Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 26, 9.06.2022 r.

Zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq$ 2.

Definicja

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Mówimy, że **wielomian**

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

odpowiada funkcji f w układzie bazowym

$$p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

jeśli

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}, \text{ dla każdych } s_1, \ldots, s_n \in K.$$

Liczbę $\deg F$ nazywamy **stopniem funkcji wielomianowej** f.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **hiperpowierzchnią**, jeśli istnieje funkcja wielomianowa f na H taka, że

$$X = \{p \in H \mid f(p) = 0\}.$$

  Mówimy wtedy, że **hiperpowierzchnia** X **jest opisywana przez funkcję** f.

- **Stopniem hiperpowierzchni** X, ozn $\deg(X)$, nazywamy najniższy ze stopni wielomianów opisujących X.

- Mówimy, że hiperpowierzchnia X stopnia 2, w n wymiarowej przestrzeni afinicznej H jest **właściwa**, jeśli X nie jest zawarta w $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni H.

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnie H_1, H_2 w przestrzeni afinicznej H są **afinicznie izomorficzne** (inaczej mówiąc: mają **ten sam typ afiniczny**), jeśli istnieje izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ taki, że $h(H_1) = H_2$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Interesują nas także inne typy równoważności hiperpowierzchni: typ izometryczny i typ rzutowy, o czym powiemy na kolejnym wykładzie.

Uwaga

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez:

- macierz symetryczną $A \in M_n(K)$
- macierz $B \in M_{1\times n}(K)$
- $c \in K$

tak, że biorąc $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T A x + Bx + c.$$

Przykład.

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 + 6 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 6.$$

Dowód. Weźmy wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ stopnia 2 i niech

$$F = F_2 + F_1 + F_0,$$

gdzie $F_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ oraz F_i jest sumą jednomianów stopnia i, dla $i = 0, 1, 2$.

Wówczas (utożsamiamy wielomiany z funkcjami wielomianowymi!):

- F_2 to forma kwadratowa,
- F_1 to przekształcenie liniowe,
- F_0 jest funkcją stałą.

Czyli wystarczy przyjąć, że:

- $A = G(F_2; st)$,
- $B = M(F_1)_{st}^{st}$,
- $c = F_0(0, 0, \ldots, 0)$.

Uwaga

Załóżmy, że funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 odpowiada w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ postaci

$$F = x^T A x + B x + c,$$

gdzie $x = [x_1 \ldots x_n]^T$, oraz A, B, c są jak we wcześniejszej uwadze.

Wówczas w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ funkcji f odpowiada wielomian

$$G = x^T A' x + B' x + c',$$

przy czym

$$A' = C^T A C, \quad \text{gdzie} \quad C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}.$$

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:

$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

  Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:

$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

  Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.

- Biorąc zatem $x = Cy + w$, gdzie $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ oraz $w = [w_1 \ldots w_n]^T$ spełniają

$$q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n,$$

  dostajemy

$$\begin{aligned} x^T Ax + Bx + c &= (y^T C^T + w^T)A(Cy + w) + B(Cy + w) + c = \\ &= y^T(C^T AC)y + y^T C^T Aw + w^T ACy + w^T Aw + BCy + Bw + c. \end{aligned}$$

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:

$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

  Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.

- Biorąc zatem $x = Cy + w$, gdzie $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ oraz $w = [w_1 \ldots w_n]^T$ spełniają

$$q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n,$$

  dostajemy

$$\begin{aligned} x^T Ax + Bx + c &= (y^T C^T + w^T)A(Cy + w) + B(Cy + w) + c = \\ &= y^T(C^T AC)y + y^T C^T Aw + w^T ACy + w^T Aw + BCy + Bw + c. \end{aligned}$$

- Przy tym $y^T C^T Aw = (y^T C^T Aw)^T = w^T ACy$. Stąd teza zachodzi dla:

$$A' = C^T AC, \quad B' = 2w^T AC + BC, \quad c' = w^T Aw + Bw + c.$$

Wniosek

Macierze części kwadratowych wielomianów odpowiadających (w zadanych układach bazowych) tej samej funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 są kongruentne. W szczególności mają ten sam rząd.

Definicja

Rzędem funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 nazywamy rząd macierzy części kwadratowej wielomianu, który odpowiada f w pewnym układzie bazowym przestrzeni H. Rząd funkcji f oznaczamy jako $r(f)$.

