Przestrzenie afiniczne w przestrzeniach liniowych

Tym wykładem rozpoczynamy nowy etap poznawania geometrii z punktu widzenia algebry związany z tzw. przestrzeniami afinicznymi. Wśród wielu alternatywnych podejść do tego tematu realizujemy najpierw najbardziej elementarny, polegający na wzbogaceniu struktury przestrzeni liniowych dodatkową operacją. Przypisywać ona będzie każdej parze wektorów (v, w) nowy wektor: $w - v$, który oznaczać będziemy jako $\overrightarrow{vw}$. Wydaje się to na pierwszy rzut oka banalne, a jednak doprowadzi do nowego spojrzenia na geometrię choćby przestrzeni K^n, gdzie K jest ciałem. Struktura afiniczna pozwoli na mówienie o punktach, prostych, czy trójkątach, a także na interpretację znanych pojęć odległości czy równoległości. Zobaczymy też, że ów nowy typ struktury na przestrzeni liniowej pozwala badać nie tylko jej podprzestrzenie liniowe, ale także podzbiory będące zbiorami rozwiązań układów niejednorodnych, traktując je jako tzw. podprzestrzenie afiniczne. Gdy oswoimy się z nowym językiem na gruncie przestrzeni liniowych, poznamy również aksjomatykę przestrzeni afinicznych, obejmującą nie tylko podzbiory przestrzeni liniowych z dodatkową strukturą.

Pod względem koncepcyjnym jest to stosunkowo skomplikowany temat, a powodów należałoby zapewne szukać w niezwykle skomplikowanej historii geometrii. Choć sam język mówiący o przestrzeniach afinicznych jest bardzo elegancki, to ustępuje jak się wydaje pod względem znaczenia językowi, który poznacie Państwo na Topologii, mówiąc o przestrzeniach metrycznych. Niemal każdy podręcznik algebry liniowej podchodzi do tematu przestrzeni afinicznych nieco inaczej. Zasadniczo opieramy się – jak wcześniej – na podejściu ze skryptu wydziałowego „*Wykłady z algebry liniowej II*" dr. T. Koźniewskiego.

Definicja 27. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wartość funkcji $\omega : V \times V \to V$ przypisującej parze (α, β) wektor*

$$\omega(\alpha, \beta) = \beta - \alpha,$$

nazywamy WEKTOREM ŁĄCZĄCYM *α z β, albo krócej* WEKTOREM OD α DO *β i oznaczamy jako $\overrightarrow{\alpha\beta}$.*

Zauważmy, że zbiór „wektorów łączących" w przestrzeni V pokrywa się po prostu ze zbiorem elementów V. O co więc tu chodzi? Po co nam taka dodatkowa kopia V? Pierwsza motywacja jest następująca: rozróżnienie to jest wygodne dla opisu zbiorów rozwiązań układów równań niejednorodnych.

Z pierwszego semestru pamiętamy, że jeśli U jest układem niejednorodnym równań liniowych, a U' odpowiadającym mu układem jednorodnym, to zbiór rozwiązań układu U jest postaci

$$H = v + W = \{v + w \,|\, w \in W\},$$

gdzie v jest pewnym wektorem z V spełniającym U oraz W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego U'. Pamiętajmy, że zbiór H nie jest podprzestrzenią liniową, o ile $v \neq 0$. Używając języka wprowadzonego wyżej możemy powiedzieć, że zbiór rozwiązań układu U to $\{v + \overrightarrow{vw} \mid w \in H\}$. Po co nam taki opis?

Przykład. Rozwiązaniem równania

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

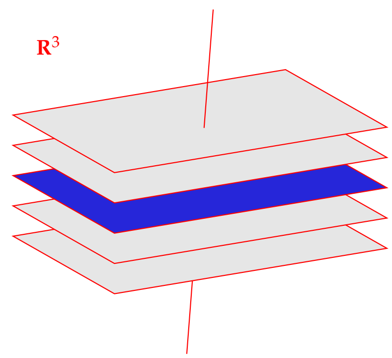
w $\mathbb{R}^3$ jest np. zbiór

$$(3,0,0) + \mathrm{lin}((0,1,-1),(-1,0,1)).$$

Jest to zbiór wektorów łączących wektor $(3,0,0)$ oraz dowolny wektor z $\mathrm{lin}((0,1,-1),(-1,0,1))$. Dlaczego „na przykład"? Nie jest to bowiem jedyny opis. Rozwiązania układu U można także opisać jako zbiór

$$(1,1,1) + \mathrm{lin}((0,1,-1),(-1,0,1)).$$

Po prostu wybieramy inne rozwiązanie układu U. Oczywiście dowolne dwa rozwiązania układu U wyznaczają pewien wektor łączący należący do $\mathrm{lin}((0,1,-1),(-1,0,1))$. Prowadzi to do następującej definicji.



Warstwy podprzestrzeni wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$ interpretować będziemy w postaci równoległych płaszczyzn.

Wniosek z punktu (i) jest taki, że dwie warstwy $\alpha + W$, $\beta + W$ podprzestrzeni W są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{\beta\alpha}$ należy do W.

Definicja 28. *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $\alpha \in V$. Zbiór*

$$\alpha + W = \{\alpha + \gamma, \gamma \in W\}$$

nazywamy WARSTWĄ PODPRZESTRZENI *W w przestrzeni V.*

Fakt 40. *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V i niech $\alpha, \beta \in V$. Wówczas:*

(i) $\alpha + W = \beta + W \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W$,

(ii) $(\alpha + W) \cap (\beta + W) \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha + W = \beta + W$.

