta(X) = \Delta_X$ dla $X \in |\mathscr{C}|$, gdzie $\Delta_X : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ jest funktorem stałym, zaś $\Delta(f)\colon \Delta_A \Rightarrow \Delta_B$ dla $f \in \mathscr{C}(A, B)$ jest transformacją naturalną, której I-ta składowa równa jest f dla dowolnego $I \in |\mathscr{I}|$. Jeżeli każdy funktor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ posiada granicę, to można wtedy zdefiniować funktor $\lim\colon \mathscr{C}^{\mathscr{I}} \to \mathscr{C}$ (opisz szczegółowo tę konstrukcję). Wykaż, że przy powyższych założeniach funktor lim jest prawym funktorem sprzężonym funktora Δ. W szczególności

$$\mathscr{C}(X, \lim F) \cong \mathrm{Nat}(\Delta_X, F)$$

dla dowolnego $X \in |\mathscr{C}|$. Spróbuj, przy odpowiednich założeniach dotyczących kategorii $\mathscr{I}$ oraz $\mathscr{C}$, opisać lewy funktor sprzężony funktora Δ.

Definicja. Mówimy, że kategoria $\mathscr{C}$ jest *mała*, gdy klasa jej obiektów $|\mathscr{C}|$ jest zbiorem. Małe kategorie tworzą *kategorię małych kategorii* Cat. Obiektami Cat są małe kategorie, morfizmami Cat są funktory, zaś kompozycja w Cat to składanie funktorów.

Definicja. Mówimy, że funktor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *zachowuje granice*, jeśli dla dowolnej małej kategorii $\mathscr{I}$ oraz dowolnego funktora $G\colon \mathscr{I} \to \mathscr{A}$, gdy $(L, (p_I)_{I\in|\mathscr{I}|})$ jest granicą funktora G, to $(F(L), (F(p_I))_{I\in|\mathscr{I}|})$ jest granicą funktora $F \circ G$ (w skrócie $F(\lim G) \cong \lim(F \circ G)$).

Uwaga. Podobnie definiujemy pojęcie zachowywania kogranic przez funktor.

Zadanie 8.36. Załóżmy, że $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ są kategoriami oraz $A \in |\mathscr{C}|$. Udowodnij, że:

(1) jeśli $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ jest prawym funktorem sprzężonym, to G zachowuje granice.

(2) funktor reprezentowalny $\mathscr{C}(A, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ zachowuje granice.

Zadanie 8.37. Załóżmy, że K jest ciałem. Jeśli X jest zbiorem, to

$$KX = \{\phi \in \mathrm{Map}(X, K) : |X \setminus \phi^{-1}(0)| < \infty\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathrm{Map}(X, K)$. Zdefiniujmy *funktor wolny* $F\colon \mathsf{Set} \to \mathscr{V}$ oraz *funktor zapominania* $U\colon \mathscr{V} \to \mathsf{Set}$ wzorami

$$\begin{aligned} F(X) &= KX \quad &&\text{oraz} \quad &F(u) &= \overline{u}, \\ U(V) &= V \quad &&\text{oraz} \quad &U(f) &= f, \end{aligned}$$

gdzie dla $u \in \mathrm{Map}(X, Y)$ odwzorowanie liniowe $\overline{u}\colon KX \to KY$ dane jest wzorem

$$\overline{u}(\phi)(y) = \begin{cases} \sum_{x\in u^{-1}(y)} \phi(x) & \text{gdy } u^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{gdy } u^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

dla $\phi \in KX$ oraz $y \in Y$ (sprawdź, że F oraz G rzeczywiście są funktorami). Dowiedź, że $F \dashv U$.

Uwaga. Bazą przestrzeni liniowej KX, oznaczanej też jako $K^{(X)}$, jest zbiór $\{e_x : x \in X\}$ (równoliczny z X), gdzie $e_x(y) = \delta_{xy}$ dla $x, y \in X$. Zatem $KX = K^{(X)} = \bigoplus_{x\in X} Ke_x$. Zauważmy ponadto, że

$$\phi = \sum_{x\in X} \phi(x)e_x$$

dla dowolnego $\phi \in KX$.