Przykład. Jeśli $f : K^n \to K$ zadana jest w standardowym układzie bazowym wielomianem

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 + x_n,$$

dla pewnego $k < n$, to $r(f) = k$.

Twierdzenie

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$\begin{array}{llllll} & (i) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} & r = r(f) & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\ \textit{lub} & & & & & \\ & (ii) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} & r = r(f) < n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0. \end{array}$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$\begin{array}{lllll} (a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\ (b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0. \end{array}$$

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A \in M_n(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_n(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{r(f)}, 0, \ldots, 0)$.

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A \in M_n(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_n(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{r(f)}, 0, \ldots, 0)$.

- Rozpatrzmy układ bazowy $p_0; \mathcal{B}$, w którym baza $\mathcal{B}$ zadana jest warunkiem $M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = C$. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian

$$G = y^T C^T ACy + B'y + c' = a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + b'_1 y_1 + \ldots + b'_n y_n + c'.$$

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A \in M_n(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_n(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{r(f)}, 0, \ldots, 0)$.

- Rozpatrzmy układ bazowy $p_0; \mathcal{B}$, w którym baza $\mathcal{B}$ zadana jest warunkiem $M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = C$. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian
$$G = y^T C^T ACy + B'y + c' = a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + b'_1 y_1 + \ldots + b'_n y_n + c'.$$

- Inaczej mówiąc G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$, gdzie $x = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ oraz $y = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}^T$. Mamy też:
$$a_1 \left(y_1 + \frac{b'_1}{2a_1} \right)^2 + \ldots + a_r \left(y_r + \frac{b'_r}{2a_r} \right)^2 + b'_{r+1} y_{r+1} + \ldots + b'_n y_n - \frac{(b'_1)^2}{4a_1} - \ldots - \frac{(b'_r)^2}{4a_r} + c'.$$
Musimy tak dobrać $q_0; \mathcal{C}$, aby przez pewną afiniczną zamianę zmiennych przeprowadzić G do postaci (i) lub (ii). Rozważmy dwa przypadki.

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1+\frac{b_1'}{2a_1}\right)^2+\ldots+a_r\left(y_r+\frac{b_r'}{2a_r}\right)^2+b_{r+1}'y_{r+1}+\ldots+b_n'y_n-\frac{(b_1')^2}{4a_1}-\ldots-\frac{(b_r')^2}{4a_r}+c'.$$

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1+\frac{b'_1}{2a_1}\right)^2+\ldots+a_r\left(y_r+\frac{b'_r}{2a_r}\right)^2+b'_{r+1}y_{r+1}+\ldots+b'_n y_n-\frac{(b'_1)^2}{4a_1}-\ldots-\frac{(b'_r)^2}{4a_r}+c'.$$

- Przypadek 1. $b'_{r+1} = \ldots = b'_n = 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + c$ typu (i) otrzymujemy z G przez podstawienie postaci:

$$z_i = y_i + \frac{b'_i}{2a_i},\ \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_i = y_i,\ \text{dla } i = r+1, \ldots, n.$$

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1+\frac{b_1'}{2a_1}\right)^2+\ldots+a_r\left(y_r+\frac{b_r'}{2a_r}\right)^2+b_{r+1}'y_{r+1}+\ldots+b_n'y_n-\frac{(b_1')^2}{4a_1}-\ldots-\frac{(b_r')^2}{4a_r}+c'.$$

- Przypadek 1. $b_{r+1}' = \ldots = b_n' = 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + c$ typu (i) otrzymujemy z G przez podstawienie postaci:

$$z_i = y_i + \frac{b_i'}{2a_i},\ \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_i = y_i,\ \text{dla } i = r + 1, \ldots, n.$$

- Przypadek 2. Pewna z liczb $b_{r+1}', \ldots, b_n'$ jest niezerowa. Po ewentualnym przenumerowaniu zmiennych możemy przyjąć, że $b_n' \neq 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + x_n$ typu (ii) otrzymujemy z G przez podstawienie:

$$z_i = \begin{cases} y_i + \frac{b_i'}{2a_i}, & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \\ y_i, & \text{dla } i = r+1, \ldots, n-1, \\ b_{r+1}'y_{r+1} + \ldots + b_n'y_n - \frac{(b_1')^2}{4a_1} - \ldots - \frac{(b_r')^2}{4a_r} + c', & \text{dla } i = n. \end{cases}$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$
\begin{array}{lll}
(c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n, \\
(c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1, \\
(c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1.
\end{array}
$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$\begin{array}{llll} (c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n, \\ (c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1, \\ (c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1. \end{array}$$

Dowód. W ukł. baz. $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana jednym z równań:

(a) $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + c = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n$, oraz , $a_1, \ldots, a_r \neq 0, c \in \{0, 1\}$,

(b) $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + x_n = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n-1$ oraz $a_1, \ldots, a_r \neq 0$.

Niech $d_i^2 = a_i$. Wówczas w ukł. baz. $p_0; \frac{1}{d_1}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{d_r}\alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana równaniem:

- (c1), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (a) z $c = 1$,
- (c2), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (a) z $c = 0$,
- (c3), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (b).

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n - 1.
\end{array}$$

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}$$

Dowód. W ukł. baz. $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana jednym z równań:

(a) $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n$, oraz , $a_1, \ldots, a_r \neq 0, c \in \{0, 1\}$,

(b) $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n-1$ oraz $a_1, \ldots, a_r \neq 0$.

Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że $a_i > 0$ dla $i \leq s$ oraz $a_i < 0$ dla $i \geq s+1$, dla pewnego $s \geq 0$. Niech $d_i^2 = |a_i|$, dla $i = 1, \ldots, r$. Wówczas w układzie bazowym $p_0; \frac{1}{d_1}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{d_r}\alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ hiperpowierzchnia X jest opisana równaniem typu (r1) lub (r2) lub (r3).

Definicja

Mówimy, że punkt $p \in H$ jest **środkiem symetrii hiperpowierzchni** $X \subset H$, jeśli dla każdego punktu q należącego do X punkt $p - \overrightarrow{pq}$ też należy do X.

Inaczej mówiąc: $p \in H$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X, jeśli dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ zachodzi równoważność

$$p + \alpha \in X \Leftrightarrow p - \alpha \in X.$$

Zatem punkt p jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X wtedy i tylko wtedy, gdy symetria względem punktu p przeprowadza X na X.

Przykłady:

- okrąg opisany w $\mathbb{R}^2$ równaniem $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1$ ma środek symetrii w punkcie $(2, 0)$.
- parabola opisana w $\mathbb{R}^2$ równaniem $x_1^2 + x_2 = 0$ nie ma środka symetrii.

Twierdzenie

Niech X będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w rzeczywistej przestrzeni afinicznej H.

- Jeśli X jest opisana równaniem postaci (r1), to X posiada środek symetrii, ale żaden jej środek symetrii nie należy do X.
- Jeśli X jest opisana równaniem postaci (r2), to X posiada środek symetrii należący do X.
- Jeśli X jest opisana równaniem postaci (r3), to X nie posiada środka symetrii.

Powyższe przypadki wykluczają się nawzajem, więc X nie może być opisana w jednym układzie bazowym równaniem postaci (ri), a w innym układzie bazowym równaniem postaci (rj), dla $i \neq j$.

Twierdzenie A

Niech X będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ równaniem

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + d = 0,$$

przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$. Wówczas punkt p jest środkiem symetrii zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w tym układzie bazowym współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n.$$

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$

to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:

$$\begin{aligned} p + \alpha &= p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ &= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$p - \alpha = p_0 - y_1\alpha_1 - \ldots - y_r\alpha_r + (s_{r+1} - y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n - y_n)\alpha_n.$$

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$

  to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:

$$\begin{aligned} p + \alpha &= p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ &= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$

  oraz analogicznie

$$p - \alpha = p_0 - y_1\alpha_1 - \ldots - y_r\alpha_r + (s_{r+1} - y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n - y_n)\alpha_n.$$

- Stąd

$$\begin{aligned} p + \alpha \in X &\iff a_1y_1^2 + \ldots + a_ry_r^2 + d = 0 \\ p - \alpha \in X &\iff a_1(-y_1)^2 + \ldots + a_r(-y_r)^2 + d = 0, \end{aligned}$$

  czyli $p + \alpha \in X \iff p - \alpha \in X$ i p jest środkiem symetrii X.

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \qquad (1)$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$
- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$.

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$

- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$.
- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne

$$2s_1 - z_1, \quad \ldots, \quad 2s_n - z_n,$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$
- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$.
- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne
$$2s_1 - z_1, \quad \ldots, \quad 2s_n - z_n,$$
- Skoro $p - \alpha \in X$, to $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli
$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{2}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$

- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$.
- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne

$$2s_1 - z_1, \quad \ldots, \quad 2s_n - z_n,$$

- Skoro $p - \alpha \in X$, to $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli

$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{2}$$

- Odejmując (1) od (2) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:

$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0.$$

- Odejmując (1) od (2) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:

$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \tag{3}$$

- Odejmując (1) od (2) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:

$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \qquad (3)$$

- Otrzymaliśmy, że współrzędne $z_1, \ldots, z_n$ każdego punktu $z \in X$ spełniają (3). A więc X zawarty jest w zbiorze spełniającym (3).

- Odejmując (1) od (2) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:
$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \qquad (3)$$
- Otrzymaliśmy, że współrzędne $z_1, \ldots, z_n$ każdego punktu $z \in X$ spełniają (3). A więc X zawarty jest w zbiorze spełniającym (3).
- Gdyby $s_i \neq 0$, dla pewnego $i = 1, \ldots, r$, to (3) opisywałoby $n-1$ wymiarową podprzestrzeń afiniczną $M \subseteq H$ i mielibyśmy $X \subseteq M$, co przeczyłoby założeniu, że X jest właściwa. To kończy dowód Twierdzenia A.

- Odejmując (1) od (2) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:
$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \qquad (3)$$
- Otrzymaliśmy, że współrzędne $z_1, \ldots, z_n$ każdego punktu $z \in X$ spełniają (3). A więc X zawarty jest w zbiorze spełniającym (3).
- Gdyby $s_i \neq 0$, dla pewnego $i = 1, \ldots, r$, to (3) opisywałoby $n-1$ wymiarową podprzestrzeń afiniczną $M \subseteq H$ i mielibyśmy $X \subseteq M$, co przeczyłoby założeniu, że X jest właściwa. To kończy dowód Twierdzenia A.

Nietrudno widzieć, że jeśli X jest opisana równaniem typu (r1) postaci
$$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, \qquad (\dagger)$$
wówczas punkt o współrzędnych $\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n$ nie spełnia $(\dagger)$.

Z tych samych powodów powierzchnia X opisana równaniem (r2) zawiera wszystkie swoje środki symetrii.

Twierdzenie B

Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + x_n = 0,$$

przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0, r < n$. Wówczas X nie ma środka symetrii.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy

$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{3}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{3}$$

- Niech α będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $T(H)$ współrzędne
$$-2s_1, 0, 0, \ldots 0.$$
Wówczas punkt $p + \alpha$ ma współrzędne
$$-s_1, s_2, \ldots, s_n$$
więc $p + \alpha \in X$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{3}$$
- Niech α będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $T(H)$ współrzędne
$$-2s_1, 0, 0, \ldots 0.$$
Wówczas punkt $p + \alpha$ ma współrzędne
$$-s_1, s_2, \ldots, s_n$$
więc $p + \alpha \in X$.
- Stąd $p - \alpha \in X$, bo p to środek symetrii. Punkt $p - \alpha$ ma jednak współrzędne
$$3s_1, s_2, \ldots, s_n.$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $3s_1, s_2, \ldots, s_n$. więc dostajemy

$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{4}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $3s_1, s_2, \ldots, s_n$. więc dostajemy
$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{4}$$
- Odejmując (3) od (4) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $3s_1, s_2, \ldots, s_n$. więc dostajemy

$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{4}$$

- Odejmując (3) od (4) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$.
- Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (3) $s_n = 0$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $3s_1, s_2, \ldots, s_n$. więc dostajemy
$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{4}$$
- Odejmując (3) od (4) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$.
- Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (3) $s_n = 0$.
- Zatem p ma współrzędne
$$0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0.$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Środek symetrii $p \in X$ ma współrzędne $0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Środek symetrii $p \in X$ ma współrzędne $0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0$.
- Weźmy wektor β o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Środek symetrii $p \in X$ ma współrzędne $0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0$.
- Weźmy wektor β o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$.
- Wstawiając $p + \beta$ do równania opisującego X mamy:

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + 0 \cdot s_{r+1} + z_n = 0,$$

czyli $p + \beta \in X$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Środek symetrii $p \in X$ ma współrzędne $0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0$.
- Weźmy wektor β o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$.
- Wstawiając $p + \beta$ do równania opisującego X mamy:
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + 0 \cdot s_{r+1} + z_n = 0,$$
czyli $p + \beta \in X$.
- Wstawiając $p - \beta$ do równania opisującego X mamy:
$$a_1(-z_1)^2 + \ldots + a_r(-z_r)^2 - z_n = -2z_n \neq 0,$$
czyli $p + \beta \notin X$.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Środek symetrii $p \in X$ ma współrzędne $0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0$.
- Weźmy wektor β o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$.
- Wstawiając $p + \beta$ do równania opisującego X mamy:
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + 0 \cdot s_{r+1} + z_n = 0,$$
czyli $p + \beta \in X$.
- Wstawiając $p - \beta$ do równania opisującego X mamy:
$$a_1(-z_1)^2 + \ldots + a_r(-z_r)^2 - z_n = -2z_n \neq 0,$$
czyli $p + \beta \notin X$.
- Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że p jest środkiem symetrii X.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 2. Punkt p współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ nie należy do X.

- Mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 2. Punkt p współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ nie należy do X.

- Mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$
- Niech α będzie wektorem o współrzędnych $0, 0, \ldots, 0, a$, gdzie
$$a = -(a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n).$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 2. Punkt p współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ nie należy do X.

- Mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$
- Niech α będzie wektorem o współrzędnych $0, 0, \ldots, 0, a$, gdzie
$$a = -(a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n).$$
- Wówczas $p + \alpha \in X$ zaś $p - \alpha \notin X$. Również w tym przypadku dostaliśmy sprzeczność.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 2. Punkt p współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ nie należy do X.

- Mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$
- Niech α będzie wektorem o współrzędnych $0, 0, \ldots, 0, a$, gdzie
$$a = -(a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n).$$
- Wówczas $p + \alpha \in X$ zaś $p - \alpha \notin X$. Również w tym przypadku dostaliśmy sprzeczność.
- Twierdzenie B oraz rezultat o rozróżnianiu typu afinicznego hiperpowierzchni stopnia 2 za pomocą istnienia i położenia środków symetrii jest udowodnione.

Twierdzenie (o formach kanonicznych hiperpowierzchni właściwych)

Dla każdej hiperpowierzchni właściwej X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq s < r < n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}
$$

(a) Jeśli X jest w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ opisana równaniem postaci (ri), zaś w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ – równaniem (rj), to $i = j$.

(b) Jeśli X jest opisywana równaniami postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$, to występująca w nich liczba r jest niezależna od wyboru układu bazowego.

(c) Jeśli X jest opisywana równaniami typu (r1), to występująca w nich liczba s jest we wszystkich równaniach taka sama. Jeśli X jest opisywana równaniem (r2) lub (r3), to dla każdych dwóch różnych takich równań występujące w nich liczby s są albo jednakowe, albo ich suma wynosi r.

Twierdzenie, z którego skorzystamy (bez dowodu)

Hiperpowierzchnia stopnia 2 jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych opisjących ją w pewnym układzie bazowym równań stopnia 2 postaci

$$F_1 = 0, \quad \text{lub} \quad F_2 = 0$$

istnieje $\lambda \in K$ takie, że $F_1 = \lambda F_2$.

Założenie właściwości jest konieczne. Oto przykład. Mamy:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 0\},$$

ale dla wielomianów $F = x_1^2 + x_2^2$ oraz $G = x_1^2 + 2x_2^2$ nie istnieje $c \in K$, że $G = cF$.

Dowód tego rezultatu można znaleźć w notatkach do wykładu gwiazdkowego z zeszłego roku. Jest to dłuższy opis dowodu z dodatku do skryptu wydziałowego Profesorów Chabera i Pola.

Dowód części (b) i (c).

- Niech $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $G \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ będą wielomianami stopnia 2. Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana:
  - w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$.
  - w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem postaci $G = 0$.

Dowód części (b) i (c).

- Niech $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $G \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ będą wielomianami stopnia 2. Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana:
  - w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$.
  - w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem postaci $G = 0$.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n$. Wówczas hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $H = 0$, gdzie $H \in \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ powstaje z F przez podstawienie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Dowód części (b) i (c).

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$

Dowód części (b) i (c).

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).

Dowód części (b) i (c).

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).
- Jeśli równania $F = 0$ oraz $G = 0$ są w postaci (ri), to występująca w nich liczba r jest rzędem macierzy części kwadratowej. Zatem musi być ona taka sama w obydwu równaniach. To dowodzi (b).

Dowód części (b) i (c).

- Różnica
$$s - (r - s) = 2s - r$$
jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$.

Dowód części (b) i (c).

