Geometria z Algebrą Liniową II

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 25, 7.06.2022 r.

Definicja

Niech q będzie formą kwadratową na przestrzeni V nad $\mathbb{R}$. Mówimy, że forma q jest:

- **dodatnio określona**, jeśli $q(\alpha) > 0$, dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in V$,
- **ujemnie określona**, jeśli $q(\alpha) < 0$, dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in V$,
- **dodatnio półokreślona**, jeśli $q(\alpha) \geq 0$, dla każdego wektora $\alpha \in V$,
- **ujemnie półokreślona**, jeśli $q(\alpha) \leq 0$, dla każdego wektora $\alpha \in V$,
- **nieokreślona**, jeśli istnieją wektory $\alpha, \beta \in V$ takie, że $q(\alpha) > 0$ oraz $q(\beta) < 0$.

Definicja

Mówimy, że symetryczna macierz kwadratowa $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest:

- **dodatnio określona**, jeśli $v^T A v > 0$, dla każdego $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **ujemnie określona**, jeśli $v^T A v < 0$, dla każdego $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **dodatnio półokreślona**, jeśli $v^T A v \geq 0$, dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$,
- **ujemnie półokreślona**, jeśli $v^T A v \leq 0$, dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$,
- **nieokreślona**, jeśli istnieją $v, w \in \mathbb{R}^n$, takie, że $v^T A v > 0$ oraz $w^T A w < 0$.

Uwaga

Jeśli rzeczywista forma kwadratowa q ma w bazie $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ postać diagonalną daną wzorem

$$q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2,$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, to forma q jest:

- **dodatnio określona** $\Longleftrightarrow a_i > 0,\ \text{dla } i = 1, \ldots, n$.
- **ujemnie określona** $\Longleftrightarrow a_i < 0,\ \text{dla } i = 1, \ldots, n$.
- **dodatnio półokreślona** $\Longleftrightarrow a_i \geq 0,\ \text{dla } i = 1, \ldots, n$.
- **ujemnie półokreślona** $\Longleftrightarrow a_i \leq 0,\ \text{dla } i = 1, \ldots, n$.
- **nieokreślona** $\Longleftrightarrow$ istnieją $1 \leq i, j \leq n$ takie, że $a_i > 0$ oraz $a_j < 0$.

Uwaga - wnioski z kryt. Sylvestera i tw. Jacobiego

Jeśli rzeczywista forma kwadratowa q ma w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz symetryczną

$$G(q; \mathcal{A}) = A \in M_n(\mathbb{R}),$$

wówczas forma q/macierz A jest:

- **dodatnio określona** $\iff \det A^{(i)} > 0, \text{ dla } i = 1, \ldots, n$.
- **ujemnie określona** $\iff (-1)^i \det A^{(i)} > 0, \text{ dla } i = 1, \ldots, n$.

gdzie $\det A^{(i)}$ są głównymi minorami wiodącymi macierzy A.

Rozpoznawanie dodatniej lub ujemnej określoności formy/macierzy ma duże znaczenie dla wielu działów matematyki, np. w szukaniu ekstremów lokalnych funkcji różniczkowalnych wielu zmiennych (to będzie na AM II).

Definicja

Wielomianem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ **o współczynnikach z ciała** K nazywamy wyrażenie postaci:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

gdzie:

- $i_1, \ldots, i_n$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi[a],
- współczynniki $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ należą do ciała K,
- tylko dla skończenie wielu $(i_1, \ldots, i_n)$ mamy $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \neq 0$.

Zbiór wszystkich wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele K oznaczamy przez $K[x_1, \ldots, x_n]$.

[a] Suma ta brana jest po wszystkich możliwych układach liczb całkowitych nieujemnych.

Przykłady

- W wielomianie $w \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ postaci
$$w = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2 + 5$$
mamy
$$a_{20} = 1, \quad a_{11} = 4, \quad a_{01} = 3, \quad a_{00} = 5,$$
oraz $a_{i_1 i_2} = 0$ dla pozostałych par i_1, i_2.