Dowód. Dowodzimy (i). Jeśli $\alpha + W = \beta + W$, to $\alpha \in \beta + W$, więc $\alpha = \beta + \gamma$, dla pewnego $\gamma \in W$. Zatem $\alpha - \beta \in W$. Na odwrót: jeśli $\alpha - \beta = \gamma \in W$, to $\alpha = \beta + \gamma$. Wówczas dla każdego $\gamma' \in W$ mamy $\alpha + \gamma' = \beta + \gamma + \gamma' \in \beta + W$, bo $\gamma + \gamma' \in W$. Stąd $\alpha + W \subseteq \beta + W$. Analogicznie dowodzimy $\beta + W \subseteq \alpha + W$.

Dowodzimy (ii). Niech $(\alpha + W) \cap (\beta + W) \neq \emptyset$. Zatem istnieje $\delta \in (\alpha + W) \cap (\beta + W)$. Stąd $\alpha + \gamma_1 = \delta = \beta + \gamma_2$, dla pewnych $\gamma_1, \gamma_2 \in W$. Wówczas $\alpha - \beta = \gamma_2 - \gamma_1 \in W$, więc na mocy (i) dostajemy tezę $\alpha + W = \beta + W$. $\square$

Fakt 41. *Podzbiór $H \subseteq K^n$ jest warstwą pewnej podprzestrzeni $W \subseteq K^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy H jest zbiorem rozwiązań pewnego niesprzecznego układu równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach w K.*

To był jeden z punktów twierdzenia Kroneckera-Capellego, tylko nie mówiliśmy wtedy, że zbiory $\alpha + W$ nazywamy warstwami.

Co to wszystko ma wspólnego z dodatkową strukturą wektorów łączących wprowadzoną na początku wykładu? Otóż wprawdzie warstwa nie jest sama w sobie podprzestrzenią liniową, ale jest zamknięta na operację ω, którą wprowadziliśmy w V.

Definicja 29. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.*

- *Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest* PRZESTRZENIĄ AFINICZNĄ NAD K, *jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.*
- *Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy* PUNKTAMI.
- *Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy* PRZESTRZENIĄ STYCZNĄ *lub* PRZESTRZENIĄ WEKTORÓW SWOBODNYCH *do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.*

PRZYKŁADY.

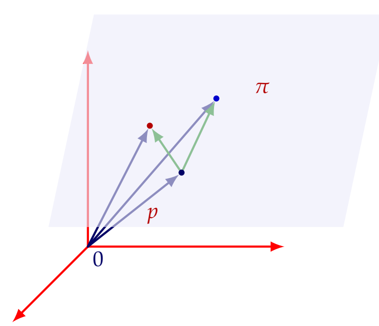
- Przestrzeń liniowa V ma strukturę przestrzeni afinicznej – jest to warstwa podprzestrzeni $W = V$ postaci $0 + V$. Dla każdego $q \in V$ zbiór $\{q\}$ jest przestrzenią afiniczną jako warstwa $q + 0$.
- Zbiór $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 4, x_2 - 2x_3 = 5\}$ jest przestrzenią afiniczną. Mamy

  $$T(H) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\} = \mathrm{lin}((2, 2, 1)),$$

  a więc $H = (11, 7, 1) + \mathrm{lin}((2, 2, 1))$.

Przyjmijmy umowę notacyjną. Elementy przestrzeni afinicznej W zawartej w przestrzeni liniowej V, czyli punkty, oznaczamy małymi literami naszego alfabetu, a więc p, q, r, s itd. Wektory swobodne będziemy oznaczać literami greckimi: α, β, γ itd.

Jako, że zarówno punkty jak i wektory są w istocie elementami V, to w przypadku działania w przestrzeni współrzędnych $V = K^n$ będziemy zarówno współrzędne punktów, jak i wektorów zapisywać jednakowo w okrągłych nawiasach. Stosunkowo delikatnie będziemy natomiast mówić o wykonywaniu operacji mnożenia przez skalar i dodawania wektorów, która jest w przestrzeni V. Wiąże się to z tym, że jeśli punkty p, q należą do przestrzeni afinicznej W, to ani $2p$, ani $p + q$ nie muszą do niej należeć, choć same napisy mają sens, bo działamy w przestrzeni liniowej. Musimy określić kiedy stosowanie tych operacji jest przydatne. Motywacja pochodzi z pierwszego wykładu o ukłądach równań.



Wybierając dowolny punkt p na płaszczyźnie π (tzn. odpowiedni wektor w $\mathbb{R}^3$) możemy traktować π jako zbiór wektorów postaci: $p + T(\pi)$. Zbiór $T(\pi)$ składa się z wektorów swobodnych, ale można je intepretować jako wektory łączące p ze wszystkimi punktami π. Kluczowe jest to, że niezależnie od wyboru punktu p na π mamy równość $\pi = p + T(\pi)$.

Fakt 28. *Rozważmy układ m równań liniowych na zbiorze $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o współczynnikach w ciele K postaci:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Załóżmy, że powyższy układ nie jest jednorodny. Wówczas jeśli wektory $v_0, \ldots, v_s$ są rozwiązaniami tego układu, to kombinacja liniowa $a_0v_0 + \ldots + a_sv_s$ jest rozwiązaniem tego układu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_s = 1.$$

Rozwiązanie. Zapiszmy nasz układ w postaci macierzowej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas to, że $v_0, \ldots, v_s$ są rozwiązaniami powyższego układu zapisać możemy w postaci:

$$Av_0 = b, \quad Av_1 = b, \quad \ldots, \quad Av_s = b.$$

Zatem dla dowolnych $a_0, \ldots, a_s \in K$ mamy:

$$A(a_0v_0 + \ldots a_mv_m) = a_0Av_0 + a_1Av_1 + \ldots + a_sAv_s = a_0b + a_1b + \ldots a_nb.$$

Wektor $a_0v_0 + \ldots a_sv_s$ jest zatem rozwiązaniem powyższego układu wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_0 + \ldots a_s)b = b$. Skoro $b \neq 0$, to zachodzi równość $a_0 + a_1 + \ldots + a_s = 1$. ∎

Dla przykładu: wiedząc, że punkty $(1, 1)$, $(2, 3)$ są rozwiązaniami pewnego układu równań liniowych $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ widzimy, że:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

A zatem każdy z punktów postaci $t(1, 1) + (1 - t)(2, 3)$ również jest rozwiązaniem tego układu równań.

