Afiniczna niezależność, bazy punktowe i układy bazowe

Na poprzednim wykładzie zapoznaliśmy się z pojęciem przestrzeni afinicznej, rozumianej jako podzbiór H wektorów przestrzeni liniowej V (zwanych punktami), z dodatkową operacją $(v, w) \mapsto \overrightarrow{vw}$ (przypisującej parze punktów wektor łączący) i stowarzyszoną z nią przestrzenią liniową $T(H)$ (zwaną przestrzenią styczną lub przestrzenia wektorów swobodnych), której przestrzeń H jest warstwą, to znaczy $H = v + T(H)$, dla dowolnego $v \in H$. Korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capelliego zinterpretowaliśmy przestrzenie afiniczne w K^n jako zbiory rozwiązań układów równań liniowych – niekoniecznie jednorodnych. Podobnie jak w przypadku przestrzeni liniowych do badania przestrzeni afinicznych potrzebne jest rozważanie „podstruktur". W przeciwieństwie do podprzestrzeni liniowych, interesują nas zbiory zamknięte na szczególny typ kombinacji – tak zwane kombinacje afiniczne. Naszym dzisiejszym celem będzie opis podprzestrzeni rozpiętych na układach punktów, a w szczególności – opis minimalnych układów generujących podprzestrzeń afiniczną. Jak się okaże własności tych układów są ściśle związane z minimalnymi układami wektorów rozpinających (czyli bazami) jej przestrzeni stycznej. Pozwala to między innymi na mówienie o wymiarze przestrzeni afinicznej.

Fakt 49. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})$.

Przykład. W przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ niech

$$H = \mathrm{af}((1,0,2), (2,1,3), (4,1,1)).$$

Wówczas przestrzeń styczna $T(H)$ to

$$\mathrm{lin}((1,1,1), (3,1,-1)) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Stąd sama podprzestrzeń H opisana jest jako zbiór rozwiązań układu złożonego z pojedynczego równania $x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$.

Dowód. Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Skoro H jest przestrzenią afiniczną, to zgodnie z dowodem faktu charakteryzującego przestrzenie afiniczne jako podzbiory zamknięte na kombinacje afiniczne wiemy, że dla każdego $q \in H$ mamy

$$T(H) = \{\overrightarrow{qp} \mid p \in H\}.$$

Jeśli $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, to biorąc $q = p_0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} T(H) &= \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in H\} = \\ &= \{\overrightarrow{p_0 p} \mid \text{dla wszystkich } p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k, \text{ gdzie } a_0 + \ldots + a_k = 1\} = \\ &= \{a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k} \mid a_1, \ldots, a_k \in K\} = \\ &= \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}). \end{aligned}$$

Na odwrót: jeśli $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k})$, to już wiemy, że dla każdego $p \in H$ mamy

$$\overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k},$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. Chcemy, by $p \in \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$. Przyjmując $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_k$ otrzymujemy

$$p = p_0 + \overrightarrow{p_0 p} = (a_0 + \ldots + a_k) p_0 + a_1(p_1 - p_0) + \ldots + a_k(p_k - p_0).$$

Po uproszczeniu dostajemy $p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k$. Wobec dowolności p otrzymujemy stąd (1). $\square$

Definicja 38. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie układem punktów przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.*

- *Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest* AFINICZNIE ZALEŻNY *(albo, że jest* W POŁOŻENIU SZCZEGÓLNYM*), jeśli jeden z punktów tego układu jest kombinacją afiniczną pozostałych.*
- *Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest* AFINICZNIE NIEZALEŻNY *(albo, że jest* W POŁOŻENIU OGÓLNYM*), jeśli nie jest on w położeniu szczególnym.*

PRZYKŁAD. W przestrzeni $H = \mathbb{R}^3$ układ $((3,7,4), (1,9,7), (5,5,1))$ jest afinicznie zależny, bo mamy $(1,9,7) = 2(3,7,4) - 1(5,5,1)$. Układ $(3,1,1), (1,2,1)$ jest natomiast afinicznie niezależny w $\mathbb{R}^3$.