Zadanie 8.38. Załóżmy, że $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ jest kategorią przestrzeni wektorowych nad ciałem K. Niech $V \in |\mathscr{V}|$. Zdefiniujmy funktory $T, H \colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ wzorami

$$\begin{aligned} T(X) &= X \otimes V && \text{oraz} && T(f) = f \otimes \mathrm{id}_V, \\ H(X) &= \mathrm{Hom}(V, X) && \text{oraz} && H(f) = \mathrm{Hom}(V, f) = f_*, \end{aligned}$$

gdzie dla $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ odwzorowanie liniowe $f_* \colon \mathrm{Hom}(V, X) \to \mathrm{Hom}(V, Y)$ zadane jest wzorem $f_*(u) = f \circ u$ dla $u \in \mathrm{Hom}(V, X)$ (uzasadnij, że T oraz H rzeczywiście są funktorami). Wykaż, że $T \dashv H$.

Zadanie 8.39. Niech K będzie ciałem oraz $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Wykaż, że odwzorowanie $\mathrm{T}(f) \colon \mathrm{T}(U) \to \mathrm{T}(V)$ indukowane przez odwzorowania $\mathrm{T}^n f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}^n U, \mathrm{T}^n V)$ dla $n \geqslant 0$ jest morfizmem unitalnych K-algebr łącznych. Oznaczmy $\mathscr{A} = K\text{-}\mathsf{Alg}$ oraz $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ i rozważmy funktory $T \colon \mathscr{V} \to \mathscr{A}$ oraz $U \colon \mathscr{A} \to \mathscr{V}$ zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} T(V) &= \mathrm{T}(V) && \text{oraz} && T(f) = \mathrm{T}(f), \\ U(A) &= A && \text{oraz} && U(\phi) = \phi. \end{aligned}$$

Udowodnij, że $T \dashv U$.

Zadanie 8.40. *Kołczanem* nazywamy czwórkę $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, gdzie Q_0, Q_1 to dowolne zbiory (rozumiane jako zbiory *wierzchołków* i *krawędzi*, odpowiednio), zaś $s, t \colon Q_1 \to Q_0$ to dowolne odwzorowania (rozumiane jako odwzorowania przyporządkowujące krawędzi $\alpha \in Q_1$ jej *źródło* (lub *początek*) $s(\alpha) \in Q_0$ oraz jej *cel* (lub *koniec*) $t(\alpha) \in Q_0$). Morfizm kołczanów $P = (P_0, P_1, s_P, t_P)$ oraz $Q = (Q_0, Q_1, s_Q, t_Q)$, to para $f = (f_0, f_1)$, gdzie $f_0 \colon P_0 \to Q_0$ oraz $f_1 \colon P_1 \to Q_1$ są takimi odwzorowaniami, że $f_0 \circ s_P = s_Q \circ f_1$ oraz $f_0 \circ t_P = t_Q \circ f_1$ (patrz diagramy poniżej).

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "s_P"'] & Q_1 \arrow[d, "s_Q"] \\ P_0 \arrow[r, "f_0"'] & Q_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_P"'] & Q_1 \arrow[d, "t_Q"] \\ P_0 \arrow[r, "f_0"'] & Q_0 \end{tikzcd}$$

(1) Uzasadnij, że klasa kołczanów wraz ze zdefiniowanymi morfizmami kołczanów oraz naturalnie określonym składaniem i morfizmami identycznościowymi (doprecyzuj znaczenie tego stwierdzenia) tworzy *kategorię kołczanów* oznaczaną przez Quiv.

(2) Udowodnij, że kategoria Quiv jest równoważna z kategorią funktorów $\mathsf{Set}^{\mathscr{K}}$, gdzie $\mathscr{K}$ to *kategoria Kroneckera* (znana też jako *kołczan wolny* czy *kołczan Kroneckera*; patrz diagram poniżej) o dwóch obiektach oraz czterech morfizmach.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

(3) Opisz, o ile istnieją, obiekty początkowe, końcowe i zerowe, produkty i koprodukty, ekwalizatory i koekwalizatory oraz pullbacki i pushouty w kategorii Quiv.