Definicja 30. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in V$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających*

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$$

sumę:

$$a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_np_n \in V$$

nazywamy KOMBINACJĄ AFINICZNĄ PUNKTÓW $p_0, \ldots, p_n$ Z WAGAMI $a_0, \ldots, a_n$.

Oczywiście kombinacje afiniczne są specjalnym typem kombinacji liniowych (punkty są wszak wektorami), w których suma współczynników wynosi 1. Przykłady:

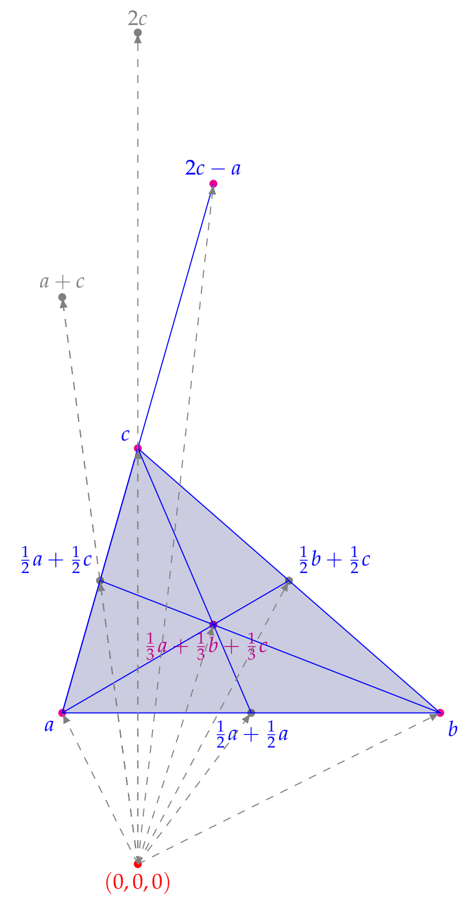
- Dla $V = \mathbb{R}^3$ i $p_0 = (1,2,1), p_1 = (1,-1,-1), p_2 = (0,1,3)$ mamy
$$2p_0 + 3p_1 - 4p_2 = 2(1,2,1) + 3(1,-1,-1) - 4(0,1,3) = (5,-3,-13),$$
więc $p = (5,-3,-13)$ jest kombinacją afiniczną punktów p_0, p_1, p_2 z wagami $2, 3, -4$.
- Dla dowolnych punktów $p, q \in V$ oraz dowolnego $t \in K$ punkt $tp + (1-t)q$ jest kombinacją afiniczną punktów p, q z wagami $t, 1-t$. W interpretacji geometrycznej punkty te należą do prostej zawierającej punkty p i q. Gdy $K = \mathbb{R}$ oraz $t \in [0,1]$, zbiór punktów postaci $\{tp + (1-t)q\}$ interpretować będziemy wkrótce jako odcinek w przestrzeni euklidesowej afinicznej o końcach w p i q.
- Dla dowolnych punktów $p, q, r \in V$ punkt $\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r$ jest kombinacją afiniczną punktów p, q, r. W interpretacji nad $\mathbb{R}$ jest to środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach w punktach p, q, r.

Będziemy wielokrotnie korzystać z następującej obserwacji. Wyraża ona wagi $a_1, \ldots, a_k$ kombinacji afinicznej $p = a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_kp_k$ jako współczynniki w przedstawieniu wektora $\overrightarrow{p_0p}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$.

Fakt 42. *Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_k = 1$ zachodzi:*
$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_kp_k \quad \iff \quad \overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k}.$$

Dowód. Jeśli $p = a_0p_0 + \ldots + a_kp_k$, to
$$\begin{aligned}\overrightarrow{p_0p} &= p - p_0 = \\ &= a_0p_0 + \ldots + a_kp_k - p_0 = \\ &= a_0p_0 + \ldots + a_kp_k - \underbrace{(a_0 + \ldots + a_k)}_{1}p_0 = \\ &= a_0(p_0 - p_0) + \ldots + a_k(p_k - p_0) = \\ &= a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k}.\end{aligned}$$

Na odwrót, jeśli $\overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k}$, to:
$$\begin{aligned}p &= p_0 + \overrightarrow{p_0p} \\ &= \underbrace{(a_0 + \ldots + a_k)}_{1}p_0 + a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k} = \\ &= a_0p_0 + a_1(p_0 + \overrightarrow{p_0p_1}) + \ldots + a_k(p_k + \overrightarrow{p_0p_k}) = \\ &= a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_kp_k.\end{aligned}$$



Weźmy punkty a, b, c w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$. Na niebiesko zaznaczone są pewne ich kombinacje afiniczne. Punkty $2c$ oraz $a + c$ nie są kombinacjami afinicznymi a, b, c, o ile $a, c \neq (0,0,0)$.

Niebieskie odcinki oznaczają kombinacje afiniczne o dodatnich wagach (tzw. kombinacje wypukłe, mające sens nad $\mathbb{R}$) łączących je punktów. To co jest kluczowe to fakt, że z punktu widzenia tej konfiguracji nie ważne gdzie leży punkt $p_0 = (0,0,0)$, a kombinacje afiniczne (tylko one, bo liniowe – nie) punktów a, b, c są jednoznacznie wyznaczone. O tym mówi w zasadzie uwaga obok.

