Przekształcenia afiniczne

Na tym wykładzie omawiamy pojęcie przekształcenia afinicznego, czyli takiego przekształcenia pomiędzy przestrzeniami afinicznymi, które zachowuje kombinacje afiniczne. Przekształcenie takie przeprowadza na przykład trójki punktów współliniowych na trójki punktów współliniowych. Z algebraicznego punktu widzenia: mamy w pewnych przestrzeniach liniowych V, W zawarte przestrzenie afiniczne H i M i szukamy przekształceń $f : H \to M$, które zachowują operację wektora łączącego zdefiniowaną na V oraz W. Oznacza to, że z przekształceniem f stowarzyszone jest pewne przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ takie, że

$$\phi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Wykażemy, że są to podejścia równoważne. Zacznijmy od podejścia algebraicznego.

Fakt 54. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K i niech $\phi : T(H) \to T(M)$ będzie przekształceniem liniowym. Dla dowolnej funkcji $f : H \to M$ następujące warunki są równoważne:*

To twierdzenie daje nam dwa warunki charakteryzujące ów związek pomiędzy poszukiwanymi (i jeszcze niezdefiniowanymi) przekształceniami przestrzeni afinicznych, a odpowiadającymi im przekształceniami liniowymi zachowującymi wektory łączące (to dokładnie wyraża warunek (3)). Punkt (1) podaje wprost „przepis" na znalezienie każdego takiego przekształcenia $f : H \to M$ mając dane przekształcenie $\phi : T(H) \to T(M)$. Warunek ten mówi, że po ustaleniu na co ma przechodzić jeden wybrany punkt z przestrzeni H możemy, wykorzystując ϕ, określić jednoznacznie przekształcenie f.

(1) istnieją punkty $p_0 \in H$, $q_0 \in M$ takie, że dla każdego punktu $p \in H$ zachodzi

$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p}),$$

(2) dla każdego $p \in H$ i każdego $\alpha \in T(H)$:

$$f(p+\alpha) = f(p) + \phi(\alpha),$$

(3) dla każdych $p, p' \in H$ mamy:

$$\phi\left(\overrightarrow{pp'}\right) = \overrightarrow{f(p)f(p')}.$$

Dowód. Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Z (1) wynika, że $f(p_0) = q_0$. Co więcej, dla każdego $p \in H$ oraz $\alpha \in T(H)$ mamy $p + \alpha = p_0 + \overrightarrow{p_0p} + \alpha$. Stąd

$$f(p+\alpha) = f(p_0 + \underbrace{\overrightarrow{p_0p} + \alpha}_{\in T(H)}) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p} + \alpha) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p}) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\alpha).$$

Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (3). Weźmy dowolne punkty $p, p' \in H$ i niech $\alpha = \overrightarrow{pp'}$. Wówczas $p' = p + \alpha$, więc:

$$f(p') = f(p+\alpha) = f(p) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\overrightarrow{pp'}).$$

Stąd $\phi(\overrightarrow{pp'}) = f(p') - f(p) = \overrightarrow{f(p)f(p')}$.

Dowodzimy (3) $\Rightarrow$ (1). Weźmy dowolny punkt $p_0 \in H$ i przyjmijmy $q_0 = f(p_0)$. Wówczas dla każdego $p \in H$ mamy

$$\phi(\overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p)} = \overrightarrow{q_0f(p)},$$

więc $f(p) = q_0 + \overrightarrow{q_0f(p)} = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p})$. □

Drugie, bardzo naturalne z geometrycznego punktu widzenia podejście każe szukać przekształceń, które zachowują kombinacje afiniczne wektorów. Poniższe twierdzenie mówi, że przekształcenia te uzyskiwane są jedynie w sposób opisany wyżej.

Fakt 55. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K. Wówczas dla funkcji $f : H \to M$ następujące warunki są równoważne:*

(1) dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz układu wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ mamy $f(a_0p_0 + \ldots + a_kp_k) = a_0f(p_0) + \ldots + a_kf(p_k)$,

(2) istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p})$.

