Aksjomatyczna definicja przestrzeni afinicznej

Wykład ten opowiada o temacie istniejącym w sylabusie, ale należy traktować go jako nieobowiązkowy.

Dotąd rozpatrywaliśmy tylko przestrzenie afiniczne będące warstwami w przestrzeniach liniowych. Jest to podejście bliskie naszej geometrycznej intuicji i dogodne w licznych zastosowaniach – nie jest ono jednak wystarczające. Trudno mówić w tym momencie precyzyjnie o powodach, ale jeden z nich jest następujący: w przyszłości będziecie Państwo badać obiekty nieliniowe i ich własności przypisując im „lokalnie" pewne obiekty liniowe i afiniczne. Nie zawsze wygodne i możliwe będzie zanurzanie owych nieliniowych obiektów w przestrzeń liniową z jednym ustalonym „układem współrzędnych" i rozpatrywanie w ramach tej przestrzeni złożonych problemów analitycznych. Stąd potrzeba, by móc w jakiś alternatywny sposób określić przestrzeń afiniczną (a nawet i przestrzeń liniową). Nakreślę dwa podstawowe podejścia prowadzące do owych alternatywnych definicji. Jedno z nich oparte jest o abstrakcyjną definicję aksjomatyczną przestrzeni afinicznej, a drugie oparte jest o ideę „obiektów niezmienniczych". Wydaje mi się też, że jest to stosowny moment, by na podstawie naszych dotychczasowych doświadczeń opowiedzieć Państwu o różnych spojrzeniach na zagadnienia geometryczne. Będzie to z jednej strony podsumowanie kolejnego etapu tego wykładu, z drugiej – wprowadzenie do problemów, którym poświęcimy pozostałe wykłady, a patrząc jeszcze szerzej – będzie to również zapowiedź tego, że na kolejnych latach studiów matematycznych poznawać będziecie Państwo problemy geometryczne „z wyższego punktu widzenia".

Zanim przejdę do przykładów przypomnę, że zarówno geometria znana ze szkoły, jak i teoria przestrzeni liniowych są teoriami aksjomatycznymi. To znaczy: geometria, którą uprawiamy w szkole oparta jest o pięć aksjomatów Euklidesa, a także o intuicyjne rozumienie prostokątnego układu współrzędnych – tak samo jak rozumieli je Kartezjusz czy Fermat. Aksjomatyka Euklidesa ma pewne wady, bo niestety w języku geometrii na niej opartej można wypowiadać zdania, których prawdziwości ani fałszywości nie da się uzasadnić (np. tzw. aksjomat Pascha lub twierdzenie Desargues'a) – innymi słowy system aksjomatów Euklidesa nie jest zupełny. Co więcej, nie jest to jedyny problem.

Jest też inny problem, którego oczywiście nie poruszyliśmy w szkole: kwestia niesprzeczności systemu aksjomatów Euklidesa. Czy przypadkiem z niektórych aksjomatów nie da się wyprowadzić zaprzeczenia innego? Co więcej – czy jeśli zaprzeczymy jednemu z aksjomatów Euklidesa i dołożymy go do pozostałych – dostaniemy sprzeczny układ aksjomatów, czy raczej nową aksjomatykę – nieeuklidesowej geometrii? Problemy te wywoływały wielkie kontrowersje przez cały XIX wiek. Począwszy od przełomowych *Grundlagen der Geometrie* Hilberta (1899), wiele wysiłków poświęcono formułowaniu aksjomatyk, które dawałyby niesprzeczność, a nawet rozstrzygalność nie tylko geometrii euklidesowej, ale i całej matematyki. Wydaje się jednak, że od drugiej połowy XX wieku dyskusje o formalizacji matematyki odeszły w cień rodzącego się nowego podejścia, opartego o język teorii kategorii.

W geometrii afinicznej zaś badamy obiekty odnoszące się silnie do „rzeczywistości", w której żyjemy. Bardziej niż w przypadku przestrzeni liniowych, strukturze afinicznej przypisujemy miano „geometrii świata" – co prowadzi naturalnie do wielu trudnych pytań. Można zastanawiać się czy wobec wielu bardzo egzotycznych przestrzeni liniowych (gdzie wektorami mogą być grafy, słowa itd.) nie jest pewnym nadużyciem traktowanie środowiska, w którym uprawiamy geometrię jako podzbioru takich przestrzeni? Co więcej, w przestrzeniach liniowych wyróżniony jest zawsze wektor zerowy, a geometria świata rzeczywistego takiego punktu wyróżnionego (jak się wydaje) nie posiada. Rzecz jasna aksjomatyka przestrzeni liniowych czerpie z intuicji fizycznych, ale pojawiają się pewne ograniczenia.

Rozważania fizyczne prowadzone były od XVII wieku m.in. w oparciu o sformułowaną przez Galileusza tzw. *zasadę względności* mówiącą poglądowo, że prawa fizyki w dwóch inercjalnych układach odniesienia są takie same. A jednak choć w różnych układach odniesienia prawa fizyki mają być te same, ich „postrzeganie" i „opisywanie" stawia wielkie matematyczne wyzwania. Opis zjawisk fizycznych chętnie czerpał z geometrii analitycznej Kartezjusza i Fermata, i możliwości przedstawiania obiektów w układach współrzędnych, a następnie pracowicie tworzył sposoby przechodzenia z jednego układu odniesienia do drugiego. W tym kluczu możemy między innymi interpretować przestrzenie liniowe i ich endomorfizmy – przechodząc z macierzy przekształcenia w jednej bazie do innej „zmieniamy układ odniesienia". Zawsze jednak istniało napięcie związane z pytaniem: czy istnieje „uniwersalny układ inercjalny", albo z jego nieprecyzyjną, ale obrazową wersją: czy ktokolwiek we Wszechświecie jest w stanie stwierdzić czy się porusza, czy nie?

Problem 1. Rozważmy podzbiór P przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$ postaci

$$P = \{(x, x^2), \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Jest to wykres funkcji kwadratowej lub inaczej mówiąc: parabola. Nie jest to z pewnością warstwa względem podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{R}^2$, a jednak łatwo można wprowadzić w niej strukturę do złudzenia przypominającą afiniczną. Wystarczy rozważyć bijekcję: $f : P \to \mathbb{R}$ postaci $(x, x^2) \mapsto (x, 0)$ i przyjąć za „przestrzeń wektorów swobodnych" przestrzeni P podprzestrzeń liniową $\text{lin}(1, 0)$. Definiujemy dalej operację dodawania do punktu $(x, x^2) \in P$ wektora $\alpha \in \text{lin}(1, 0)$ w następujący sposób:

$$(x, x^2) \boxplus (a, 0) = ((x + a), (x + a)^2).$$

Krótko mówiąc przenosimy na P strukturę afiniczną prostej afinicznej $(0, 0) + \text{lin}(1, 0)$, czyli P jest zbiorem punktów, a $\text{lin}(\alpha)$ jest jakby przestrzenią wektorów swobodnych. Jeśli ktoś powie, że to oszustwo, bo ta struktura nie mówi nic o zakrzywieniu P odpowiem – cóż z tego? Nie używam dodawania w $\mathbb{R}^2$, ale jakiegoś innego – ok, ale skutek wydaje się ten sam. Czy jestem w stanie powyższą strukturę zrealizować jako warstwę podprzestrzeni w pewnej przestrzeni liniowej? Mogę, ale po co miałbym to robić? Już jako podzbiór w $\mathbb{R}^2$ zbiór P z dodatkową strukturą dodawania $\boxplus$ do elementu $p \in P$ wektora $\alpha \in \text{lin}(1, 0)$ dostatecznie przypomina przestrzeń afiniczną.

Problem 2. Przypuśćmy, że interesuje nas zbiór wszystkich przekształceń afinicznych $A(H_1, H_2)$ z przestrzeni afinicznej H_1 do przestrzeni afinicznej H_2, przy czym zakładamy, że przestrzenie te są zawarte w przestrzeniach liniowych V, W nad ciałem K. W przypadku przekształceń liniowych wiemy, że $L(V, W)$ ma również strukturę przestrzeni liniowej. Czy zbiór $A(H_1, H_2)$ ma strukturę przestrzeni afinicznej? Czy jest to po prostu warstwa w $L(V, W)$?

Okazuje się, że $A(H_1, H_2)$ to niekoniecznie warstwa w $L(V, W)$. Pewnym (solidnym) wysiłkiem można pokazać, że da się $A(H_1, H_2)$ intepretować jako warstwę w przestrzeni przekształceń $L(\widetilde{H_1}, \widetilde{H_2})$ pomiędzy pewną przestrzenią liniową $\widetilde{H_1}$ wymiaru $\dim(H_1) + 1$, a pewną przestrzenią liniową $\widetilde{H_2}$ wymiaru $\dim(H_2) + 1$. Definicje $\widetilde{H_1}$, $\widetilde{H_2}$ nie są bardzo trudne (występują one na przykład pod nazwą przestrzeni punktów materialnych). Czy jednak nie widzicie Państwo, że „dodając" do przekształcenia $f \in A(H_1, H_2)$ element $L(T(H_1), T(H_2))$ dostajemy znowu element $A(H_1, H_2)$? Tylko co to za dodawanie?

Definicja 46. *Niech W będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.* PRZESTRZENIĄ AFINICZNĄ *nad ciałem K o* PRZESTRZENI WEKTORÓW SWOBODNYCH *W nazywamy niepusty zbiór H wraz z odwzorowaniem:*

$$H \times W \longrightarrow H, \quad (p, \alpha) \mapsto p \boxplus \alpha,$$

zwanym `dodawaniem wektora do punktu`*, przy czym spełnione są następujące warunki, zwane aksjomatami przestrzeni afinicznej.*

(1) Dla każdych $\alpha, \beta \in W$ i każdego $p \in H$ mamy:

$$p \boxplus 0 = p, \quad p \boxplus (\alpha + \beta) = (p \boxplus \alpha) \boxplus \beta.$$

(2) Dla każdych $p, q \in H$ istnieje dokładnie jeden $\alpha \in W$ taki, że $p \boxplus \alpha = q$.

Elementy przestrzeni H nazywamy PUNKTAMI *przestrzeni H.*

Przykłady:

- Przestrzenie afiniczne rozpatrywane dotąd jako warstwy podprzestrzeni liniowych w przestrzeniach liniowych są przestrzeniami afinicznymi w sensie powyższej definicji. Jeśli $H \subseteq V$ jest warstwą podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V, to dla każdego $p \in H$ i każdego $\alpha \in W$ mamy $p + \alpha \in H$, więc rolę odwzorowania $\boxplus : H \times W \longrightarrow H$ gra tu po prostu dodawanie wektorów zapożyczone z V.

- Jeśli H_1, H_2 są przestrzeniami afinicznymi nad K, to

  $$H_1 \times H_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in H_1, p_2 \in H_2\}$$

  jest przestrzenią afiniczną nad K. Jeśli W_1, W_2 są przestrzeniami wektorów swobodnych przestrzeni H_1, H_2, odpowiednio, to $W_1 \times W_2$ jest przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni $H_1 \times H_2$.

- Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $X \neq \emptyset$. Wówczas $P(X, H) = \{$ funkcje $X \to H\}$ jest przestrzenią afiniczną nad K. Jeśli W jest przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni H, to $F(X, W)$ jest przestrzenią wektorów swobodnych przestrzeni $F(X, H)$.

- Jeśli H_1, H_2 są przestrzeniami afinicznymi nad K, to zbiór $A(H_1, H_2)$ wszystkich przekształceń afinicznych z H_1 do H_2 jest przestrzenią afiniczną nad K. Jeśli W_1, W_2 są przestrzeniami wektorów swobodnych przestrzeni H_1, H_2, to $L(W_1, W_2)$ jest przestrzenią wektorów swobodnych $A(H_1, H_2)$.

- Struktura $(P, \mathrm{lin}(1, 0), \boxplus)$ rozważana w problemie pierwszym jest przestrzenią afiniczną.

Zarówno podejście aksjomatyczne do geometrii afinicznej, jak i podejście oparte na traktowaniu przestrzeni afinicznych jako warstwy ma pewne zauważalne już wady. W ujęciu aksjomatycznym wydajemy się mieć za dużą swobodę, mogąc choćby tak jak w problemie pierwszym przypisać strukturę afiniczną niemal dowolnemu obiektowi. W ujęciu „warstwowym" – zasadniczo nie tracimy nic ze swobody, jaką daje nam podejście aksjomatyczne, ale trafiamy do drugiego ekstremum: musimy traktować „liniowo" obiekty, które jako takie nie mają natury liniowej. Tak było w przypadku paraboli opisanej w problemie pierwszym. Parabola jest jednak niedoskonałym przykładem, bo choć nie jest warstwą, to jednak jej „naturę" odczytujemy stąd, że jest opisana w afinicznym układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Gdybyśmy nie wiedzieli, że P składa się z punktów postaci (x, x^2), słabiej byśmy oponowali przeciwko myśleniu o $(P, \mathrm{lin}(1,0), \boxplus)$ jako o prostej afinicznej.

Każdej przestrzeni afinicznej zdefiniowanej przez aksjomaty można w sposób jednoznaczny przypisać izomorficzną z nią – czyli identyczną pod względem abstrakcyjnej struktury afinicznej – warstwę pewnej podprzestrzeni. Służy temu konstrukcja tzw. przestrzeni uniwersalnej.

Problem ten rozważa się także w ogólnej sytuacji: mamy pewien zbiór X i nie mamy w nim struktury liniowej. Czasem nie chcemy myśleć o naszym obiekcie jako zanurzonym w przestrzeni liniowej z układem współrzędnych, nawet w ten sposób, w jaki parabola P z problemu pierwszego była związana z $\mathbb{R}^2$. Naprawdę nie traktujemy X jako części większej całości tylko jako obiekt sam w sobie. Co można powiedzieć o jego geometrii? To wbrew pozorom niezwykle ważne pytanie, zwłaszcza gdy ze zbiorem X związane są pewne funkcje, przez których badanie możemy wypowiadać się o naturze geometrycznej tego zbioru. Pięknie o tym pisze prof. Toruńczyk w swoich notatkach (`https://duch.mimuw.edu.pl/~torunczy/GAL/011-12/Wyk/VIII-AFI.pdf`), mówiąc o intuicji pojęcia, zwanego ROZMAITOŚCIĄ.

> „Przypuśćmy, że grono osób bada niedostępny obiekt $\mathbb{A}$ (np. powierzchnię niewidocznej strony Księżyca), mając do dyspozycji pewien zbiór jego map, rozdzielonych między badających. Jeśli ktoś zaproponuje nazwanie zbioru $X \subseteq \mathbb{A}$ elipsą, gdy na jego mapie zbiór ten jest odzwierciedlony jako elipsa, to natychmiast pojawia się pytanie, czy na innych mapach też jest on tak odzwierciedlony. Oznaczmy przez S_i przekształcenie, które punktowi zbioru $\mathbb{A}$ przyporządkowuje jego obraz na i-tej mapie. Wówczas $S_j S_i^{-1}$ przyporządkowuje punktom i-tej mapy odpowiadające im punkty mapy j-tej. Możliwość uzgodnienia przez badających, jakie zbiory $\mathbb{A}$ nazwać elipsami, zależy od tego, czy wszystkie PRZEKSZTAŁCENIA ZMIANY MAP przeprowadzają elipsy na elipsy. Ogólniej, badający zdołają uzgodnić te pojęcia dotyczące obiektu $\mathbb{A}$, które są niezmiennicze względem wszystkich tych przekształceń. (Zostawiamy tu pewne niedopowiedzenie.) [...] Materiał ten jest ważny i dlatego, że stwarza pewien zakres pojęć umożliwiających badanie przestrzeni, w której żyjemy – co było zadaniem geometrii od jej początków. Zadanie to o tyle sobie ułatwiamy, że istnienie odpowiednio zgodnych map przyjmujemy, podczas gdy ważnym osiągnięciem geometrii klasycznej było odkrycie ich istnienia i wskazanie sposobów konstrukcji."

Zaczęliśmy rozważania tego wykładu od nadania paraboli w sposób sztuczny struktury afinicznej przez przypisanie jej jednej tylko „mapy". To skrajny przykład zaprzeczający idei powyższych rozważań. „Poprawne" nadanie paraboli P zestawu funkcji $S_i : P \to \mathbb{R}^2$, które jednoznacznie **wyróżniają ją** w zbiorze innych (pewnych) podzbiorów $\mathbb{R}^2$, opisanych innymi zestawami map (i opisanie sposobów na porównywanie „zestawów map") – to jest właściwy problem. Unikam tu jak mogę precyzyjnego języka – kiedyś na analizie i geometrii różniczkowej poznacie Państwo szczegóły. Powiem tylko, że podejście to pozwala na jeszcze inną definicję przestrzeni afinicznej wymiaru n nad ciałem K – mianowicie jako zbioru $\mathbb{A}$ z wyróżnioną rodziną bijekcji $M_{\mathbb{A}}$ idących z $\mathbb{A}$ do K^n takich, że dla $f_1, f_2 \in M_{\mathbb{A}}$ odwzorowanie $f_1 f_2^{-1}$ należy do przestrzeni przekształceń afinicznych $A(K^n, K^n)$. Podejście to, opisane w notatkach prof. Toruńczyka, pozwala widzieć rozmaite obiekty geometryczne jako „niezmiennicze" przy działaniu pewnych „grup przekształceń". Sposób ten promował F. Klein w słynnym programie erlangeńskim (1872 r.). Nie sposób wejść w szczegóły, ale chciałbym przynajmniej powiedzieć co rozumieć przez „obiekty niezmiennicze".

Weźmy zbiór X bez żadnej „odziedziczonej" struktury. Do badania X będziemy mieli do dyspozycji zestaw przekształceń $\mathcal{F}$ zbioru X w siebie. Umówimy się, że jeśli dla pewnego podzbioru $O \subseteq X$ mamy $f(O) = O$, dla każdego $f \in \mathcal{F}$, to zbiór O nazywamy *$\mathcal{F}$-okręgiem*. Uwaga: nic nie wiemy ani o zbiorze O, ani o X (może to np. zbiór Cantora), a nawet nic wstępnie nie zakładamy o $\mathcal{F}$. Przy tak minimalistycznym podejściu wydaje się, że zbieżność nazewnictwa *$\mathcal{F}$-okręgu* z „prawdziwymi okręgami" (czyli czym?) jest zupełnie przypadkowa i bezzasadna. Czy rzeczywiście? Umówmy się zatem, że jeśli w zbiorze X istnieje inny podzbiór: P taki, że tylko dwa przekształcenia z $\mathcal{F}$ (a nie wszystkie) zachowują P, to P nazywamy *$\mathcal{F}$-prostokątem*. Nonsens? Pojęcia $\mathcal{F}$-okręgu i $\mathcal{F}$-prostokąta pozbawione są być może na pozór geometrycznego sensu – ale można pytać co nas dokładnie interesowało? Myślenie geometryczne polegające na rozróżnianiu obiektów ze względu na pewne niezmienniki jest niezwykle ciekawe i prowadzi do głębokich pytań, zupełnie innych jakościowo od pytań geometrii szkolnej. Proces formułowania problemów bywa nie mniej fascynujący, co samo poszukiwanie na nie rozwiązania. Ot choćby: jak wysłowić różnicę między preclem, a pączkiem, czyli między torusem i sferą (dwuwymiarowymi)? Przecież „widzimy" tę różnicę („dziura"), ale jak ująć tę różnicę w pojęcia matematyczne i sformułować odpowiedni wynik? Pytanie brzmi nieco naiwnie, a dotyczy niezwykle ważnych problemów. Na tym kończymy przegląd intuicji przestrzeni afinicznej.