W ogóle nie musimy być w $\mathbb{R}^3$, a np. w $\mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{R}[x]$, $M_n(\mathbb{R})$ lub nad innym ciałem (tylko wtedy jest problem z odcinkami). Dlatego nazewnictwo „punktu" jest umowne. Macierz też może być punktem.

To wszystko sugeruje, że warto wprowadzić lokalny układ „współrzędnych afinicznych" na tej płaszczyźnie. O tym będzie kolejny wykład.

□

Zauważmy, że wybór punktu p_0 w powyższej uwadze jest zupełnie arbitralny. Można zamiast niego wziąć dowolny z punktów $p_1, \ldots, p_k$, odpowiednio modyfikując sformułowanie.

Przykład. Dla $p_0 = (1,2,1), p_1 = (1,-1,-1), p_2 = (0,1,3), p = (5,-3,-13)$ w $\mathbb{R}^3$ mamy $p = 2p_0 + 3p_1 - 4p_2$, a więc równoważnie $\overrightarrow{p_0 p} = 3\overrightarrow{p_0 p_1} - 4\overrightarrow{p_0 p_2}$, a także $\overrightarrow{p_1 p} = 2\overrightarrow{p_1 p_0} - 4\overrightarrow{p_1 p_2}$ oraz $\overrightarrow{p_2 p} = 2\overrightarrow{p_2 p_0} + 3\overrightarrow{p_2 p_1}$.
Omówimy teraz podstawowe własności kombinacji afinicznych.

Fakt 43. *Niech $q_0, \ldots, q_r$ będzie układem punktów, z których każdy jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$. Wówczas każda kombinacja afiniczna punktów $q_0, \ldots, q_r$ jest też kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$.*

Dowód. Dla każdego $i = 1, \ldots, r$ mamy $q_i = a_{i0}p_0 + \ldots + a_{ik}p_k$, dla pewnych wag $a_{i0}, \ldots, a_{ik}$. Stąd dla każdego układu wag $a_0, \ldots, a_r$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0q_0 + \ldots + a_kq_k &= a_0(a_{00}p_0 + \ldots + a_{0k}p_k) + \ldots + a_k(a_{k0}p_0 + \ldots + a_{kk}p_k) = \\ &= (a_0a_{00} + \ldots + a_ka_{k0})p_0 + \ldots + (a_0a_{0k} + \ldots + a_ka_{kk})p_k \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że suma współczynników występujących przy p_i w ostatnim wierszu ciągu równości powyżej wynosi 1. Mamy jednak:

$$\begin{aligned} &(a_0a_{00} + \ldots + a_ka_{k0}) + \ldots + (a_0a_{0k} + \ldots + a_ka_{kk}) = \\ &a_0(\underbrace{a_{00} + \ldots + a_{0k}}_{1}) + \ldots + a_k(\underbrace{a_{k0} + \ldots + a_{kk}}_{1}) = \\ &a_0 + \ldots + a_k = 1. \end{aligned}$$

□

Definicja 31. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Mówimy, że podzbiór $H \subseteq V$* JEST ZAMKNIĘTY ZE WZGLĘDU NA KOMBINACJE AFINICZNE, *jeśli dla każdych punktów $p_0. \ldots, p_k \in H$ i każdych wag $a_0, \ldots, a_k$ zachodzi $a_0p_0 + \ldots + a_kp_k \in H$.*

Poniższe twierdzenie wiąże pojęcia wprowadzone na dzisiejszym wykładzie, stanowiąc jednocześnie alternatywną definicję dla przestrzeni afinicznych (jako podzbiorów przestrzeni liniowych).

Fakt 44. *Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Następujące warunki są równoważne.*

(i) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne,

(ii) H jest warstwą podprzestrzeni przestrzeni V,

(iii) H jest przestrzenią afiniczną.

Dowód. Oczywiście równoważność (ii) i (iii) wynika z definicji przestrzeni afinicznej.

Dowodzimy (i) $\Rightarrow$ (ii). Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V. Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$. Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 \in H.$$

Stąd wektor $\overrightarrow{p_0p}$ należy do W. Ale $\overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + a_2\overrightarrow{p_0p_2} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$. Stąd $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \in W$, co wobec dowolności $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ dowodzi, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto $H = p_0 + W$ na mocy definicji W. Zatem H jest warstwą podprzestrzeni W w V.

Dowodzimy (ii) $\Rightarrow$ (i). Załóżmy, że $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V. Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$. Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$. Zatem

$$\sum_{i=0}^{k} a_ip_i = \sum_{i=0}^{k} a_i(q + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} a_iq + \sum_{i=0}^{k} a_i\alpha_i = q + \gamma,$$

gdzie $\gamma = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ jest kombinacją liniową wektorów przestrzeni W, więc należy do W. Stąd $a_0p_0 + \ldots + a_kp_k = q + \gamma \in q + W = H$. Zatem H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. $\square$

Definicja 32. *Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli $H_1 \subseteq H_2$, to mówimy, że H_1 jest* PODPRZESTRZENIĄ PRZESTRZENI AFINICZNEJ *H_2.*

Fakt 45. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej H.*

Definicja 33. *Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ nazywamy* PODPRZESTRZENIĄ AFINICZNĄ ROZPIĘTĄ NA *$p_0, \ldots, p_k$ (lub* PODPRZESTRZENIĄ GENEROWANĄ *przez $p_0, \ldots, p_k$) i oznaczamy $\mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$.*

Bliski związek kombinacji afinicznych i liniowych stanie się jasny, gdy wprowadzimy pojęcie tzw. afinicznej niezależności oraz powiemy nieco więcej o wzajemnym położeniu podprzestrzeni afinicznych. Wprowadzimy też pojęcie wymiaru i bazy punktowej przestrzeni afinicznej. Później przejdziemy do badania przekształceń tych przestrzeni.