Zadanie 8.41. Niech $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ będzie kołczanem. Zdefiniujmy *kategorię wolną* $\mathscr{C}_Q$ *nad* Q w następujący sposób. Obiektami kategorii $\mathscr{C}_Q$ są wierzchołki kołczanu Q, czyli $|\mathscr{C}_Q| = Q_0$. Morfizmem pomiędzy obiektami $A \in |\mathscr{C}_Q|$ oraz $B \in |\mathscr{C}_Q|$ nazywamy każdą parę (X, α), gdzie $X = (X_0, \ldots, X_n) \in Q_0^{n+1}$ oraz $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Q_1^n$ dla pewnego $n \geqslant 0$ (gdy $n = 0$, to α rozumiemy jako ciąg pusty) spełniającą:

$$s(\alpha_1) = X_0 = A, \qquad t(\alpha_i) = X_i = s(\alpha_{i+1}) \quad (1 \leqslant i < n), \qquad t(\alpha_n) = X_n = B.$$

Morfizm $(X, \alpha) \in \mathscr{C}_Q(A, B)$ można więc identyfikować z drogą w Q postaci

$$A = X_0 \xrightarrow{\alpha_1} X_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} X_n = B.$$

Jeżeli $(X, \alpha) \in \mathscr{C}_Q(A, B)$ oraz $(Y, \beta) \in \mathscr{C}_Q(B, C)$ dla pewnych $A, B, C \in |\mathscr{C}_Q|$, gdzie $X = (X_0, \ldots, X_n)$ i $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $Y = (Y_0, \ldots, Y_m)$ i $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ dla pewnych $n, m \geqslant 0$, to złożenie definiujemy jako

$$(Y, \beta) \circ (X, \alpha) = (Z, \gamma) \in \mathscr{C}_Q(A, C),$$

gdzie

$$Z = (X_0, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) \qquad \text{oraz} \qquad \gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Odwrotnie, gdy $\mathscr{C}$ jest małą kategorią, to określmy kołczan $Q_{\mathscr{C}} = (Q_0, Q_1, s, t)$ kładąc:

$$Q_0 = \operatorname{Obj} \mathscr{C}, \qquad Q_1 = \operatorname{Mor} \mathscr{C}, \qquad s(f) = \operatorname{Dom} f, \qquad t(f) = \operatorname{Cod} f$$

dla $f \in Q_1$.

(1) Uzasadnij, że gdy Q jest kołczanem, to $\mathscr{C}_Q$ rzeczywiście jest małą kategorią. Czym są morfizmy identycznościowe?

(2) Sprawdź, że gdy $f = (f_0, f_1)\colon P \to Q$ jest morfizmem kołczanów, to formuły

$$f_*(A) = f_0(A) \qquad \text{oraz} \qquad f_*(X, \alpha) = (f_0(X), f_1(\alpha))$$

dla $A \in |\mathscr{C}_P|$ oraz $(X, \alpha) \in \mathscr{C}_P(A, B)$, gdzie $f_0(X) = (f_0(X_0), \ldots, f_0(X_n))$ gdy $X = (X_0, \ldots, X_n)$, natomiast $f_1(\alpha) = (f_1(\alpha_1), \ldots, f_1(\alpha_n))$ gdy $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definiują funktor $f_*\colon \mathscr{C}_P \to \mathscr{C}_Q$.

(3) Sprawdź, że gdy $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ jest funktorem pomiędzy małymi kategoriami, to para $T_* = (T_0, T_1)\colon Q_{\mathscr{A}} \to Q_{\mathscr{B}}$, gdzie

$$T_0(A) = T(A) \qquad \text{oraz} \qquad T_1(f) = T(f)$$

dla $A \in |\mathscr{A}|$ oraz $f \in \mathscr{A}(A, B)$, jest morfizmem kołczanów.