Dowód. Wykażemy (1) $\Rightarrow$ (2). Wybierzmy $p_0 \in H$ i określmy przekształcenie $\phi : T(H) \to T(M)$ wzorem

$$\phi(\alpha) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha)} = f(p_0+\alpha) - f(p_0).$$

Wykażemy, że ϕ jest liniowe. Niech $\alpha, \beta \in T(H)$. Wówczas $p_0 + \alpha + \beta$ jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, p_0 + \alpha, p_0 + \beta$ z wagami $-1, 1, 1$ postaci:

$$p_0 + \alpha + \beta = -p_0 + (p_0 + \alpha) + (p_0 + \beta).$$

Z warunku (1) dostajemy więc, że:

$$f(p_0 + \alpha + \beta) = -f(p_0) + f(p_0 + \alpha) + f(p_0 + \beta).$$

A zatem z definicji ϕ mamy:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha+\beta) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha+\beta)} = \\
&= f(p_0+\alpha+\beta) - f(p_0) = \\
&= -f(p_0) + f(p_0+\alpha) + f(p_0+\beta) - f(p_0) = \\
&= f(p_0+\alpha) - f(p_0) + f(p_0+\beta) - f(p_0) = \\
&= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha)} + \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\beta)} = \\
&= \phi(\alpha) + \phi(\beta)
\end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$ oraz dla każdego $a \in K$. Jednak również wektor $p_0 + a\alpha$ możemy przedstawić jako kombinację afiniczną postaci

$$p_0 + a\alpha = a(p_0 + \alpha) + (1 - a)p_0,$$

otrzymując stąd równość:

$$f(p_0 + a\alpha) = af(p_0 + \alpha) + (1 - a)f(p_0).$$

W rezultacie opierając się ponownie na definicji ϕ mamy:

$$\begin{aligned}
\phi(a\alpha) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0 + a\alpha)} = \\
&= f(p_0 + a\alpha) - f(p_0) = \\
&= af(p_0 + \alpha) + (1 - a)f(p_0) - f(p_0) = \\
&= a(f(p_0 + \alpha) - f(p_0)) = \\
&= a\phi(\alpha).
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że zdefiniowane przez nas ϕ jest przekształceniem liniowym. Trzeba jeszcze sprawdzić, że spełnia ono wymagania postawione w (2). Z definicji ϕ mamy jednak: $f(p_0 + \alpha) = f(p_0) + \phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$. Przyjmując więc $q_0 = f(p_0)$ dostajemy:

$$f(p) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0 p}) = f(p_0) + \phi(\overrightarrow{p_0 p}) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (1). Przypuśćmy więc, że istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty $v \in H, z \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ zachodzi $f(p) = z + \phi(\overrightarrow{vp})$ (w szczególności $f(v) = z$). Wówczas dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ i wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ mamy:

$$a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = v - (a_0 + \ldots + a_k)v + a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = v + a_0\overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{vp_k},$$

Zatem

$$\begin{aligned}
f(a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k) &= f(v + a_0\overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{vp_k}) = \\
&\overset{\text{Fakt 54(2)}}{=} z + \phi(a_0\overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{vp_k}) = \\
&= z + a_0\phi(\overrightarrow{vp_0}) + \ldots + a_k\phi(\overrightarrow{vp_k}) = \\
&\overset{\text{Fakt 54(3)}}{=} z + a_0\overrightarrow{f(v)f(p_0)} + \ldots + a_k\overrightarrow{f(v)f(p_k)} = \\
&= z + a_0\overrightarrow{zf(p_0)} + \ldots + a_k\overrightarrow{zf(p_k)} = \\
&= a_0(z + \overrightarrow{zf(p_0)}) + \ldots + a_k(z + \overrightarrow{zf(p_k)}) = \\
&= a_0 f(p_0) + \ldots + a_k f(p_k).
\end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie motywuje następującą definicję.

Definicja 44. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K. Mówimy, że funkcja $f : H \to M$ jest* PRZEKSZTAŁCENIEM AFINICZNYM, *jeśli f spełnia jeden z równoważnych warunków:*

(1) dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz układu wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ mamy $f(a_0p_0 + \ldots + a_kp_k) = a_0f(p_0) + \ldots + a_kf(p_k)$,

(2) istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p})$.

Przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ z warunku (2) nazywamy POCHODNĄ *(albo* PRZEKSZTAŁCENIEM WEKTORÓW SWOBODNYCH*) przekształcenia afinicznego f i oznaczamy f'.*

Z pierwszego udowodnionego dziś twierdzenia wynika, że ϕ jest przekształceniem wyznaczonym jednoznacznie przez f, niezależnie od wyboru p_0 i $q_0 = f(p_0)$. Rozważmy kilka przykładów.