Podobnie jak przestrzeń liniowa może być rozpięta przez dowolny układ wektorów, podobnie i rozważać można podprzestrzenie afiniczne rozpięte przez dowolne układy punktów.

Definicja 34. *Niech $X \subseteq V$. Przez* $\mathrm{af}(X)$ *rozumiemy zbiór kombinacji afinicznych elementów zbioru X.*

Przykłady:

- Dla dowolnej przestrzeni liniowej V mamy $\mathrm{af}(V) = V$.
- Rozważmy proste l_1, l_2 zadane w $\mathbb{R}^3$ układami U_1, U_2 postaci:

$$U_1 : \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}, \qquad U_2 : \begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{cases}.$$

  Te dwie proste nie mają punktu wspólnego – są to tzw. proste skośne (definicja pojawi się na kolejnym wykładzie). Każdy punkt na prostej l_1 ma postać $(0,0,s)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$, a każdy punkt na l_2 ma postać $(1,t,0)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. A zatem do prostych tych należą na przykład punkty $(0,0,0), (0,0,1), (1,0,0)$ oraz $(1,1,0)$. Dowolny punktu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ jest ich kombinacją afiniczną:

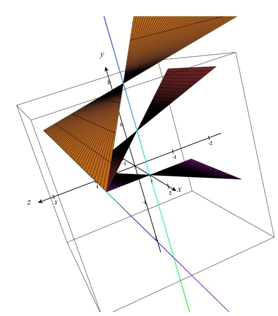
$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,0,1) + (1-x-z)(0,0,0).$$

  A zatem
$$\mathrm{af}(l_1 \cup l_2) = \mathbb{R}^3.$$

Od razu chciałbym przestrzec Czytelnika przed różnymi uproszczeniami. Przestrzeń afiniczna rozpięta na układzie punktów nie jest tym samym co zbiór prostych łączących poszczególne punkty. Proszę rozważyć przykład, który kilka razy pojawiał się na kolokwiach. Dla podzbiorów H_1, H_2 przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiór:

$$H_3 = \{tp + (1-p)q \mid p \in H_1, q \in H_2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Wówczas dla $H_1 = (0,0,1) + \mathrm{lin}((1,0,0)), H_2 = (1,0,0) + \mathrm{lin}((0,1,0))$ zbiór H_3 nie jest równy $\mathbb{R}^3$, a nawet nie jest podprzestrzenią afiniczną.



Idea jest taka: wybierzmy punkt na prostej H_2 i połączmy go prostymi ze wszystkimi punktami z prostej skośnej H_1 (dla ustalonych $p \in H_1, q \in H_2$ zbiór $\{tp + (1-p)q \mid t \in \mathbb{R}\}$ jest prostą). Dostajemy *prawie płaszczyznę* (bez jednej prostej). Można w ten sposób uzyskać *prawie wszystkie* *prawie płaszczyzny* zawierające H_1 poza jedną – równoległą do H_2. Łącznie dostajemy $\mathbb{R}^3$ bez dwóch *prawie płaszczyzn*. Bądźmy więc ostrożni.

Uzupełnienie. Geometria afiniczna, czyli jaka?

Pojęcie przestrzeni afinicznej jest na tyle istotnym i delikatnym punktem naszego programu, że warto poświęcić mu nieco mniej matematyczny fragment naszych rozważań, niebędący jednak tylko dodatkiem historycznym, ale tekstem bliższym wykładowi. Pytając kiedyś zmarłego przed rokiem prof. Andrzeja Białynickiego-Birulę o kluczowe momenty wykładu z GALu usłyszałem, że właśnie koncepcja przestrzeni afinicznej i jej związków z otaczającym nas światem jest takim newralgicznym punktem. Jest to problem na wielu poziomach i mimo pozornej prostoty wiąże się z bardzo głębokimi zagadnieniami (powiem o tym przy okazji definicji aksjomatycznej). Zacznijmy od idei prostej, podkreślonej pięknie przez jednego z polskich autorów, Jacka Komorowskiego, w świetnej (i bardzo polecanej) książce *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, gdzie pojawia się następujący argument.

Profesor Białynicki-Birula, nestor geometrii algebraicznej w Polsce, uczył algebry liniowej kilkadziesiąt lat na UW.

> Nie wydaje się naturalne przyjmowanie przestrzeni wektorowej jako ośrodka, w którym będzie uprawiana geometria. Taki wybór, aczkolwiek wygodny ze względów rachunkowych, jest niefortunny ze światopoglądowego punktu widzenia; przecież w otaczającym nas świecie, którego modelem ma być geometria, brak jest np. wyróżnionego punktu, „pępka świata", jakim w przestrzeni wektorowej jest zero.

Stosowany również przez inne nauki, np. fizyczne, o czym wspomina znakomity podręcznik prof. A. Herdegena z Uniwersytetu Jagiellońskiego: `http://eigenspace.pl/herdegen_algebra.pdf`.

Warto napisać kilka zdań o geometrycznych źródłach geometrii afinicznej, będących w zasadzie tłumaczeniem (bez większego komentarza) fragmentu rozważań jednego z głównych autorytetów XX-wiecznej geometrii – H. S. M. Coxetera.

Pochodzą one z książki *The Real and Projective Plane*, ale powtarzane są też w innych miejscach.