(4) Zdefiniujmy funktory $F\colon \mathsf{Quiv} \to \mathsf{Cat}$ oraz $U\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Quiv}$ przyjmując

$$\begin{aligned} F(Q) &= \mathscr{C}_Q \qquad \text{oraz} \qquad F(f) = f_*, \\ U(\mathscr{C}) &= Q_{\mathscr{C}} \qquad \text{oraz} \qquad U(T) = T_* \end{aligned}$$

(uzasadnij, że F oraz U rzeczywiście są funktorami). Wykaż, że $F \dashv U$.

Zadanie 8.42. Niech K będzie ciałem. Parę (U, ϕ) nazywamy *reprezentacją* (K-liniową) kołczanu $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, gdy $U = (U_A)_{A \in Q_0}$ jest rodziną przestrzeni K-liniowych, zaś $\phi = (\phi_\alpha \colon U_{s(\alpha)} \to U_{t(\alpha)})_{\alpha \in Q_1}$ jest rodziną odwzorowań liniowych. Mówimy, że rodzina odwzorowań liniowych $f = (f_A \colon U_A \to V_A)_{A \in Q_0}$ jest morfizmem reprezentacji (U, ϕ) oraz (V, ψ) kołczanu Q, gdy $f_{t(\alpha)} \circ \phi_\alpha = \psi_\alpha \circ f_{s(\alpha)}$ dla dowolnego $\alpha \in Q_1$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} U_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_{s(\alpha)}"] \arrow[d, "\phi_\alpha"'] & V_{s(\alpha)} \arrow[d, "\psi_\alpha"] \\ U_{t(\alpha)} \arrow[r, "f_{t(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

(1) Dowiedź, że klasa reprezentacji (K-liniowych) kołczanu Q wraz ze zdefiniowanymi morfizmami reprezentacji kołczanu Q i naturalnie określonym składaniem oraz morfizmami identycznościowymi (doprecyzuj znaczenie tego stwierdzenia) tworzy *kategorię reprezentacji kołczanu* Q oznaczaną przez $\mathrm{Rep}_K(Q)$.

(2) Udowodnij, że kategoria $\mathrm{Rep}_K(Q)$ jest równoważna z kategorią $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}_Q, K\text{-}\mathsf{Vect})$. Innymi słowy na reprezentację (K-liniową) kołczanu Q można patrzeć jako na funktor $\mathscr{C}_Q \to K\text{-}\mathsf{Vect}$, natomiast morfizmy reprezentacji kołczanu Q odpowiadają transformacjom naturalnym pomiędzy funktorami $\mathscr{C}_Q \to K\text{-}\mathsf{Vect}$.

(3) Opisz, o ile istnieją, obiekty początkowe, końcowe i zerowe, produkty i koprodukty, ekwalizatory i koekwalizatory oraz pullbacki i pushouty w kategorii $\mathrm{Rep}_K(Q)$.

Definicja. *Kategoria monoidalna* (lub *tensorowa*) $\mathfrak{V}$ składa się z:

(1) kategorii $\mathscr{V}$,

(2) bifunktora $\otimes \colon \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ (zwanego *produktem monoidalnym* lub *tensorowym*),

(3) obiektu $I \in |\mathscr{V}|$ (zwanego *jednością monoidalną* lub *tensorową*),

(4) naturalnego izomorfizmu $\alpha \colon - \otimes (- \otimes -) \Rightarrow (- \otimes -) \otimes -$,

(5) naturalnego izomorfizu $\lambda \colon I \otimes - \Rightarrow I_{\mathscr{V}}$,

(6) naturalnego izomorfizu $\rho \colon - \otimes I \Rightarrow I_{\mathscr{V}}$.

Dodatkowo diagramy

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{(A\otimes B)CD}"] & \\ A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[ur, "\alpha_{AB(C\otimes D)}"] \arrow[d, "1_A \otimes \alpha_{BCD}"'] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A(B\otimes C)D}"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha_{ABC} \otimes 1_D"'] \end{tikzcd}$$

oraz

$$\begin{tikzcd} A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{AIB}"] \arrow[dr, "1_A \otimes \lambda_B"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\rho_A \otimes 1_B"] \\ & A \otimes B & \end{tikzcd}$$

muszą być przemienne dla dowolnych $A, B, C, D \in |\mathscr{V}|$.

Zadanie 8.43. Załóżmy, że $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ jest kategorią monoidalną. Wykaż, że

$$\lambda_{A\otimes B} = (\lambda_A \otimes 1_B) \circ \alpha_{IAB} \qquad \text{oraz} \qquad \rho_{A\otimes B} = (1_A \otimes \rho_B) \circ \alpha^{-1}_{ABI}$$

dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{V}|$. Wywnioskuj stąd, że $\lambda_I = \rho_I$.

Zadanie 8.44. Pokaż, że gdy w kategorii $\mathscr{C}$ istnieją skończone produkty (odpowiednio koprodukty), to $\mathscr{C}$ można wyposażyć w strukturę kategorii monoidalnej z produktem monoidalnym $\otimes = \times$ (odpowiednio $\otimes = +$). Czym są wtedy jedność monoidalna I oraz naturalne izomorfizmy α, λ, ρ?

Zadanie 8.45. Udowodnij, że kategoria $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$ przestrzeni liniowych nad ciałem K wraz z iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych jako produktem monoidalnym, jednością monoidalną $I = K$ oraz naturalnymi izomorfizmami α, λ, ρ o składowych:

$$\alpha_{UVW} \colon U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W, \qquad \lambda_V \colon K \otimes V \to V, \qquad \rho_V \colon V \otimes K \to V$$

dla $U, V, W \in |\mathscr{V}|$, zdefiniowanych na tensorach prostych jako

$$\alpha_{UVW}(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w, \qquad \lambda_V(a \otimes v) = \rho_V(v \otimes a) = av$$

dla $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ oraz $a \in K$ (uzasadnij poprawność powyższych definicji), jest kategorią monoidalną.

Definicja. Załóżmy, że $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ jest kategorią monoidalną. Mówimy, że trójka (A, μ, η) jest *monoidem* w $\mathfrak{V}$, gdy:

(1) $A \in |\mathscr{V}|$, $\mu \in \mathscr{V}(A \otimes A, A)$ oraz $\eta \in \mathscr{V}(I, A)$ (morfizm μ nazywamy *mnożeniem*, zaś morfizm η nazywamy *jednością*),

(2) diagramy

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[rr, "\alpha_{AAA}"] \arrow[d, "1_A \otimes \mu"'] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu \otimes 1_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

oraz

$$\begin{tikzcd} I \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes 1_A"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes I \arrow[l, "1_A \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\rho_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

są przemienne.

Powiemy, że $f \in \mathscr{V}(A,B)$ jest *morfizmem monoidów* (A,μ_A,η_A) oraz (B,μ_B,η_B), gdy zachodzi $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ oraz $f \circ \eta_A = \eta_B$ (patrz diagramy poniżej).

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

Uwaga. Podobnie definiujemy *komonoidy* w $\mathfrak{V}$ oraz ich morfizmy. Można też powiedzieć, że trójka (C,Δ,ε) jest komonoidem w $\mathfrak{V}$, gdy jest ona monoidem w $\mathfrak{V}^{\mathrm{op}}$ (doprecyzuj to stwierdzenie i narysuj odpowiednie diagramy). Morfizm $\Delta \in \mathscr{V}(C, C \otimes C)$ nazywamy *komnożeniem*, natomiast morfizm $\varepsilon \in \mathscr{V}(C,I)$ nazywamy *kojednością*.

Zadanie 8.46. Niech K będzie ciałem. Opisz monoidy oraz komonoidy w kategoriach monoidalnych:

(1) Set z iloczynem kartezjańskim zbiorów jako produktem monoidalnym.
(2) Cat z produktem małych kategorii jako produktem monoidalnym.
(3) K-Vect z iloczynem tensorowym przestrzeni jako produktem monoidalnym.
(4) K-CAlg z iloczynem tensorowym algebr jako produktem monoidalnym.

Definicja. Niech $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ będzie kategorią monoidalną, zaś $\mathcal{A} = (A,\mu,\eta)$ będzie monoidem w $\mathfrak{V}$. Mówimy, że para (X,σ) jest (*lewostronnym*) *$\mathcal{A}$-modułem*, gdy:

(1) $X \in |\mathscr{V}|$ oraz $\sigma \in \mathscr{V}(A \otimes X, X)$ (morfizm σ nazywamy *działaniem* $\mathcal{A}$ na X),
(2) diagramy

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes X) \arrow[rr, "\alpha_{AAX}"] \arrow[d, "1_A \otimes \sigma"'] & & (A \otimes A) \otimes X \arrow[d, "\mu \otimes 1_X"] \\ A \otimes X \arrow[r, "\sigma"'] & X & A \otimes X \arrow[l, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

oraz

$$\begin{tikzcd} I \otimes X \arrow[rr, "\eta \otimes 1_X"] \arrow[dr, "\lambda_X"'] & & A \otimes X \arrow[dl, "\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

są przemienne.

Powiemy, że $f \in \mathscr{V}(X,Y)$ jest *morfizmem $\mathcal{A}$-modułów* (X,σ_X) oraz (Y,σ_Y), gdy zachodzi $f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ (1_A \otimes f)$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "1_A \otimes f"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\sigma_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Uwaga. Analogicznie można zdefiniować (lewostronne) moduły nad komonoidami w $\mathfrak{V}$. Można również wprowadzić komoduły nad monoidami i komonoidami w $\mathfrak{V}$ (zachęcam do narysowania stosownych diagramów). W końcu wszystkie te pojęcia mają prawostronne odpowiedniki.

Zadanie 8.47. Niech $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ będzie kategorią monoidalną. Załóżmy, że $\mathcal{A} = (A, \mu, \eta)$ jest monoidem w $\mathfrak{V}$. Niech $|\mathscr{M}|$ będzie klasą wszystkich (lewostronnych) $\mathcal{A}$-modułów. Gdy $\mathcal{X} = (X, \sigma) \in |\mathscr{M}|$ oraz $\mathcal{Y} = (Y, \tau) \in |\mathscr{M}|$, to zdefiniujmy

$$\mathscr{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{f \in \mathscr{V}(X, Y) : f \text{ jest morfizmem } \mathcal{A}\text{-modułów}\}.$$

(1) Uzasadnij, że gdy $f \in \mathscr{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ oraz $g \in \mathscr{M}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, to $g \circ f \in \mathscr{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$.

(2) Dowiedź, że klasa $|\mathscr{M}|$ wraz ze zbiorami $\mathscr{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dla $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in |\mathscr{M}|$, składaniem morfizmów $\mathcal{A}$-modułów i morfizmami identycznościowymi 1_X dla $X \in |\mathscr{V}|$ tworzy *kategorię* (*lewostronnych*) *$\mathcal{A}$-modułów* $\mathscr{M} = \mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}$.

(3) Opisz kategorię $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}$ w przypadku gdy $\mathscr{V} = \mathsf{Set}$, natomiast $\otimes$ jest zwykłym iloczynem kartezjańskim.

(4) Opisz kategorię $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}$ w przypadku gdy $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$, gdzie K jest ciałem, zaś $\otimes$ jest zwykłym iloczynem tensorowym.

Zadanie 8.48. Załóżmy, że $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ jest kategorią monoidalną, w której istnieją koekwalizatory. Niech $\mathcal{A} = (A, \mu, \eta)$ będzie monoidem w $\mathfrak{V}$. Jeśli $\mathcal{X} = (X, \sigma)$ jest prawostronnym $\mathcal{A}$-modułem, zaś $\mathcal{Y} = (Y, \tau)$ jest lewostronnym $\mathcal{A}$-modułem, to *produkt tensorowy* $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Y} \in |\mathscr{V}|$ określamy jako koekwalizator morfizmów $(\sigma \otimes 1_Y) \circ \alpha_{XAY}$ oraz $1_X \otimes \tau$ (patrz diagram poniżej).

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (A \otimes Y) \arrow[dd, "\alpha_{XAY}"'] \arrow[dr, "1_X \otimes \tau"] & & \\
 & X \otimes Y \arrow[r] & \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Y} \\
(X \otimes A) \otimes Y \arrow[ur, "\sigma \otimes 1_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

(1) Załóżmy, że $\mathcal{X}_1 = (X_1, \sigma_1)$ oraz $\mathcal{X}_2 = (X_2, \sigma_2)$ są prawostronnymi $\mathcal{A}$-modułami, zaś $\mathcal{Y}_1 = (Y_1, \tau_1)$ oraz $\mathcal{Y}_2 = (Y_2, \tau_2)$ są lewostronnymi $\mathcal{A}$-modułami. Wykaż, że gdy $f \in \mathscr{V}(X_1, X_2)$ jest morfizmem $\mathcal{A}$-modułów $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, natomiast $g \in \mathscr{V}(Y_1, Y_2)$ jest morfizmem $\mathcal{A}$-modułów $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, to morfizm $f \otimes g \in \mathscr{V}(X_1 \otimes Y_1, X_2 \otimes Y_2)$ indukuje morfizm $f \otimes_{\mathcal{A}} g \in \mathscr{V}(\mathcal{X}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{Y}_2)$.

(2) Dowiedź, że $\otimes_{\mathcal{A}} \colon \mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{A} \times \mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathscr{V}$ jest bifunktorem (tutaj $\mathsf{Mod}\text{-}\mathcal{A}$ oznacza kategorię prawostronnych $\mathcal{A}$-modułów skonstruowaną analogicznie do $\mathcal{A}\text{-}\mathsf{Mod}$).

(3) Przedyskutuj powyższe konstrukcje w przypadku gdy $\mathscr{V} = \mathsf{Set}$, natomiast $\otimes$ jest zwykłym iloczynem kartezjańskim.

(4) Przedyskutuj powyższe konstrukcje w przypadku gdy $\mathscr{V} = K\text{-}\mathsf{Vect}$, gdzie K jest ciałem, zaś $\otimes$ jest zwykłym iloczynem tensorowym.

Definicja. Załóżmy, że $\mathfrak{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ jest kategorią monoidalną. $\mathfrak{V}$-*kategoria* (lub *kategoria wzbogacona nad* $\mathfrak{V}$) $\mathscr{C}$ składa się z:

(1) klasy *obiektów* $|\mathscr{C}|$,

(2) obiektów $\mathscr{C}(A, B) \in |\mathscr{V}|$ dla dowolnych $A, B \in |\mathscr{C}|$,

(3) morfizmów *składania* (lub *kompozycji*)

$$c_{ABC} \colon \mathscr{C}(A, B) \otimes \mathscr{C}(B, C) \to \mathscr{C}(A, C)$$

dla dowolnych $A, B, C \in |\mathscr{C}|$,

(4) *morfizmów jedności* $u_A \colon I \to \mathscr{C}(A, A)$ dla dowolnego $A \in |\mathscr{C}|$.

Dodatkowo diagramy

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(A,B) \otimes (\mathscr{C}(B,C) \otimes \mathscr{C}(C,D)) \arrow[rr, "\alpha_{\mathscr{C}(A,B)\mathscr{C}(B,C)\mathscr{C}(C,D)}"] \arrow[d, "1_{\mathscr{C}(A,B)} \otimes c_{BCD}"'] & & (\mathscr{C}(A,B) \otimes \mathscr{C}(B,C)) \otimes \mathscr{C}(C,D) \arrow[d, "c_{ABC} \otimes 1_{\mathscr{C}(C,D)}"] \\
\mathscr{C}(A,B) \otimes \mathscr{C}(B,D) \arrow[r, "c_{ABD}"'] & \mathscr{C}(A,D) & \mathscr{C}(A,C) \otimes \mathscr{C}(C,D) \arrow[l, "c_{ACD}"]
\end{tikzcd}$$

oraz

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathscr{C}(A,B) \arrow[r, "\lambda_{\mathscr{C}(A,B)}"] \arrow[d, "u_A \otimes 1_{\mathscr{C}(A,B)}"'] & \mathscr{C}(A,B) \arrow[d, equal, "1_{\mathscr{C}(A,B)}"] & \mathscr{C}(A,B) \otimes I \arrow[l, "\rho_{\mathscr{C}(A,B)}"'] \arrow[d, "1_{\mathscr{C}(A,B)} \otimes u_B"] \\
\mathscr{C}(A,A) \otimes \mathscr{C}(A,B) \arrow[r, "c_{AAB}"'] & \mathscr{C}(A,B) & \mathscr{C}(A,B) \otimes \mathscr{C}(B,B) \arrow[l, "c_{ABB}"]
\end{tikzcd}$$

muszą być przemienne dla dowolnych $A, B, C, D \in |\mathscr{C}|$.

Uwaga. Oczywiście c_{ABC} oraz u_A dla $A, B, C \in |\mathscr{C}|$ to morfizmy kategorii $\mathscr{V}$.

Zadanie 8.49. Udowodnij, że kategoria $\mathscr{V} = K$-Vect przestrzeni liniowych nad ciałem K jest wzbogacona nad kategorią $\mathscr{V}$ wyposażoną w iloczyn tensorowy $\otimes$ jako produkt monoidalny.

Zadanie 8.50. 2-*kategorią* nazywamy kategorię wzbogaconą nad kategorią monoidalną Cat z produktem małych kategorii jako produktem monoidalnym. Udowodnij, że Cat jest 2-kategorią.

Podręczniki, wykłady i zbiory zadań

Zbiory zadań zostały oznaczone kolorem niebieskim.
Strony WWW zawierające wykłady/zadania zostały oznaczone kolorem zielonym.

[1] T. Andreescu, *Essential Linear Algebra with Applications. A Problem-Solving Approach*, Birkhäuser, 2014.

[2] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej: część II*, Wydawnictwo WNT, 2002.

[3] G. M. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions* (2nd ed.), Springer, 2015 (online).

[4] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Polskie Wydawnictwo Naukowe, 1976.

[5] F. Broglia, E. Fortuna, D. Luminati, *Problemi Risolti di Algebra Lineare*, Zanichelli, 1995.

[6] J. Chaber, R. Pol, *GAL*, 2015 (online).

[7] K. Conrad, *Expository papers* (online).

[8] H. Dym, *Linear Algebra in Action*, American Mathematical Society, 2014.

[9] J. M. Erdman, *Exercises and Problems in Linear Algebra*, 2014 (online).

[10] D. K. Faddeev, I. Sominsky, *Problems in Higher Algebra*, Mir Publishers, 1972.

[11] J. Gancarzewicz, *Algebra liniowa i jej zastosowania* (wyd. 2), Wydawnictwo UJ, 2009.

[12] J. S. Golan, *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know* (3rd ed.), Springer, 2012.

[13] W. H. Greub, *Multilinear Algebra* (2nd ed.), Springer, 1978.

[14] P. R. Halmos, *Linear Algebra Problem Book*, Mathematical Association of America, 1995.

[15] A. Herdegen, *Algebra liniowa i geometria* (wyd. 3 popr.), eigenspace.pl, 2018 (online).

[16] T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa. Przykłady i zadania* (wyd. 7 popr.), Oficyna Wydawnicza GiS, 2017 (starsze wyd. online).

[17] J. Komorowski, *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, Polskie Wydawnictwo Naukowe, 1978.

[18] T. Koźniewski, *Wykłady z algebry liniowej II*, Wydawnictwo UW, 2012.

[19] A. I. Kostrikin, *Zbiór zadań z algebry* (wyd. 3), Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.

[20] A. I. Kostrikin, Y. I. Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach Science Publishers, 1997.

[21] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.), Springer, 1998.

[22] A. Męcel, *Dydaktyka* (online).

[23] V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, American Mathematical Society, 1994 (online).

[24] I. V. Proskuryakov, *Problems in Linear Algebra*, Mir Publishers, 1978.

[25] S. Roman, *Advanced Linear Algebra* (3rd ed.), Springer, 2008.

[26] J. Rutkowski, *Algebra liniowa w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2019.

[27] A. Strojnowski, *Geometria z Algebrą Liniową* (online).

[28] K. Szymiczek, *Referaty, prace, wykłady* (online).

[29] A. Weber, *Dydaktyka* (online).

[30] F. Zhang, *Linear Algebra. Challenging Problems for Students* (2nd ed.), Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, 1996.