- Niech przekształcenie $f : K^2 \to K^3$ będzie zadane wzorem
$$f((x_1, x_2)) = (x_1 + 2, x_2 + 1, x_2).$$
Jest to przekształcenie afiniczne, na mocy warunku (2) w definicji, gdyż mamy przekształcenie liniowe $\phi : K^2 \to K^3$ dane wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, x_2)$ oraz punkty $p_0 = (0, 0), q_0 = (2, 1, 0)$ takie, że
$$f((x_1, x_2)) = (2, 1, 0) + \phi(x_1 - 0, x_2 - 0) = (2, 1, 0) + \phi(x_1, x_2).$$

- Niech
$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$
$$M = \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid x_1 - x_2 = 2\}.$$
Funkcja $f : H \to M$ dana wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, -x_2 - x_3 - 1)$ jest przekształceniem afinicznym. Mamy
$$T(H) = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$T(M) = \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}.$$
Zauważmy, że $\phi(T(H)) = T(M)$, gdzie $\phi : K^3 \to K^2$ dane jest wzorem
$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, -x_2 - x_3).$$
A zatem możemy określić $f' = \phi|_{T(H)} : T(H) \to T(W)$ oraz przyjąć $p_0 = (0, -1, 2)$, $q_0 = (0, -2)$.

- Niech V, Z będą przestrzeniami liniowymi nad K. Każde przekształcenie liniowe $\phi : V \to Z$ jest przekształceniem afinicznym, przy czym $\phi' = \phi$. Każde przekształcenie afiniczne $f : V \to Z$ jest postaci
$$f(\alpha) = f(0 + \alpha) = f(0) + f'(\alpha).$$

- Każda parametryzacja $K^n \to H$ przestrzeni afinicznej H jest przekształceniem afinicznym.
- Każde przekształcenie afiniczne $f : K^n \to K^m$ jest zadane wzorem:

  $$f((x_1, \ldots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m),$$

  gdzie $(b_1, \ldots, b_m) = f((0, \ldots, 0))$ oraz f' to przekształcenie liniowe o macierzy $M(f')^{st}_{st} = A = [a_{ij}]$.

Kilka ważnych klas przekształceń afinicznych.

- Dla każdych przestrzeni afinicznych H, M nad K i każdego $q \in M$ przekształcenie $f : H \to M$ stałe, o wartości q jest afiniczne. Przy tym $f' = 0$.
- Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $\alpha \in T(H)$. Przekształcenie $f : H \to H$ spełniające $f(p) = p + \alpha$, dla każdego $p \in H$ jest afiniczne. Nazywamy je PRZESUNIĘCIEM RÓWNOLEGŁYM O WEKTOR α i oznaczamy τ_α. Zatem $(\tau_\alpha)' = \mathrm{id}$.
- Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K, niech $p_0 \in H$ i $a \in K$. Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p_0) = p_0$ oraz $f' = a\,\mathrm{id}$ nazywamy JEDNOKŁADNOŚCIĄ O ŚRODKU p_0 I SKALI a.
- Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K oraz $T(H) = W_1 \oplus W_2$. Dla $p_1, p_2 \in H$ określamy podprzestrzenie afiniczne $H_1 = p_1 + W_1$, $H_2 = p_2 + W_2$. Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że f' jest rzutem na W_1 wzdłuż W_2 oraz $f(p_1) = p_1$ nazywamy RZUTEM na H_1 wzdłuż H_2. Przekształcenie afiniczne $g : H \to H$ takie, że $g(p_1) = p_1$ oraz g' jest symetrią względem W_1 wzdłuż W_2 nazywamy SYMETRIĄ względem H_1 wzdłuż H_2.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znajdziemy $s(1, 0, 1)$ oraz wyznaczymy wzór przekształcenia s.

Niech $p = (1, 0, 1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$. Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym

$$\underbrace{(1, 1, 0)}_{\in H}; \underbrace{(1, 0, 1), (0, 1, 1)}_{\in T(H)}.$$

Zatem obraz punktu $r = (1, 1, 0) \in H$ w tej symetrii to $s(r) = (1, 1, 0)$.

Rozważmy wektor $\overrightarrow{rp}$ równy $(0, -1, 1)$. Znajdźmy współrzędne tego wektora w bazie $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$). Mamy:

$$(0, -1, 1) = 4(1, 0, 1) + 1(0, 1, 1) - 2(2, 1, 2).$$

A zatem z definicji symetrii liniowej s':

$$\begin{aligned} s'(0,1,-1) &= 4s'(1,0,1) + 1s'(0,1,1) - 2s'(2,1,2) = \\ &= 4(1,0,1) + 1(0,1,1) + 2(2,1,2) = (8,3,9). \end{aligned}$$

Zatem

$$s(p) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp}) = (1,1,0) + (8,3,9) = (9,4,9).$$

Przejdźmy do wyznaczenia wzoru na s. Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $(1,1,0);(1,0,1),(0,1,1)$. Zatem obraz punktu $r = (1,1,0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1,1,0)$. Dla $x \in \mathbb{R}^3$ mamy zatem $s(x) = s(r) + s'(\overrightarrow{rx})$, czyli w bazie standardowej:

$$s\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M(s')_{st}^{st}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Oczywiście biorąc bazę $\mathcal{A} = ((1,0,1),(0,1,1),(2,1,2))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$) wyznaczamy macierz

$$M(s')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i stąd potem (znanymi metodami) wyznaczamy $M(s')_{st}^{st}$.

Powyższe przykłady odnoszą się do podejścia algebraicznego z punktu (2) definicji przekształcenia afinicznego. Z geometrycznego punktu widzenia kluczowe są poniższe obserwacje, które dowodzimy podobnie jak odpowiednie fakty w przestrzeniach liniowych.

Fakt 56. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K.*

- *Jeśli $p_0, \ldots, p_n$ jest bazą punktową przestrzeni H oraz $q_0, \ldots, q_n$ jest dowolnym układem punktów przestrzeni M, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ takie, że $f(p_i) = q_i$, dla $i = 0, \ldots, n$. Jest ono zadane przez:*

  $$f(a_0 p_0 + \ldots + a_n p_n) = a_0 q_0 + \ldots + a_n q_n,$$

  dla dowolnych wag $a_0, \ldots, a_n \in K$.

- *Jeśli $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest układem bazowym przestrzeni H oraz $q_0 \in M$, a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest dowolnym układem wektorów w $T(M)$, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ takie, że $f(p_0) = q_0$ oraz $f'(\alpha_i) = \beta_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Jest ono zadane wzorem*

  $$f(p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = q_0 + a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n,$$

  dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$.

Definicja 45. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K. Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ jest* IZOMORFIZMEM, *jeśli f jest różnowartościowe i na. Mówimy, że przestrzenie H, M są* IZOMORFICZNE, *jeśli istnieje izomorfizm $f : H \to M$.*

Poniższa charakteryzacja izomorfizmów przestrzeni afinicznych jest bezpośrednią konsekwencją odpowiedniej charakteryzacji izomorfizmów przestrzeni liniowych i związku między nimi.

Fakt 57. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K i niech $f : H \to M$ będzie przekształceniem afinicznym. Następujące warunki są równoważne:*

- *f jest izomorfizmem,*
- *f przeprowadza pewną (każdą) bazę punktową przestrzeni H na bazę punktową przestrzeni M,*
- *istnieje przekształcenie afiniczne $g : M \to H$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_H$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_M$,*
- *$f' : T(H) \to T(M)$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.*

Przesunięcia równoległe, jednokładności o skalach różnych od 0, symetrie – są przykładami izomorfizmów afinicznych. Skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam wymiar. Stąd wynika wniosek.

Fakt 58. *Niech H, M będę skończenie wymiarowymi przestrzeniami afinicznymi nad K. Przestrzenie H, M są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim T(H) = \dim T(M)$.*

Fakt 59. *Każda n-wymiarowa przestrzeń afiniczna nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną K^n.*

Teraz, motywowani badaniem przestrzeni afinicznych skończonego wymiaru, przyjrzymy się związkom pomiędzy przekształceniami afinicznymi i macierzami przekształceń pochodnych.

Fakt 60. *Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K, niech $p_0, \mathcal{A}$ będzie układem bazowym przestrzeni H oraz niech $q_0, \mathcal{B}$ będzie układem bazowym przestrzeni M, przy czym $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech $f : H \to M$ będzie przekształceniem afinicznym, przy czym:*

- *$f(p_0) = q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_m\beta_m$, dla pewnych $w_1, \ldots, w_n$,*
- *$M(f')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = A$.*

Wówczas dla każdego $p \in H$: jeśli p ma w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ współrzędne $a_1, \ldots, a_n$ oraz $f(p)$ ma w układzie bazowym $q_0, \mathcal{B}$ współrzędne $b_1, \ldots, b_m$, *to:*

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

W szczególności jeśli $H = M$ oraz $f = \mathrm{id}$, dostajemy następujący związek między współrzędnymi $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ punktu $p \in H$ odpowiednio w układach bazowych $p_0, \mathcal{A}, q_0, \mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

gdzie $C = M(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ oraz $p_0 = q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_n\beta_n$.

Dowód. Skoro $A = M(f')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, to dla $d_1, \ldots, d_m$ spełniających

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

mamy

$$f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m.$$

Skoro $p = p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, to:

$$\begin{aligned} f(p_0) &= f(p_0) + f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_m\beta_m + d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m = \\ &= q_0 + (w_1 + d_1)\beta_1 + \ldots + (w_m + d_m)\beta_m \end{aligned}$$

Wobec równości $f(p) = q_0 + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m$ mamy:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

□

W dodatkach zastanowimy się nad geometrycznymi aspektami przekształceń afinicznych, a w szczególności nad ich zastosowaniami w zadaniach konkursowych. Rozważania te stawiają w nowym świetle szereg rezultatów znanych miłośnikom geometrii elementarnej.