Zwykła geometria, którą poznawaliśmy w szkole, zajmowała się okręgami, kątami, prostymi równoległymi, trójkątami podobnymi itd., zwana jest geometrią euklidesową, ponieważ została ona po raz pierwszy usystematyzowana przez Euklidesa, żyjącego ok. 300 r. p.n.e. Jego dzieło – *Elementy*, jest jedną z najbardziej znanych książek na świecie i jedynie Biblia przewyższa ją pod względem liczby wykonanych kopii oraz języków, na które została przetłumaczona. Do dziś, przy kilku nieistotnych zmianach, jest to wciąż pozycja stosowna do nauczania.

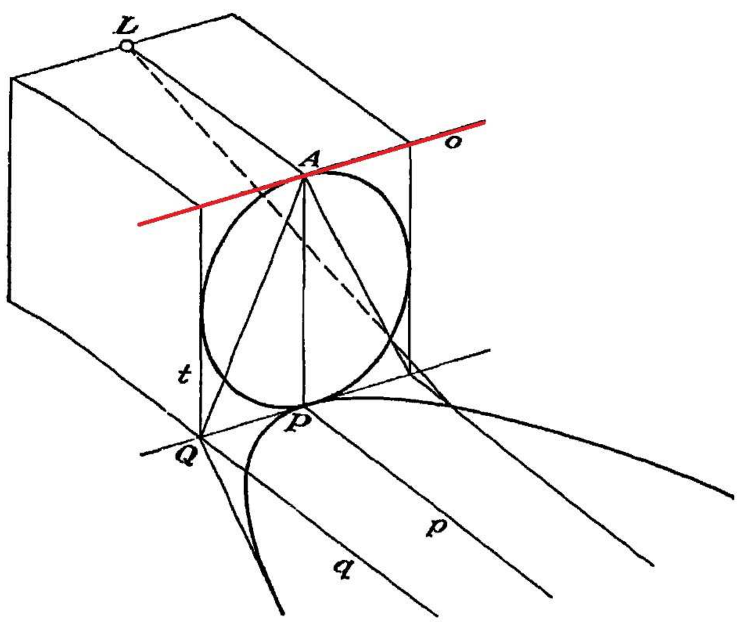
Za kilka wykładów poznamy tzw. przestrzenie euklidesowe, która mają być bezpośrednim obiektem realizującym geometrię euklidesową w kontekście przestrzeni liniowych.

W XIX wieku pojawiła się tendencja do wyciągania z geometrii euklidesowej pewnych fundamentalnych idei, zwłaszcza takich, które nie wymagają mierzenia odległości lub kątów, i do wykorzystywania tych idei do budowania bardziej ogólnych systemów, przede wszystkim geometrii afinicznej i geometrii rzutowej. Te nowe systemy są uważane za bardziej ogólne, ponieważ nie tylko rzucają one nowe światło na geometrię euklidesową, ale można je rozszerzać w innych kierunkach przez wprowadzenie nowych sposobów mierzenia odległości.

Geometria afiniczna może być rozszerzona do geometrii czasoprzestrzeni Minkowskiego, używanej w szczególnej teorii względności Einsteina, ale też do geometrii rzutowej, istotnej z punktu widzenia współczesnych teorii fizyki relatywistycznej.

Skąd się bierze nazwa geometrii afinicznej? Weźmy dwie figury znajdujące się na dwóch różnych płaszczyznach. Powiemy, że jedną figurę można uzyskać z drugiej przez rzut równoległy, jeśli odpowiednie punkty znajdujące się na tych figurach można połączyć za pomocą równoległych prostych. To jest w istocie dokładnie ta sytuacja, która ma miejsce gdy słońce rzuca cień na ziemię, np. okrągła moneta rzuca eliptyczny cień. Jeśli dwie płaszczyzny są równoległe, dwie figury będą przystające; w przeciwnym przypadku będą miały wprawdzie nieco inne kształty, ale linie proste pozostaną proste, styczne do krzywych pozostaną stycznymi, proste równoległe pozostaną równoległe, odcinki przecięte na pół pozostaną takie po rzutowaniu itd.

Słowo „afiniczne"' (*affinis* – z łac. podobieństwo, powinowactwo) zostało użyte po raz pierwszy przez Eulera w drugim tomie *Introductio in Analysis Infinitorum* z 1748 roku, w kontekście stycznych do krzywej. Niedługo później zostało podjęte przez Möbiusa i Monge'a, który dali początek ogólniejszej teorii – geometrii rzutowej. Stawia ona mniej restrykcyjne wymagania, ograniczając się do tych własności, które nie zmieniają się przy rzucie środkowym. Tu pojawiają się dodatkowe wyzwania, bo nie każda prosta przechodzi na prostą, jak na rysunku:



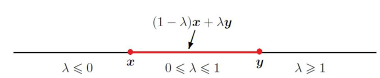
Dodatek. Kombinacje i zbiory wypukłe

Na wykładzie powiedzieliśmy o zbiorach zamkniętych na kombinacje afiniczne, co pozwala znacznie poszerzyć spektrum badanych obiektów w przestrzeni K^n. Na kolejnych wykładach będziemy mówić o punktach, prostych, płaszczyznach, równoległości, dalej o prostopadłości, kątach itd. Jest to kierunek mający ostatecznie na celu odpowiedzenie sobie na pytanie: jak rózróżniać własności geometryczne zbiorów opisywanych równaniami (liniowymi i nie tylko). W tym dodatku powiemy o własności będącej nieco z boku tych rozważań, mającej jednak bardzo geometryczny charakter i bardzo istotny wpływ na wiele dziedzin matematyki (w tym analizę, teorię liczb, kombinatorykę itd.). Jest to teoria zbiorów (oraz funkcji) wypukłych. W kilku najbliższych dodatkach opowiemy o pewnych, raczej rekreacyjnych, jej aspektach. Teoria ta dotyczy (z naszego punktu widzenia) rzeczywistych przestrzeni afinicznych, choć można ją rozszerzać i na inne ciała.

