Geometria z Algebrą Liniową II

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 27, 14.06.2022 r.

Zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq$ 2.

Twierdzenie

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$\begin{array}{lllll} (i) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} & r = r(f) & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\ \textit{lub} & & & & \\ (ii) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} & r = r(f) < n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0. \end{array}$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$\begin{array}{lllll} (a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\ (b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0. \end{array}$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$\begin{array}{lll} (c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n, \\ (c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1, \\ (c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1. \end{array}$$

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$\begin{array}{lll} (r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\ (r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\ (r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1. \end{array}$$

Wniosek (o formach kanonicznych hiperpowierzchni właściwych)

Dla każdej hiperpowierzchni właściwej X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2+1=0 & \textit{gdzie} \quad 0\leq s<r\leq n, \\
(r2) & x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2=0 & \textit{gdzie} \quad 1\leq s<r\leq n, \\
(r3) & x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2+x_n=0 & \textit{gdzie} \quad 0\leq s<r\leq n-1.
\end{array}
$$

(1) Jeśli X jest w układzie bazowym $p_0;\mathcal{A}$ opisana równaniem postaci (ri), zaś w układzie bazowym $q_0;\mathcal{B}$ – równaniem (rj), to $i=j$.

(2) Jeśli X jest opisywana równaniami postaci (ri), dla $i=1,2,3$, to występująca w nich liczba r jest niezależna od wyboru układu bazowego.

(3) Jeśli X jest opisywana równaniami typu (r1), to występująca w nich liczba s jest we wszystkich równaniach taka sama. Jeśli X jest opisywana równaniem (r2) lub (r3), to dla każdych dwóch różnych takich równań występujące w nich liczby s są albo jednakowe, albo ich suma wynosi r.

Twierdzenie, z którego skorzystamy (bez dowodu)

Hiperpowierzchnia stopnia 2 jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych opisjących ją w pewnym układzie bazowym równań stopnia 2 postaci

$$F_1 = 0, \quad \text{lub} \quad F_2 = 0$$

istnieje $\lambda \in K$ takie, że $F_1 = \lambda F_2$.

Założenie właściwości jest konieczne. Oto przykład. Mamy:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 0\},$$

ale dla wielomianów $F = x_1^2 + x_2^2$ oraz $G = x_1^2 + 2x_2^2$ nie istnieje $c \in K$, że $G = cF$.

Dowód tego rezultatu można znaleźć w notatkach do wykładu gwiazdkowego z zeszłego roku. Jest to dłuższy opis dowodu z dodatku do skryptu wydziałowego Profesorów Chabera i Pola.

Dowód części pozostałych części wniosku

- Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$, gdzie $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oraz X opisana jest w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $G = 0$, gdzie $G \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$, przy czym F, G są wielomianami stopnia 2.

Dowód części pozostałych części wniosku

- Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$, gdzie $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oraz X opisana jest w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $G = 0$, gdzie $G \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$, przy czym F, G są wielomianami stopnia 2.
- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n$. Wówczas hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $H = 0$, gdzie $H \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$ powstaje z F przez podstawienie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).
- Jeśli równania $F = 0$ oraz $G = 0$ są w postaci (ri), to występująca w nich liczba r jest rzędem macierzy części kwadratowej. Zatem musi być ona taka sama w obydwu równaniach. To dowodzi (2).

Dowód części pozostałych części wniosku cd.

- Ponadto różnica $s-(r-s)=2s-r$ jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i=1,2,3$. Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r,s, dla G wynoszą r',s', to $2s-r=\pm(2s'-r')$, co uwzględniając $r=r'$ daje albo $2s-r=2s'-r$, czyli $s=s'$, albo $2s-r=-(2s'-r)$, czyli $s'=r-s$, co dowodzi (3) odnośnie hiperpowierzchni typu afinicznego (r2) lub (r3).

Dowód części pozostałych części wniosku cd.

- Ponadto różnica $s-(r-s)=2s-r$ jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i=1,2,3$. Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r,s, dla G wynoszą r',s', to $2s-r=\pm(2s'-r')$, co uwzględniając $r=r'$ daje albo $2s-r=2s'-r$, czyli $s=s'$, albo $2s-r=-(2s'-r)$, czyli $s'=r-s$, co dowodzi (3) odnośnie hiperpowierzchni typu afinicznego (r2) lub (r3).

- Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy równania $F=0, G=0$ opisujące X są postaci (r1), to znaczy

  $$F=x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2+1=0, \quad G=y_1^2+\ldots+y_t^2-x_{t+1}^2-\ldots-x_r^2+1=0.$$

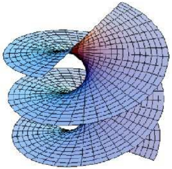
  Skoro H powstaje z F przez podstawienie (1) i równocześnie $H=cG=cy_1^2+\ldots+cy_t^2-xy_{t+1}^2-\ldots-cy_t^2+c$, to musi być $w_1=w_2=\ldots=w_r=0$ oraz $c=1$. Stąd w przypadku (r1) dostajemy s = t, koniec.

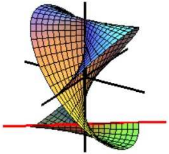
Definicja

Podzbiór X w przestrzeni afinicznej H nazwiemy **prostokreślnym**, jeśli każdy jego punkt leży na pewnej prostej, całkowicie w nim zawartej.

Przykłady.

- Zbiór rozwiązań równania $x_1^2 - x_2^2 = 0$ jest prostokreślny (to ‘dwie proste).
- Stożek oraz walec eliptyczny są prostokreślne w $\mathbb{R}^3$, ale też *helikoida* i *konoida* (a cóż to takiego?)

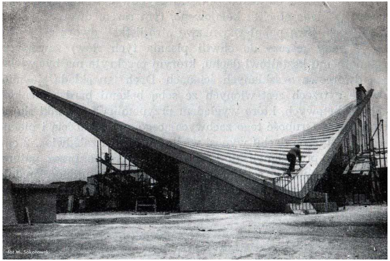




- Przestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$ jest oczywiście zbiorem prostokreślnym (który można traktować jako zbiór algebraiczny spełniający równanie $x_{n+1} = 0$ w $\mathbb{R}^{n+1}$).

Twierdzenie

Gdy X jest paraboloidą hiperboliczną lub hiperboloidą jednopowłokową, to przez każdy punkt $p \in X$ przechodzą co najmniej dwie różne proste zawarte w X.



Twierdzenie

Każdy zbiór podwójnie prostokreślny w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ jest albo płaszczyzną, albo hiperboloidą jednopowłokową, albo paraboloidą hiperboliczną.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.
- Układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle, \rangle)$ związany z bazą ortogonalną V, będziemy nazywać **prostokątnym układem współrzędnych**.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.
- Układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle , \rangle)$ związany z bazą ortogonalną V, będziemy nazywać **prostokątnym układem współrzędnych**.
- **Afinicznym układem współrzędnych** w przestrzeni afinicznej E nad K (związanym z układem bazowym $p; \mathcal{A}$) nazywamy $\phi_p : E \to K^n$ dane wzorem:

$$\phi_p(p + v) = \phi(v),$$

gdzie $p \in E$, zaś ϕ jest układem współrzędnych w $T(E)$ związanym z bazą $\mathcal{A}$. Jeśli E jest przestrzenią euklidesową i $\mathcal{A}$ jest bazą prostopadłą, wówczas mówimy, że układ ϕ_p jest prostokątny.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ – euklidesowe afiniczne oraz niech X_1, X_2 to hiperpowierzchnie odpowiednio w H_1 oraz H_2. Powiemy, że X_1 ma ten sam **typ izometryczny** co X_2, jeśli istnieje izometria $\phi : H_1 \to H_2$ taka, ze $\phi(X_1) = X_2$.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ – euklidesowe afiniczne oraz niech X_1, X_2 to hiperpowierzchnie odpowiednio w H_1 oraz H_2. Powiemy, że X_1 ma ten sam **typ izometryczny** co X_2, jeśli istnieje izometria $\phi : H_1 \to H_2$ taka, ze $\phi(X_1) = X_2$.

Twierdzenie

Każda hiperpowierzchnia właściwa stopnia 2 w przestrzeni euklidesowej afinicznej E wymiaru n jest opisana, w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych, jednym z poniższych równań, dla $a_i > 0$ nazywanych **półosiami** (Kostrikin):

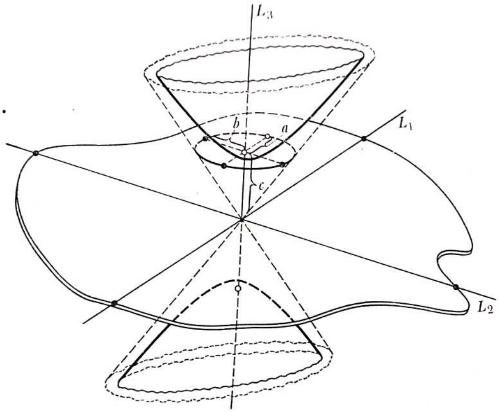
$$\begin{array}{lll}
(i1) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0, & dla \quad n \geq r > s \geq 0, \\
(i2) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, & dla \quad n \geq r > s \geq \frac{r}{2}, \\
(i3) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + x_n = 0, & dla \quad n-1 \geq r > s \geq \frac{r}{2}.
\end{array}$$

(d) *Hiperboloida dwupowłokowa*:

$$f = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + 1,$$

$$f^{-1}(0) \in EH_{21},$$

$$N(f) = \left(\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2}\right\}, 0, 1\right).$$



Jedna z wielu pięknych ilustracji z książki J. Komorowskiego
„Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów algebr Liego i kwadryk", PWN 1978.
(Każdemu gorąco polecam czytanie tej książki, a nawet jej zakup, jeśli to możliwe!)

Dowód (powtórka) Zacznijmy od dowolnego prostokątnego układu współrzędnych $p_0, \mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^n$ i niech X będzie w nim opisana równaniem:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 = x^T A x + b^T x + c,$$

gdzie $A = A^T$. Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{B}$, w której forma kwadratowa opisana w bazie $\mathcal{A}$ macierzą A ma postać diagonalną. A zatem w prostokątnym układzie współrzędnych $p_0, \mathcal{B}$ powierzchnia X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + c = 0.$$

Dowód (powtórka) Zacznijmy od dowolnego prostokątnego układu współrzędnych $p_0, \mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^n$ i niech X będzie w nim opisana równaniem:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 = x^T A x + b^T x + c,$$

gdzie $A = A^T$. Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{B}$, w której forma kwadratowa opisana w bazie $\mathcal{A}$ macierzą A ma postać diagonalną. A zatem w prostokątnym układzie współrzędnych $p_0, \mathcal{B}$ powierzchnia X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + c = 0.$$

Załóżmy, że $\lambda_i \neq 0$, dla $i \leq r$ oraz $\lambda_i = 0$, dla $i > r$. Przepisujemy równanie wyżej:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(y_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i y_i + c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2} = 0.$$

Dowód (powtórka) cd. W prostokątnym układzie $p_0, \mathcal{A}$ hiperpowierzchnia X jest opisana równaniem:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(y_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i y_i + c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2} = 0.$$

Weźmy przesunięcie:

$$p_0 + (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n) \overset{\text{izometria}}{\mapsto} p_0 + (y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \ldots, y_r + \frac{b_r}{2\lambda_r}, y_{r+1}, \ldots, y_n).$$

Przeprowadza ona dotychczasowy układ na taki, w którym X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

dla $c' = c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2}$. Teraz rozważamy trzy przypadki:

$(i)\, b_i = 0, c' = 0.$ $(ii)\, b_i \neq 0, c' = 0,$ $(iii)\, b_i \neq 0,$ dla pewnego i.

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 1. $b_i = 0, c' = 0$. Możemy założyć (ewentualnie zamieniając za pomocą izometrii kolejność zmiennych), że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0$$

(wszystkie λ_i nie mogą być jednego znaku). Wówczas biorąc

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

dostajemy postać (i2), czyli

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0.$$

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 2. $b_i = 0, c' \neq 0$. Możemy założyć (ewentualnie zamieniając za pomocą izometrii kolejność zmiennych), że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Wówczas mnożymy równanie przez $\frac{1}{c'}$ i przyjmujemy

$$a_i = \frac{\sqrt{|c_i|}}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

uzyskując postać (i1), czyli:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0.$$

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 3. $b_i \neq 0$, dla pewnego i. Możemy założyć, że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Biorąc izometrię, która przeprowadza $p_0 + z_i\alpha_i \mapsto p_0 + z_i\alpha_i$, dla $i < n$ oraz

$$p_0 + \frac{\sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c'}{\|\sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c'\|}\alpha_n \mapsto p_0 + \frac{z_n}{\|z_n\|}\alpha_n,$$

dzieląc przez $d = \|\sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c'\|/\|z_n\|$ i biorąc $a_i = \frac{\sqrt{|d|}}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ dostajemy postać (i3):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + x_n = 0.$$

A zatem pokazaliśmy, że każda hiperpowierzchnia właściwa stopnia 2 w przestrzeni euklidesowej afinicznej E wymiaru n jest opisana, w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych, jednym z poniższych równań:

$$\begin{array}{lll}
(i1) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0, & dla \quad a_i > 0,\ n \geq r > s \geq 0, \\
(i2) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, & dla \quad a_i > 0,\ n \geq r > s \geq \frac{r}{2}, \\
(i3) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + x_n = 0, & dla \quad a_i > 0,\ n-1 \geq r > s \geq \frac{r}{2}.
\end{array}$$

Twierdzenie (dowód w książce J. Komorowskiego, str. 286-288)

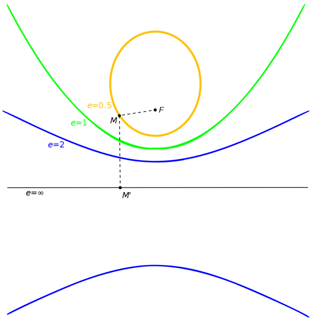
Jeśli hiperpowierzchnia wielomianowa stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$ jest w pewnym ortogonalnym układzie bazowym opisana w jednej z form (i1), (i3), to zbiór współczynników $\{a_1, \ldots, a_r\}$ nie zależy od wyboru ortogon. układu bazowego.

Idea: zacznij od (i2) i dwóch układów bazowych zaczepionych w tym samym punkcie.

Definicja

Niech $F \in \mathbb{R}^2$, niech $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą i niech $e > 0$. Stożkową o **ognisku** F, **kierownicy** K i mimośrodzie e w przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór:

$$S(F, K, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(p, F) = e \cdot \rho(p, K)\}.$$



Fakt (`https://www.mimuw.edu.pl/~ziemians/gax2015w/galx15.pdf`)

Dla $F \notin K$ stożkowa jest

- **elipsą**, dla $e < 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
- **parabolą**, dla $e = 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$x^2 = 2dy,$$
- **hiperbolą**, dla $e > 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.
- Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru $m+1$, to zbiór $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ nazywamy **podprzestrzenią rzutową** wymiaru m w $\mathbb{P}(V)$. Dla $m = n-1$ mówimy o hiperpłaszczyźnie rzutowej. Z definicji $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.
- Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru $m+1$, to zbiór $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ nazywamy **podprzestrzenią rzutową** wymiaru m w $\mathbb{P}(V)$. Dla $m = n-1$ mówimy o hiperpłaszczyźnie rzutowej. Z definicji $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$.

Inaczej: $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją równoważności na $V \setminus \{0\}$ postaci:

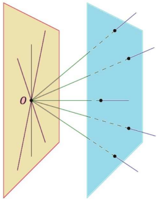
$$v \sim w \iff \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 : v = \lambda w.$$

Klasę $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$ w relacji $\sim$ nazywamy **punktem** w przestrzeni $K\mathbb{P}^n$ o (standardowych) **współrzędnych jednorodnych** $x_0, \ldots, x_n$, ozn. $(x_0 : \ldots : x_n)$.

Dwa intuicyjne modele. Model 1 w przestrzeni afinicznej K^{n+1}. Niech

$$E = \{(x_0, \ldots, x_n) \in K^n \,|\, x_0 = 1\}$$

Każda prosta nie zawarta w $T(E)$ przecina E w dokładnie jednym punkcie.
To daje utożsamienie $\mathbb{P}(K^{n+1}) \setminus \mathbb{P}(K^n)$ z E.



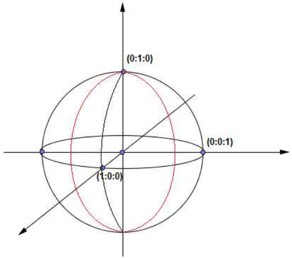
Rysunek zaadoptowany z *Algebra I, Textbook for Students of Mathematics*, A. L. Gorodentsev.

Rys. 1. Model płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$, w którym każdy punkt płaszczyzny $x_0 = 1$ to jeden z **punktów właściwych** odpowiadający pewnej prostej $\mathrm{lin}(a, b, c)$, $a \neq 0$. Proste $\mathrm{lin}(0, b, c)$ odpowiadają w tym modelu **punktom niewłaściwym.**
Za chwilę model ten zinterpretujemy jako jedną z map afinicznych przestrzeni $\mathbb{RP}^2$.

Dwa intuicyjne modele. Model 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

będzie n-wymiarową sferą. Na $\mathbb{S}^n$ wprowadzamy relację równoważności $x \sim y \iff x = -y$. Jest jasne, że istnieje bijekcja między $\mathbb{RP}^n$ oraz $\mathbb{S}^n / \sim$.



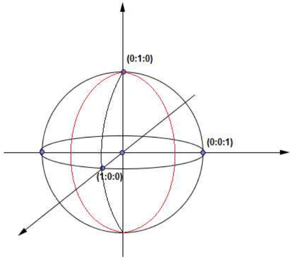
Rysunek zaadoptowany z *Imagining the projective Space*, `https://math.stackexchange.com/`.

Rys. 2. Model płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$ na $\mathbb{S}^2$, w którym każdej parze punktów antypodycznych na sferze odpowiada jednoznacznie element $\mathbb{RP}^2$. W modelu tym nie ma rozróżnienia punktów właściwych i niewłaściwych. Czym są *proste* w $\mathbb{RP}^2$?

Dwa intuicyjne modele. Model 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

będzie n-wymiarową sferą. Na $\mathbb{S}^n$ wprowadzamy relację równoważności $x \sim y \iff x = -y$. Jest jasne, że istnieje bijekcja między $\mathbb{RP}^n$ oraz $\mathbb{S}^n / \sim$.



Rysunek zaadoptowany z *Imagining the projective Space*, `https://math.stackexchange.com/`.

Inne (ważne w dalszej edukacji) modele:

- M. Donten-Bury, *Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?*, Delta, 6.2011.
- M. Kordos, *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Delta, 5.2013.

Intuicje cd. Każda podprzestrzeń rzutowa jest w (standardowych) współrzędnych jednorodnych opisana przez pewien układ równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{r0}x_0 + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Np. zbiór punktów $K\mathbb{P}^2$, których współrzędne jednorodne $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniają

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in K$ nie wszystkich równych 0 nazywamy **prostą** w $K\mathbb{P}^2$.

Intuicje cd. Każda podprzestrzeń rzutowa jest w (standardowych) współrzędnych jednorodnych opisana przez pewien układ równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{r0}x_0 + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Np. zbiór punktów $K\mathbb{P}^2$, których współrzędne jednorodne $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniają

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in K$ nie wszystkich równych 0 nazywamy **prostą** w $K\mathbb{P}^2$.

Nietrudno pokazać, że:

- Dla każdych dwóch różnych punktów w płaszczyźnie rzutowej istnieje dokładnie jedna prosta, z którą punkty te są incydentne (należą do niej).
- Na płaszczyźnie rzutowej każde dwie różne proste przecinają się w 1 punkcie.

Proszę wyrazić te zdania w języku podprzestrzeni w K^3.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Istotnie, jeśli $\alpha \notin \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\alpha = x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n$, gdzie $x_0 \neq 0$, stąd:

$$\lambda\alpha = \lambda x_0\alpha_0 + \ldots + \lambda x_n\alpha_n = \alpha_0 + \beta,$$

gdzie $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda x_0 = 1$.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Istotnie, jeśli $\alpha \notin \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\alpha = x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n$, gdzie $x_0 \neq 0$, stąd:

$$\lambda\alpha = \lambda x_0\alpha_0 + \ldots + \lambda x_n\alpha_n = \alpha_0 + \beta,$$

gdzie $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda x_0 = 1$.

Każdy punkt wspólny prostej $\mathrm{lin}(x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n)$, $x_0 \neq 0$ przecina się z A_0 na:

$$\alpha_0 + \frac{x_1}{x_0}\alpha_1 + \ldots + \frac{x_n}{x_0}\alpha_n,$$

Czyli w układzie bazowym $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w A_0 punkt przecięcia ma współrzędne:

$$u_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad \ldots \quad , u_n = \frac{x_n}{x_0}$$

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.

Definicja

Niech $(V, \langle,\rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.
- Jeśli $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ jest bazą V^* to wektory $0 \neq v = (\zeta_0(v), \ldots, \zeta_n(v))$, $0 \neq w = (\zeta_0(w), \ldots, \zeta_n(w))$ wyznaczają ten sam punkt w $p \in \mathbb{P}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne są proporcjonalne. Układ $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ nazywamy **współrzędnymi jednorodnymi** punktu p w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$.

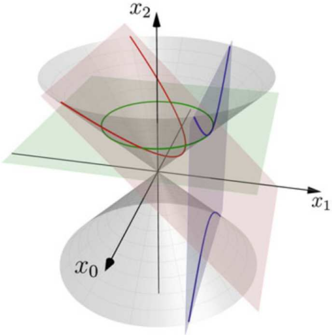
Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.
- Jeśli $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ jest bazą V^* to wektory $0 \neq v = (\zeta_0(v), \ldots, \zeta_n(v))$, $0 \neq w = (\zeta_0(w), \ldots, \zeta_n(w))$ wyznaczają ten sam punkt w $p \in \mathbb{P}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne są proporcjonalne. Układ $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ nazywamy **współrzędnymi jednorodnymi** punktu p w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$.
- Dla bazy $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ przestrzeni V^* zbiór $n+1$ map afinicznych U_{ζ_i}, dla $0 \leq i \leq n$ nazywamy **atlasem afinicznym** na $\mathbb{P}^n$. Oczywiście $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_{\zeta_i}$.

Kluczowy przykład. Rozważmy podzbiór $\mathbb{RP}^2$ złożony z punktów o współrzędnych jednorodnych $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniających:

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2.$$



Źródło: *Algebra I, Textbook for Students of Mathematics*.

- w mapie standardowej U_{x_1} opisanej równaniem $x_1 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_1}, u_2 = \frac{x_2}{x_1}$ ma równanie hiperboli:

$$u_2^2 - u_0^2 = 1.$$

- w mapie standardowej U_{x_2} opisanej równaniem $x_2 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_2}, u_2 = \frac{x_1}{x_2}$ ma równanie okręgu:

$$u_0^2 + u_1^2 = 1.$$

- w mapie niestandardowej $U_{x_1+x_2}$ opisanej równaniem $x_1 + x_2 = 1$, we współrzędnych: $t = \frac{x_0}{x_1+x_2}, u = \frac{x_2-x_1}{x_2+x_1}$ ma równanie paraboli:

$$t^2 = u.$$

Definicja

Wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ nazwiemy **jednorodnym** stopnia i, jeśli jest on sumą jednomianów stopnia i.

Przykłady.

- Wielomian $F[x, y] = x^2y + y^3$ jest jednorodny.
- Wielomian $F[x, y, z] = x^3 + y^3 + xy^2 - xyz$ jest jednorodny.

Oczywista uwaga

Jeśli funkcji wielomianowej $f : K^{n+1} \to K$ odpowiada w pewnym układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ wielomian jednorodny $F \in K[x_0, \ldots, x_n]$, to jeśli dla pewnego $p_0 + t_0\alpha_0 + \ldots + t_n\alpha_n$ mamy $f(t_0, \ldots, t_n)$, to dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0.$$

Definicja

Powiemy, że funkcja wielomianowa $f(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ na K^{n+1} **zeruje się w punkcie** $\widetilde{x} = (\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n) \in \mathbb{P}^n$, jeśli $f(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ dla dowolnych współrzędnych jednorodnych punktu $\widetilde{x}$. Innymi słowy, dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = 0.$$

Definicja

Powiemy, że funkcja wielomianowa $f(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ na K^{n+1} **zeruje się w punkcie** $\widetilde{x} = (\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n) \in \mathbb{P}^n$, jeśli $f(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ dla dowolnych współrzędnych jednorodnych punktu $\widetilde{x}$. Innymi słowy, dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = 0.$$

Jeśli $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_m$, gdzie F_i jest sumą wszystkich jednomianów stopnia i w F (tzw. **składowa jednorodna** stopnia i) jest wielomianem odpowiadającym f w pewnym układzie bazowym, zaś f_i są funkcjami wielomianowymi, którym w układzie tym odpowiadają F_i, to (ciało K jest nieskończone) z warunku

$$0 = f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = f_0 + \lambda f_1(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) + \ldots + \lambda^m f_m(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$$

dla każdego $\lambda \neq 0$ wynika, że $f_i(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) = 0$, dla każdego i. Krótko mówiąc: jeśli wielomian zeruje się w pewnym punkcie przestrzeni rzutowej, to każda jego składowa jednorodna zeruje sie na tym punkcie.

Definicja

Niech g_i będą funkcjami wielomianowymi na K^{n+1} i niech G_i będą odpowiadającymi im (w standardowym ukł. bazowym) wielomianami jednorodnymi. Zbiór $S \subset \mathbb{P}^n$ punktów $(\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n)$ spełniających warunki:

$$\begin{cases} g_1(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) & = 0 \\ \qquad \vdots & \\ g_k(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) & = 0, \end{cases}$$

nazywamy **zbiorem algebraicznym (rzutowym)**.

Teoria rzutowych zbiorów algebraicznych (zwłaszcza nad ciałem algebraicznie domkniętym) jest punktem wyjścia klasycznej geometrii algebraicznej.
Warto zapoznać się ze świetnymi materiałami prof. A. Nowickiego (UMK):
`https://www-users.mat.umk.pl/~anow/ps-dvi/rzu-sd.pdf`.

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Przykład. Przekształcenie

$$\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 : x_0 : x_2)$$

jest rzutowe. Spróbujmy zobaczyć jak wygląda *ślad* tego przekształcenia w mapie U_{x_0}. Kładąc $x_0 = 1$ dostajemy przekształcenie afiniczne:

$$\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1).$$

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Przykład. Przekształcenie $\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 : x_0 : x_2)$ jest rzutowe. Spróbujmy zobaczyć jak wygląda *ślad* tego przekształcenia w mapie U_{x_0}. Kładąc $x_0 = 1$ dostajemy przekształcenie afiniczne: $\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1)$.

Zauważmy, że kładąc $1/u_1 = u_1'$ oraz $u_2/u_1 = u_2'$ widzimy, że przeciwobraz okręgu $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$ jest hiperbolą: $1 = u_2^2 - u_1^2$, bo:

$$(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1 \iff \frac{x_0^2}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1 \iff x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 \iff u_1^2 - u_2^2 = 1.$$

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Niech $\overline{f_i} : K^n \to K$ będzie funkcją afiniczną powstałą z funkcji liniowych $f_i : K^{n+1} \to K$ przez podstawienie $x_0 = 1$. Mamy (nie wszędzie określone):

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto (\frac{\overline{f_1}}{\overline{f_0}}, \frac{\overline{f_2}}{\overline{f_0}}, \ldots, \frac{\overline{f_n}}{\overline{f_0}})$$

przekształcenie przestrzeni afinicznej K^n, utożsamianej z U_{x_0} (w siebie).

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Przykład. Przekształcenie zadane we współrzędnych lokalnych w U_{x_0} wzorem

$$(u_1, u_2) \mapsto \left(\frac{2u_1}{1+u_2}, \frac{1-u_2}{1+u_2} \right)$$

przekształca parabolę $u_2 = u_1^2$ na okrąg.

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Twierdzenie (dowód - A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, tom II, rozdział 5.4)

Każda hiperpowierzchnia rzutowa stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni rzutowej na $\mathbb{R}$ jest rzutowo równoważna (proszę sformułować definicję!) dokładniej jednej hiperpowierzchni opisanej we współrzędnych jednorodnych równaniem:

$$x_0^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \quad [r/2] \leq s < r.$$

Szereg dodatkowych uwag można też znaleźć w notatkach prof. Webera.