- W wielomianie $g \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ postaci
$$g = 7x_1x_2^2x_3^7 - 3x_1x_3^4 + 14x_2^5x_3$$
mamy
$$a_{127} = 7, \quad a_{104} = -3, \quad a_{051} = 14$$
oraz $a_{i_1 i_2 i_3} = 0$, dla pozostałych i_1, i_2, i_3.

Definicja

Wielomian

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

nazywamy **niezerowym**, jeśli dla pewnych $i_1, \ldots, i_n$ mamy:

$$a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0.$$

Jeśli F nie jest niezerowy, to F nazywamy **wielomianem zerowym**.

Stopniem wielomianu niezerowego wielomianu F, ozn. $\deg f$, nazywamy największą z liczb

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n,$$

dla których $a_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$, jeśli F jest niezerowy.

Jeśli f jest zerowy, to piszemy $\deg f = -\infty$.

Definicja

Sumą wielomianów

$$F = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad \text{oraz} \quad G = \sum_{i_1,\dots,i_n} b_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

nazywamy wielomian oznaczany przez $F + G$ postaci $\sum_{i_1,\dots,i_n} c_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ taki, że

$$c_{i_1\dots i_n} = a_{i_1\dots i_n} + b_{i_1\dots i_n},$$

dla każdych $i_1, \dots, i_n$.

Przykład. Dla wielomianów

$$F = 2x_1^2 x_2 + 6x_1 x_2 - 5x_1, \quad G = 7x_1^5 - 2x_1 x_2 + 5x_1.$$

mamy $\deg F = 3$, $\deg G = 5$ oraz

$$F + G = 7x_1^5 + 2x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2.$$

Definicja

Funkcją wielomianową na przestrzeni K^n, zadaną wielomianem $\sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ należącym do $K[x_1,\dots,x_n]$ nazywamy funkcję $f: K^n \to K$ taką, że dla każdych $s_1,\dots,s_n \in K$ zachodzi

$$f(s_1,\dots,s_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n}.$$

Twierdzenie

Dla każdego ciała nieskończonego K przyporządkowanie przypisujące każdemu wielomianowi zadaną przez niego funkcję wielomianową jest bijekcją.

Nie jest to prawdą to dla ciał skończonych. Wielomiany $x+1$, x^3+1, $2x^3+2x+1$ w $\mathbb{Z}_3[x]$ wyznaczają tą samą funkcję wielomianową $f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, mianowicie $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=0$ (czyli zbiór par $\{(0,1),(1,2),(2,0)\} \subset \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$).

Dowód. Nie ma funkcji wielomianowej, która nie była by zadana przez wielomian. Jeżeli wielomiany $F_1, F_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zadają tą samą funkcję wielomianową, to wielomian

$$F = F_1 - F_2$$

zadaje funkcję zerową. Wykażemy, że jedynym wielomianem, który zadaje funkcję zerową jest wielomian zerowy. Dowód to indukcja ze względu na n. Niech $n = 1$.

- Z twierdzenia o dzieleniu z resztą element $b \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $F \in K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x) = (x - b) \cdot G(x)$, dla pewnego $G \in K[x]$.
- Stąd, jak wiemy, każdy niezerowy wielomian $F \in K[x]$ ma skończenie wiele pierwiastków.
- Jeśli więc K jest ciałem nieskończonym i wielomian F zadaje zerową funkcję wielomianową, to każdy element K jest pierwiastkiem F, czyli F jest zerowy,

Dowód cd. Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że wielomian n zmiennych

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1,\ldots,x_n]$$

zadaje zerową funkcję wielomianową.

- Ustalmy $s_2,\ldots,s_n$ i rozpatrzmy wielomian $\overline{F} \in K[x]$ zadany wzorem

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_2,\ldots,i_n} a_{0\,i_2\ldots i_n} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n} x^0 + \sum_{i_2,\ldots,i_n} a_{1\,i_2\ldots i_n} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n} x^1 + \ldots\end{aligned}$$

- Skoro funkcja wielomianowa zadana wielomianem F jest zerowa, to również funkcja wielomianowa zadana wielomianem $\overline{F}$ jest zerowa. Jest tak dla każdych $s_2,\ldots,s_n$, stąd funkcje wielomianowe $n-1$ zmiennych zadane wielomianami $\sum_{i_2,\ldots,i_n} a_{j\,i_2\ldots i_n} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_2,\ldots,x_n]$ są zerowe, czyli ich współczynniki $a_{j\,i_2\ldots i_n}$ są zerowe. Wykazaliśmy zatem, że F jest zerowy.

Od tej pory zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq 2$.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem K i niech $p_0, \mathcal{A}$ będzie układem bazowym przestrzeni H, przy czym $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Funkcję $f : H \to K$ nazywamy **funkcją wielomianową na przestrzeni** H, jeśli istnieje wielomian

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

należący do zbioru $K[x_1, \ldots, x_n]$ taki, że dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$ zachodzi:

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}.$$

Przykład. Funkcja $f : K^3 \to K$ postaci $f(s_1, s_2, s_3) = s_1 + s_2$ jest wielomianowa, ponieważ

- dla układu bazowego $(0,0,0); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ oraz wielomianu
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2,$$
mamy:
$$f((0,0,0) + s_1(1,0,0) + s_2(0,1,0) + s_3(0,0,1)) = f(s_1, s_2, s_3) = s_1 + s_2.$$

- dla układu bazowego $(2,1,3); (1,-1,0), (1,0,1), (0,0,1)$ oraz wielomianu
$$G(y_1, y_2, y_3) = y_2 + 3,$$
mamy:
$$\begin{aligned} &f((2,1,3) + s_1(1,-1,0) + s_2(1,0,1) + s_3(0,0,1)) \\ =&f(s_1 + s_2 + 2, -s_1 + 1, s_2 + s_3 + 3) = s_2 + 3. \end{aligned}$$

Uwaga

Dla funkcji $f : H \to K$ z przestrzeni afinicznej H do ciała K oraz dowolnych układów bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ przestrzeni H następujące warunki są równoważne:

- f jest funkcją wielomianową w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$,
- f jest funkcją wielomianową w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$.

Wyjaśnienie. Niech $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

- Przypuśćmy, że w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, czyli $p_0; \mathcal{A}$, mamy
$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n},$$
dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$.

- Dla układu bazowego $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$, czyli $q_0; \mathcal{B}$ niech wielomian
$$G = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_n^{i_n}$$
będzie wielomianem powstałym z F przez podstawienie:
$$x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n + w_i,$$
gdzie $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = [c_{ij}] \in M_n(K)$, $w_i \in K$, oraz $q_0 = p_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i$.

- Wówczas $f(q_0 + t_1\beta_1 + \ldots + t_n\beta_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_n^{i_n}$, dla każdych $t_1, \ldots, t_n \in K$. Przy tym $\deg F = \deg G$.

Przykład. Jeśli

$$p_0; \mathcal{A} = (0,0,0); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1),$$
$$q_0; \mathcal{B} = (2,1,3); (1,-1,0), (1,0,1), (0,0,1).$$

To mamy:

$$M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$(2,1,3) = (0,0,0) + 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

i po podstawieniu do $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$:

$$x_1 = y_1 + y_2 + 2, \quad x_2 = -y_1 + 1, \quad x_3 = y_2 + y_3 + 3,$$

uzyskujemy wielomian $G(y_1, y_2, y_3) = y_2 + 3$, bowiem:

$$F(y_1 + y_2 + 2, -y_1 + 1, y_2 + y_3 + 3) = y_2 + 3.$$

Definicja

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Mówimy, że **wielomian**

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

odpowiada funkcji f w układzie bazowym

$$p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

jeśli

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n},$$

dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$. Liczbę $\deg F$ nazywamy **stopniem funkcji wielomianowej** f.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **algebraicznym**, jeśli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, \ldots, f_k$ na przestrzeni H takie, że:

$$X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}.$$

- Jeżeli w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ funkcjom $f_1, \ldots, f_k$ odpowiadają wielomiany $F_1, \ldots, F_k$, to mówimy, że w tym układzie bazowym X jest **opisywany wielomianami** $F_1, \ldots, F_k$, albo **opisywany układem równań** $F_1 = 0, \ldots, F_k = 0$.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **hiperpowierzchnią**, jeśli istnieje funkcja wielomianowa f na H taka, że $X = \{p \in H \mid f(p) = 0\}$. Mówimy wtedy, że **hiperpowierzchnia** X **jest opisywana przez funkcję** f. **Stopniem hiperpowierzchni** X nazywamy najniższy ze stopni wielomianów opisujących X.

Przykład. Rozważmy zbiór takich

$$p = (0,0) + x_1(1,0) + x_2(0,1),$$

których współrzędne x_1, x_2 spełniają równość

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Biorąc wielomian $F \in K[x_1, x_2]$ postaci

$$x_1^2 + x_2^2 - 1$$

oraz funkcję wielomianową na $\mathbb{R}^2$ odpowiadającą w układzie bazowym

$$(0,0); (1,0), (0,1)$$

wielomianowi F, dostajemy

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,$$

czyli zbiór punktów $p \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $f(p) = 0$ jest hiperpowierzchnią stopnia 2.

Przykład. Jeśli weźmiemy układ bazowy

$$(2,1);(1,0),(1,1),$$

to połóżmy

$$p_0=(0,0),\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,1)$$
$$q_0=(2,1),\beta_1=(1,0),\beta_2=(1,-1).$$

Wówczas stosując notację wyżej mamy

$$w_1=2,w_2=1,c_{11}=1,c_{12}=1,c_{21}=0,c_{22}=-1,$$

czyli dokonując podstawienia

$$x_1=1\cdot y_1+1\cdot y_2+2,\quad x_2=0\cdot y_1+-1\cdot y_2+1,$$

dostajemy inne równanie opisujące zbiór punktów postaci $f(p)=0$, czyli:

$$x_1^2+x_2^2-1=y_1^2+2y_1y_2+2y_2^2+2y_1+4=0.$$

Jeśli $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$, to

$$f((2,1)+y_1(1,0)+y_2(1,-1))=y_1^2+2y_1y_2+2y_2^2+2y_1+4.$$

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Dowód. Rozpatrzmy zbiór $X = \{p \in H \,|\, f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}$, gdzie $f_i : H \to \mathbb{R}$ są funkcjami wielomianowymi na rzeczywistej przestrzeni afinicznej H, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas

$$f = f_1^2 + \ldots + f_k^2$$

jest funkcją wielomianową na H i $X = \{p \in H \,|\, f(p) = 0\}$

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnie H_1, H_2 w przestrzeni afinicznej H są **afinicznie izomorficzne** (inaczej mówiąc: mają **ten sam typ afiniczny**), jeśli istnieje izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ taki, że $h(H_1) = H_2$.

Przykład. Rozważmy hiperpowierzchnię H_1 w $\mathbb{R}^2$ opisaną w standardowym układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$ równaniem

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1 + 10x_2 + 5 = 0.$$

Mamy:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1 + 10x_2 + 5 = (x_1 + 2x_2)^2 + (6x_1 + 10x_2 + 5).$$

Definiując $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem

$$g((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, 6x_1 + 10x_2 + 5).$$

dostajemy izomorfizm H_1 z hiperpowierzchnią H_2 w $\mathbb{R}^2$, która w pewnym układzie bazowym $q_0; \beta_1, \beta_2$ opisana jest równaniem:

$$y_1^2 + y_2 = 0.$$

Jak odczytać $q_0; \beta_1, \beta_2$? Rozważając g^{-1}:

$$(x_1, x_2) = \left(-5y_1 + y_2 - 5, \frac{6y_1 - y_2 + 5}{2}\right) \Rightarrow q_0 = (-5, \frac{5}{2}), \beta_1 = (-5, 3), \beta_2 = (1, -\frac{1}{2}).$$

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Dowód.

- Przypuśćmy, że X_1, X_2 są w H afinicznie izomorficzne. Jeśli X_1 jest w układzie $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ opisywana równaniem $F = 0$ i $h(X_1) = X_2$, to X_2 jest również w układzie bazowym $h(p_0); h'(\alpha_1), \ldots, h'(\alpha_n)$ opisywana równaniem $F = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że X_1 w układzie $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz X_2 w układzie $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$ są opisane równaniem $F = 0$. Wówczas izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ zadany warunkami $h(p_0) = q_0$ oraz $h'(\alpha_i) = \beta_i$, dla $i = 1, \ldots, n$, spełnia $h(X_1) = X_2$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie stopnia 1 w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej H to $n-1$-wymiarowe podprzestrzenie afiniczne przestrzeni H. Takie podprzestrzenie nazywamy **hiperpłaszczyznami**.

Dowód.

- Jeśli $X \subset H$ jest hiperpowierzchnią stopnia 1, to dla pewnego układu bazowego $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mamy (z definicji)

  $$X = \{p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \in H \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0\},$$

  dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. A zatem H jest hiperpłaszczyzną.

- Na odwrót: niech $X \subset H$ będzie podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$ i niech $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie układem bazowym przestrzeni H. Wówczas zbiór $\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \,|\, p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n\}$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$ w K^n, opisywalną równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$.

Twierdzenie - cel na ostatni wykład

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$
\begin{array}{llllll}
 & (i) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} & r = r(f) & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
\textit{lub} & & & & & \\
 & (ii) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} & r = r(f) < n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
(b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$\begin{array}{lll} (c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n, \\ (c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1, \\ (c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1. \end{array}$$

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$\begin{array}{lll} (r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\ (r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\ (r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1. \end{array}$$

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnia X stopnia 2, w n wymiarowej przestrzeni afinicznej H jest **właściwa**, jeśli X nie jest zawarta w $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni H.

Przykłady.

- Sfera $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
- Zbiór $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = 0\}$ nie jest hiperpowierzchnią właściwą. Jest to prosta w $\mathbb{R}^3$.
- Zbiór $X = \{(a, b, c)\}$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi jest hiperpowierzchnią stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$, opisaną w standardowym układzie bazowym równaniem stopnia 2 postaci: $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2 = 0$. Nie jest to zatem hiperpowierzchnia właściwa.

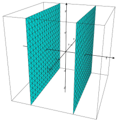
Klasyfikacja właściwych hiperpowierzchni (krzywych) stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$ jest afinicznie izomorficzna z jedną z następujących krzywych opisanych (w standardowym układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$) równaniami:

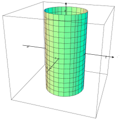
- $-x_1^2 + 1 = 0$.
  Jest to para prostych równoległych.
- $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tego typu afinicznego nazywamy **elipsą**.
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tą nazywamy **hiperbolą**.
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$.
  Jest to para prostych przecinających się.
- $x_1^2 + x_2 = 0$.
  Krzywą tą nazywamy **parabolą**.

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

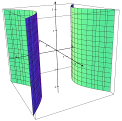
$-x_1^2 + 1 = 0$ para płaszczyzn równoległych



$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ **walec eliptyczny**

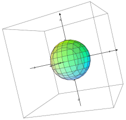


$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ **walec hiperboliczny**

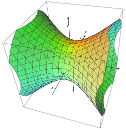


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

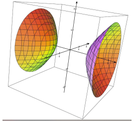
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ elipsoida



$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloida jednopowłokowa**

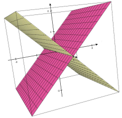


$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloida dwupowłokowa**

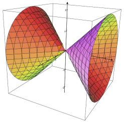


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

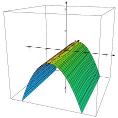
$x_1^2 - x_2^2 = 0$ para płaszczyzn przecinających się



$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ **stożek eliptyczny**

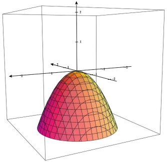


$x_1^2 + x_3 = 0$ **walec paraboliczny**



Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida eliptyczna**



$x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida hiperboliczna**