Definicja 35. *Niepusty podzbiór X przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ nazywamy* WYPUKŁYM *jeśli dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\lambda \in [0, 1]$ mamy:*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in X.$$

Zbiór pusty również uznajemy za wypukły.



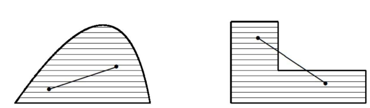
Przykłady.

- Każda przestrzeń afiniczna nad ciałem $\mathbb{R}$ jest zbiorem wypukłym. Każdy punkt jest zbiorem wypukłym. Odcinek o końcach w punktach x, y to podzbiór $\mathrm{af}(x, y)$ złożony z kombinacji afinicznych o nieujemnych wagach. Trójkąt o wierzchołkach x, y, z to podzbiór $\mathrm{af}(x, y, z)$ złożony z kombinacji afinicznych o nieujemnych wagach. Ogólniej, na wykładzie pojawi się pojęcie sympleksu.

- Półprosta oraz półpłaszczyzna, wielokąty (z wnętrzem), wielościany są zbiorami wypukłymi, które można opisać za pomocą nierówności. Nie uzasadniamy tego formalnie, ale jest to niezwykle istotne z punktu widzenia przedmiotu o nazwie Optymalizacja liniowa. Po szczegóły odsyłam do wykładu dr. Andrzeja Strojnowskiego (`https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/op1/wyklad.pdf`).

- Kule to dość ważne (delikatnie mówiąc) zbiory wypukłe. Formalne definicje wymagają pojęcia odległości lub normy, które wprowadzimy w kontekście przestrzeni euklidesowych (a ogólniej na Topologii: przestrzeni metrycznych).

- Każdy zbiór, który zawiera każdy odcinek o końcach w punktach do niego należących jest wypukły.



Bardzo ważnym aspektem teorii jest możliwość rozważania takich kombinacji afinicznych, które nie wyprowadzają poza zbiory wypukłe.

Definicja 36. *Niech $x_0, \ldots, x_k$ będą punktami w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ oraz $a_0, \ldots, a_k$ będzie układem wag, czyli $a_0 + \ldots + a_k = 1$. Kombinację afiniczną*

$$a_0 x_0 + \ldots + a_k x_k$$

nazywamy KOMBINACJĄ WYPUKŁĄ*, jeśli $a_0, a_1, \ldots, a_k \geq 0$.*

Zachęcam Czytelnika, by spróbował udowodnić następujące rezultaty.

Fakt 46. *Niech $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

- *zbiór X jest wypukły,*
- *X jest zamknięty na kombinacje wypukłe,*

Definicja 37. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór wszystkich kombinacji wypukłych punktów z X nazywamy* UWYPUKLENIEM *lub* OTOCZKĄ WYPUKŁĄ *zbioru X, oznaczaną jako $\operatorname{conv}(X)$.*

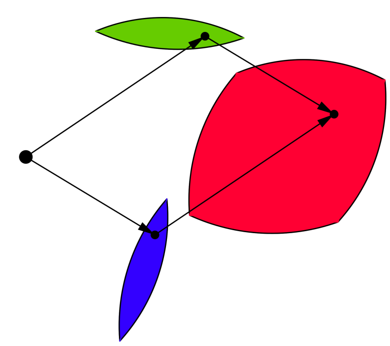
I znowu kilka nietrudnych ćwiczeń, które naśladują fakty z wykładu.

Fakt 47. *Zbiór $\operatorname{conv}(X)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym zbiór X.*

Niezwykle pięknym i ważnym aspektem teorii zbiorów wypukłych jest ich związek z dodawaniem zbiorów (rozumianych w sensie przestrzeni liniowych). Operacja ta ma w kontekście tej teorii nazwę sumy Minkowskiego.

Definicja 29. *Dla dowolnych podzbiorów A, B przestrzeni liniowej V sumą Minkowskiego tych podzbiorów nazywamy:*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$



Suma Minkowskiego zbioru niebieskiego i zielonego to zbiór czerwony.

Wiecie Państwo na przykład, że suma algebraiczna przestrzeni liniowych (czy afinicznych) nie są koniecznie afiniczne. A tymczasem okazuje się, że zachodzi następujący fakt.

Fakt 48. *Dla dowolnych podzbiorów A, B przestrzeni liniowej V mamy:*

$$\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B).$$

A zatem suma Minkowskiego zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Proszę spróbować udowodnić powyższe fakty, a do zbiorów wypukłych wrócimy w kolejnych dodatkach w kontekście tzw. geometrii kombinatorycznej (patrz np. twierdzenie Helly'ego).

Trivia. SET, czyli przestrzeń afiniczna nad $\mathbb{Z}_3$

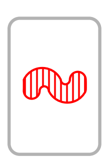
SET jest szybką i dość wciągającą grą karcianą polegającą na rozpoznawaniu prawidłowości, bardzo popularną wśród studentów i entuzjastów matematyki. Zadaniem jest identyfikowanie trzech kart z obiektami, które spełniają określone zasady – taki zbiór to właśnie Set.