Afiniczna zależność (i niezależność) układu punktów nie zależy od kolejności punktów układu. Każdy podukład układu afinicznie niezależnego jest afinicznie niezależny. Nietrudno widzieć, że istnieje zależność pomiędzy afiniczną niezależnością układu punktów i liniową niezależnością odpowiadającego mu układu wektorów. Układ $k+1$ punktów jest afinicznie niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ k wektorów o początkach w jednym z tych punktów łączących go z pozostałymi punktami układu jest liniowo niezależny.

Fakt 50. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:*

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Załóżmy, że (2) nie jest prawdą i układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny. Wówczas któryś z wektorów tego układu jest liniową kombinacją pozostałych. Ewentualnie przenumerowując $p_1, \ldots, p_k$ możemy zakładać, że

$$\overrightarrow{p_0p_k} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}},$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_{k-1} \in K$. Niech $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_{k-1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_{k-1}p_{k-1} &= a_0(p_0 + \overrightarrow{p_0p_0}) + a_1(p_0 + \overrightarrow{p_0p_1}) + \ldots + a_{k-1}(p_0 + \overrightarrow{p_0p_{k-1}}) = \\ &= \underbrace{(a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1})}_{=1}p_0 + \underbrace{a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}}}_{=\overrightarrow{p_0p_k}} = \\ &= p_0 + \overrightarrow{p_0p_k} = \\ &= p_k. \end{aligned}$$

A zatem p_k jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_{k-1}$. A zatem (1) $\Rightarrow$ (2).

Na odwrót: przypuśćmy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny (znowu z zaprzeczenia chcemy wywieść zaprzeczenie). Chcemy wykazać liniową zależność specyficznego zbioru wektorów (o początkach w p_0). Rozważamy dwa przypadki.

- Punkt p_0 jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Niech $p_0 = a_1p_1 + \ldots + a_kp_k$, przy czym $a_1 + \ldots + a_k = 1$. Mamy więc

  $$0 = \overrightarrow{p_0p_0} = \overrightarrow{p_0(a_1p_1 + \ldots + a_kp_k)} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k}.$$

  Zatem układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny, i mamy sprzeczność z założeniem, że zachodzi (2).

- Punkt p_0 nie jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Wówczas skoro układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny, to jeden z punktów $p_1, \ldots, p_k$ jest kombinacją afiniczną pozostałych. Po ewentualnym przenumerowaniu $p_1, \ldots, p_k$ możemy założyć, że p_k jest kombinacją afiniczną $p_0, \ldots, p_{k-1}$. W szczególności $p_k = a_0p_0 + \ldots + a_{k-1}p_{k-1}$, gdzie $a_0 + \ldots + a_{k-1} = 1$. A zatem:

  $$\overrightarrow{p_0p_k} = a_0\overrightarrow{p_0p_0} + a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}},$$

  czyli układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny, co przeczy (2). A zatem (2) $\Rightarrow$ (1).

Np. układ punktów $p_0 = (1,2), p_1 = (2,2), p_2 = (3,3), p_3 = (4,4)$ jest afinicznie zależny w $\mathbb{R}^2$, ale $p_0 \notin \mathrm{af}(p_1, p_2, p_3)$.

$\square$

Definicja 39. *Mówimy, że układ punktów $p_0, \ldots, p_k$ punktów przestrzeni afinicznej H jest* BAZĄ PUNKTOWĄ *przestrzeni H, jeśli spełnia następujące dwa warunki:*

- *układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,*
- *$H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, czyli układ $p_0, \ldots, p_k$* ROZPINA *H.*

Fakt 51. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Układ $p_0, \ldots, p_k$ jest baza punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest bazą przestrzeni $T(H)$. W szczególności każde dwie skończone bazy punktowe przestrzeni afinicznej są równoliczne.*

Powyższy wniosek uzasadnia następującą definicję.

Oczywiście możemy mówić zarówno o przestrzeniach afinicznych skończonego, jak i nieskończonego wymiaru, ale na tym wykładzie ograniczamy się jedynie do pierwszej sytuacji.

Definicja 40. WYMIAREM *przestrzeni afinicznej H nazywamy wymiar jej przestrzeni stycznej $T(H)$. Wymiar przestrzeni H oznaczamy $\dim H$. Przestrzenie afiniczne wymiaru 1 nazywamy* PROSTYMI, *przestrzenie wymiaru* 2 – PŁASZCZYZNAMI.

- Układ $0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, wektorów przestrzeni liniowej K^n, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ są wektorami bazy standardowej, tworzy bazę punktową przestrzeni afinicznej K^n. Przestrzeń ta ma wymiar równy n.
- Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 6\}$. Wówczas $T(H)$ opisać można jako zbiór
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\} = \mathrm{lin}((1,1,0),(0,3,1)).$$
A zatem $\dim H = 2$. Weźmy $p_0 = (1,1,2) \in H$ i niech $p_1 = p_0 + (1,1,0) = (2,2,2)$ oraz $p_2 = p_0 + (0,3,1) = (1,4,3)$. Wówczas układ p_0, p_1, p_2 jest bazą punktową przestrzeni H.
- Dla $M = \mathrm{af}((1,2,3),(5,4,1),(-3,0,5),(2,1,4)) \subseteq \mathbb{R}^3$ znajdujemy opis przestrzeni $T(M)$ jako
$$\mathrm{lin}((4,2,-2),(-4,-2,2),(1,-1,1)) = \mathrm{lin}((4,2,-2),(1,-1,1)).$$
Zatem $\dim M = 2$. Układ trzech punktów: $(1,2,3)$, $(1,2,3) + (4,2,-2)$, $(1,2,3) + (1,-1,1)$ jest więc bazą punktową przestrzeni M.

Następujące własności baz punktowych są konsekwencjami odpowiednich własności baz przestrzeni liniowych oraz powyższego wniosku.

Fakt 52. *Każda przestrzeń afiniczna ma bazę punktową. Jeśli $\dim H = k$, to każda baza punktowa przestrzeni H ma $k+1$ punktów. Układ $p_0, \ldots, p_k$ punktów w przestrzeni afinicznej H nad K jest bazą punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, dla każdego $p \in H$ istnieje dokładnie jeden układ wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ taki, że $p = a_0p_0 + \ldots + a_kp_k$.*

Definicja 41. *Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $p_0, \dots, p_k$ będzie bazą punktową przestrzeni H.* WSPÓŁRZĘDNYMI (BARYCENTRYCZNYMI) PUNKTU $p \in H$ W BAZIE PUNKTOWEJ $p_0, \dots, p_k$ *nazywamy układ wag $a_0, \dots, a_k \in K$ taki, że $p = a_0 p_0 + \dots + a_k p_k$.*

Definicja 42. *Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K.*

- *Jeśli p_0 jest punktem przestrzeni H oraz $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni $T(H)$, to układ $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazywamy* UKŁADEM BAZOWYM *dla przestrzeni H.*
- *Dla punktu p przestrzeni H układ $a_1, \dots, a_n$ elementów ciała K taki, że $p = p_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ nazywamy* WSPÓŁRZĘDNYMI PUNKTU p W UKŁADZIE BAZOWYM $p_0, \mathcal{A}$.

Odwzorowanie $K^n \to H$ opisane wzorem:

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto p_0 + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \dots + s_n\alpha_n,$$

nazywamy PARAMETRYZACJĄ *przestrzeni H.*

Pojęcie parametryzacji stosuje się także w analizie np. przy opisie krzywych. Funkcja $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ jest parametryzacją okręgu na płaszczyźnie, ale oczywiście nie jest to parametryzacja w sensie algebry liniowej. W przeciwieństwie do podanej parametryzacji okręgu, parametryzacje przestrzeni afinicznej opisane w powyższej definicji są zawsze bijekcjami. Oczywiście jasny jest także następujący wniosek.

Fakt 53. *Układ $p_0, \dots, p_n$ jest bazą punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ $p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ jest układem bazowym przestrzeni H.*

PRZYKŁAD. Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5\}$. Wówczas $(1, 0, 1) \in H$ oraz

$$T(H) = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, 2x_2 - x_2 + 3x_3 = 0\} = \mathrm{lin}((1, 2, 0), (0, 3, 1)).$$

Stąd $(1, 0, 1); (1, 2, 0), (0, 3, 1)$ jest układem bazowym w H, zaś przyporządkowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni (s_1, s_2) \mapsto (1, 0, 1) + s_1(1, 2, 0) + s_2(0, 3, 1) = (s_1 + 1, 2s_1 + 3s_2, s_2 + 1) \in H$$

jest parametryzacją przestrzeni H.

Powyższe definicje afinicznej niezależności układu punktów, bazy punktowej i układu bazowego poprowadzą nas, podobnie jak w przypadku przestrzeni liniowych, do pojęcia przekształcenia afinicznego. Wcześniej jednak warto odnotować jeszcze szereg pojęć geometrycznych, które można określić już na początku pracy z przestrzeniami afinicznymi. Najważniejszym jest równoległość przestrzeni afinicznych.

Definicja 43. *Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli zachodzi równość podprzestrzeni $T(H_1) = T(H_2)$, to mówimy, że przestrzenie H_1, H_2 są* RÓWNOLEGŁE. *Jeśli mamy tylko inkluzję $T(H_1) \subseteq T(H_2)$, to mówimy, że H_1, H_2 są* SŁABO RÓWNOLEGŁE.

To pojęcie nie występuje w skrypcie, ale bywa użyteczne: czasem chcemy powiedzieć, że jakaś prosta i płaszczyzna są słabo równoległe. Z drugiej strony każdy punkt jest słabo równoległy do kazdej podprzestrzeni.

PRZYKŁAD. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozpatrzmy:

$$H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_3 = 2 \text{ oraz } 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7\},$$
$$H_2 = (2, 1, 0) + \mathrm{lin}((1, 0, 1)).$$

Nietrudno widzieć, że $\mathrm{lin}((1, 0, 1))$ opisana jest układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = 0 \end{cases}.$$

A zatem proste H_1 oraz H_2 są równoległe.

W zadaniach dotyczących przestrzeni afinicznych stosujemy także specyficzną dla geometrii elementarnej nomenklaturę. Mówimy chociażby o tym, że

- PUNKT p LEŻY NA prostej/płaszczyźnie, co oznacza, że należy do tej prostej/płaszczyzny,
- prosta, płaszczyzna lub przestrzeń afiniczna PRZECHODZI PRZEZ DANY PUNKT, co znaczy, że ten punkt do niej należy,
- proste, płaszczyzny lub przestrzenie afiniczne PRZECINAJĄ SIĘ mając na myśli to, że odpowiednie przestrzenie afiniczne mają punkt wspólny (lub nie!),
- punkt p LEŻY POMIĘDZY PUNKTAMI q, r, jeśli $p = tq + (1 - t)r$, gdzie $0 < t < 1$ (jesteśmy tu nad $\mathbb{R}$),
- punkty p, q, r są WSPÓŁLINIOWE, jeśli leżą na jednej prostej,
- podprzestrzenie F_1, F_2 SĄ SKOŚNE, to znaczy: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ oraz $T(F_1) \cap T(F_2) = \{0\}$.

Widzimy wyraźnie, że język geometrii afinicznej korzysta obficie ze znanego nam ze szkoły nazewnictwa obecnego w geometrii elementarnej płaszczyzny czy przestrzeni. Do pełni „geometrycznej operatywności" brakuje nam rzecz jasna kątów oraz odległości, a także izometrii. Te obiekty wprowadzimy rozważając strukturę przestrzeni euklidesowej w przestrzeni afinicznej. Wcześniej poznamy podstawy algebraicznego opisu przekształceń afinicznych – bardzo atrakcyjnych również z geometrycznego punktu widzenia.

Książeczka dr. Jerzego Bednarczuka zawierająca podejście geometryczne do przekształceń afinicznych mówi nawet o „Uroku przekształceń afinicznych" (Biblioteczka Matematyczna, tom 36).