- Różnica
$$s - (r - s) = 2s - r$$
jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$.
- Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r, s, dla G wynoszą r', s', to
$$2s - r = \pm(2s' - r').$$

Dowód części (b) i (c).

- Różnica
$$s - (r - s) = 2s - r$$
jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$.
- Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r, s, dla G wynoszą r', s', to
$$2s - r = \pm(2s' - r').$$
- Uwzględniając $r = r'$ dostajemy albo
$$2s - r = 2s' - r,$$
czyli $s = s'$, albo
$$2s - r = -(2s' - r),$$
czyli $s' = r - s$, co dowodzi (c) odnośnie hiperpowierzchni typu afinicznego (r2) lub (r3).

Dowód części (b) i (c).

- Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy równania $F = 0, G = 0$ opisujące X są postaci (r1), to znaczy

  $F = x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2+1 = 0, \quad G = y_1^2+\ldots+y_t^2-x_{t+1}^2-\ldots-x_r^2+1 = 0.$

  Skoro H powstaje z F przez podstawienie

  $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

  i równocześnie

  $$H = cG = cy_1^2 + \ldots + cy_t^2 - xy_{t+1}^2 - \ldots - cy_t^2 + c,$$

  to musi być $w_1 = w_2 = \ldots = w_r = 0$ oraz $c = 1$.

Dowód części (b) i (c).

- Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy równania $F = 0, G = 0$ opisujące X są postaci (r1), to znaczy

  $F = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, \quad G = y_1^2 + \ldots + y_t^2 - x_{t+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0.$

  Skoro H powstaje z F przez podstawienie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

  i równocześnie

$$H = cG = cy_1^2 + \ldots + cy_t^2 - xy_{t+1}^2 - \ldots - cy_t^2 + c,$$

  to musi być $w_1 = w_2 = \ldots = w_r = 0$ oraz $c = 1$.

- Stąd w przypadku (r1) dostajemy s = t, co dowodzi część tezy (c).

Wniosek

Właściwe hiperpowierzchnie stopnia 2 nad $\mathbb{R}$ są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy opisujące je równania postaci (ri) są identyczne (z dokładnością do znaku sygnatury w przypadkach (r2), (r3).

Uzyskujemy stąd klasyfikację hiperpowierzchni właściwych stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ zaprezentowaną na ostatnim wykładzie.

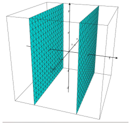
Klasyfikacja właściwych hiperpowierzchni (krzywych) stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$ jest afinicznie izomorficzna z jedną z następujących krzywych opisanych (w standardowym układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$) równaniami:

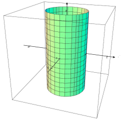
- $-x_1^2 + 1 = 0$.
  Jest to **para prostych równoległych** (równanie typu (r1)).
- $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tego typu afinicznego nazywamy **elipsą** (równanie typu (r1)).
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tą nazywamy **hiperbolą** (równanie typu (r1)).
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$.
  Jest to **para prostych przecinających się** (równanie typu (r2))..
- $x_1^2 + x_2 = 0$.
  Krzywą tą nazywamy **parabolą** (równanie typu (r2))..

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

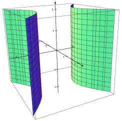
$$-x_1^2 + 1 = 0$$ **para płaszczyzn równoległych** (równanie typu (r1))



$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$ **walec eliptyczny** (równanie typu (r1))

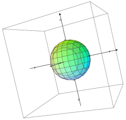


$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$ **walec hiperboliczny** (równanie typu (r1))

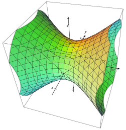


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

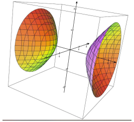
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **elipsoida** (równanie typu (r1))



$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloida jednopowłokowa** (równanie typu (r1))

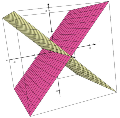


$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloida dwupowłokowa** (równanie typu (r1))

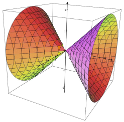


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

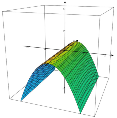
$x_1^2 - x_2^2 = 0$ **para płaszczyzn przecinających się** (równanie typu (r2))



$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ **stożek eliptyczny** (równanie typu (r2))

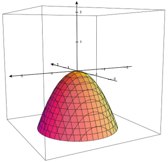


$x_1^2 + x_3 = 0$ **walec paraboliczny** (równanie typu (r3))



Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida eliptyczna** (równanie typu (r3))



$x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida hiperboliczna** (równanie typu (r3))