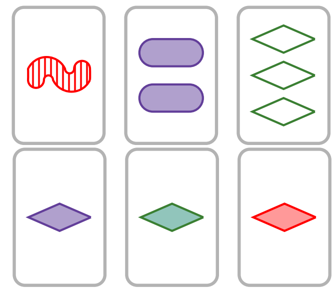
Zasady są następujące. Dana jest talia 81 kart. Każda karta jest określona przez cztery cechy, z których każda ma jedną z trzech możliwych wartości zgodnie z poniższą tabelą (sprawę $\mathbb{Z}_3$ wyjaśnimy dalej).

cecha/element $\mathbb{Z}_3$	0	1	2
liczba	raz	dwa	trzy
wypełnienie	puste	częściowe	pełne
kolor	czerwony	zielony	fioletowy
kształt	romb	elipsa	fala

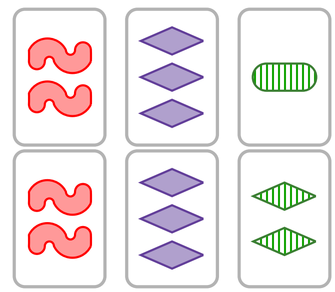
Na początku rozgrywki rozkładamy na stole 12 kart (3 rzędy po 4 kolumny). Celem jest zebranie tzw. Setów, czyli 3 kart na których każda pojedyncza cecha jest różna lub taka sama. Kiedy któryś z graczy go zauważy mówi głośno „Set"", gra się zatrzymuje i sprawdzamy czy jest on poprawny. Każdy Set jest wart 3 punkty, jednak kiedy wytypujemy zły set tracimy jedną kartę. Następnie karty uzupełniane są do 12. Jeśli na stole nie ma żadnego Seta, lub gracze wspólnie zdecydują, że nie mogą już żadnego znaleźć, należy dołożyć 3 kolejne karty. Gra kończy się w momencie kiedy wyczerpie się stos kart i nikt nie będzie mógł znaleźć kolejnego seta. Co to ma wspólnego z naszymi zajęciami?

Proszę zauważyć, że jeśli mamy dowolne dwie karty, to istnieje dokładnie jedna karta w zestawie, która tworzy z nimi Set. To się kojarzy z własnością: przez dowolne dwa punkty można przeprowadzić prostą. Pomysł jest taki, że rozważamy przestrzeń $\mathbb{Z}_3^4$ traktowaną jako przestrzeń afiniczna i w tej przestrzeni karty są punktami, a Sety – prostymi. Jak to działa? Mamy po prostu punkty o współrzędnych (x_1, x_2, x_3, x_4), które oznaczają kolejno: liczbę, wypełnienie, kolor, kształt, a liczby $0, 1, 2$ z ciała $\mathbb{Z}_3$ przypisujemy kolejno tak jak w tabeli wyżej. A zatem np. elementowi $(0, 1, 0, 2)$ przypisujemy kartę:





Powyżej – dwa Sety



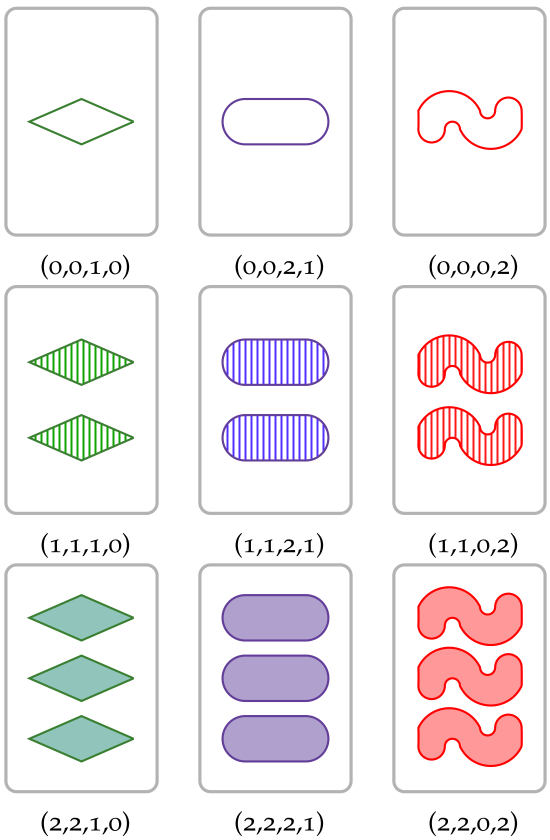
Powyżej – dwa nie-Sety

Za https://boardtime.pl/2012/11/set-recenzja.html. Proszę zagrać: https://smart-games.org/en/set/submit_set.

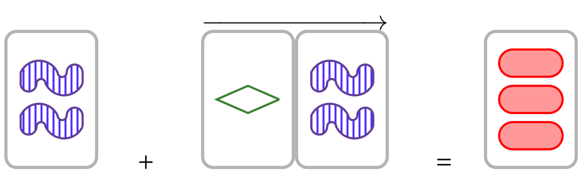
Pakiet do generowania kart do gry Set: https://ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/contrib/setdeck.

Podstawą merytoryczną jest artykuł *Algebra From Geometry in the Card Game SET* autorstwa Timothy E. Goldberga, The College Mathematics Journal , Vol. 47, No. 4, pp. 265-273 oraz materiały prof. J. Wiśniewskiego.

Wyobraźmy sobie teraz np. zbiór rozwiązań układu równań liniowych $x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 1$. Jest to warstwa dwuwymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Z}_3$, a dokładniej zbiór 9 kart. Poniżej te karty i odpowiadające im punkty. Wyraźnie widzimy, że jest to płaszczyzna afiniczna w przestrzeni $\mathbb{Z}_3^4$ złożona z 12 prostych (proszę wskazać).



Zauważmy też, że mamy operacje w tej przestrzeni, na przykład dodawanie do punktów wektorów:



$$(1,1,2,2) \quad + \quad \overrightarrow{(0,0,1,0)(1,1,2,2)} \quad = \quad (2,2,0,1)$$

Nie chcę przywoływać rozważań teoretycznych dotyczących gry Set, ale mam nadzieję, że to spojrzenie uprzyjemni Państwu myślenie o przestrzeniach afinicznych także w kontekście matematyki dyskretnej.

No dobrze, przywołam jedno: ile można wyłożyć kart, by nie było wśród nich żadnego Seta? Odpowiedź w artykule: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf