

Twierdzenie Jordana

Od początku semestru pracujemy nad poszukiwaniem warunków spełnianych przez macierze podobne nad ciałem K . Motywacją jest szukanie czytelnego opisu geometrycznego przekształceń liniowych. Znamy szereg niezmienników podobieństwa: rząd, ślad, wyznacznik, wielomian charakterystyczny. Przyszedł czas na zapoznanie się z najbardziej znanym rezultatem klasyfikacyjnym teorii endomorfizmów: twierdzeniem Jordana. Zaczniemy od sformułowania związanego z endomorfizmami przestrzeni określonych nad ciałem algebraicznie domkniętym, gdzie rezultat ten zapewnia pełną klasyfikację endomorfizmów (oraz macierzy, z dokładnością do podobieństwa).

Definicja 23. KLATKA JORDANA o wartości własnej a i rozmiarze n nazywamy macierz kwadratową postaci $M = [a]$, gdy $n = 1$ oraz:

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix},$$

gdy $n > 1$. Mówimy, że macierz $A \in M_n(K)$ jest w POSTACI JORDANA, jeśli istnieją takie liczby całkowite dodatnie n_1, n_2, \dots, n_k oraz macierze

$$J_1 \in M_{n_1}(K), J_2 \in M_{n_2}(K), \dots, J_k \in M_{n_k}(K)$$

będące klatkami Jordana takimi, że $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ oraz A jest macierzą blokową diagonalną o blokach diagonalnych J_1, \dots, J_k postaci:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix}, \quad (*)$$

Dla danej wartości własnej λ endomorfizmu ϕ te klatki Jordana J_i , które na przekątnej mają wartość λ nazywamy KLATKAMI JORDANA ODPOWIADAJĄCYMI WARTOŚCI WŁASNEJ λ w postaci (*).

Wiemy na przykład, że jeśli macierze A, B są diagonalne, to są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy z dokładnością do kolejności wyrazów na przekątnej są identyczne. Dla macierzy górnotrójkątnych warunek podobieństwa jest znacznie bardziej skomplikowany, o czym mówi główne twierdzenie tego wykładu.

Fakt 34 (Twierdzenie Jordana). *Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \text{End}(V)$. Jeżeli wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ rozkłada się nad ciałem K na czynniki liniowe to istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni V zwana **BAZĄ JORDANA**, w której macierz ϕ ma postać Jordana. W szczególności jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, wówczas każdy $\phi \in \text{End}(V)$ ma w pewnej bazie macierz w postaci Jordana.*

Macierze $A, B \in M_n(K)$ będące w postaci Jordana są podobne nad K wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się co najwyżej kolejnością klatek w postaci (*).

Na początku spróbujemy zrozumieć jak „działa” przekształcenie zadane przez macierz w postaci Jordana. Wiemy już, że jeśli przekształcenie ϕ -zadane jest w pewnej bazie macierzą blokowo-diagonalną o blokach J_i , to istnieje podprzestrzeń ϕ -niezmiennicza V_i przestrzeni V taka, że $\phi|_{V_i}$ ma macierz J_i . Jak działa ϕ na pojedynczym bloku?

Niech $\mathcal{J} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ oraz

$$M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix},$$

Wynika stąd, że mamy:

$$\begin{aligned} \phi(\beta_1) &= a \cdot \beta_1 \\ \phi(\beta_2) &= \beta_1 + a \cdot \beta_2 \\ \phi(\beta_3) &= \beta_2 + a \cdot \beta_3 \\ &\vdots \\ \phi(\beta_n) &= \beta_{n-1} + a \cdot \beta_n. \end{aligned}$$

Rozważając odzorowanie $\phi - a \cdot \text{id}$ mamy:

$$\begin{aligned} (\phi - a \cdot \text{id})(\beta_1) &= 0 \\ (\phi - a \cdot \text{id})(\beta_2) &= \beta_1 \\ (\phi - a \cdot \text{id})(\beta_3) &= \beta_2 \\ &\vdots \\ (\phi - a \cdot \text{id})(\beta_n) &= \beta_{n-1}. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że przy kolejnych działaniach $\phi - a \cdot \text{id}$ wszystkie wektory β_1, \dots, β_n ustawiają się (w odwrotnej kolejności) w łańcuch, w którym każdy następny (poza pierwszym, czyli β_n) jest obrazem poprzedniego, a ostatni (czyli β_1) zamienia się w zerowy:

$$\beta_n \mapsto \beta_{n-1} \mapsto \beta_{n-2} \mapsto \dots \mapsto \beta_2 \mapsto \beta_1 \mapsto 0.$$

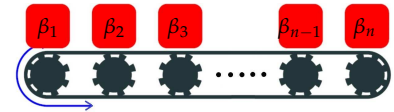
Nie dowodzimy tego twierdzenia, poza ostatnią, wydzieloną tu częścią. Pełen dowód znajduje się w skrypcie dr. Koźniewskiego, ale nie jest obowiązkowy.

Korzystając z interpretacji podanej w dodatkach możemy powiedzieć, że postać blokowo-diagonalna wymusza istnienie rozkładu ϕ -niezmienniczego

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k,$$

a więc ϕ na każdym składniku prostym V_i działa niezależnie od tego jak działa na innych składnikach prostych.

W szczególności V staje się podprzestrzenią cykliczną endomorfizmu $\phi - a \cdot \text{id}$ względem wektora β_n . To jedna ważna obserwacja. Druga jest natomiast następująca: wektor β_i należy do jądra przekształcenia powstającego przez i -krotne złożenie $\phi - a \cdot \text{id}$, czyli $\beta_i \in \ker(\phi - a \cdot \text{id})^i$. Beletrystyczna interpretacja tego działania znajduje się po prawej.



Działanie $\phi - a \cdot \text{id}$.

Rozumiemy zatem opis endomorfizmu, który można zapisać w bazie Jordana w postaci macierzy o dokładnie jednej klatce Jordana odpowiadającej wartości własnej a . Spróbujmy teraz przyjrzeć się kolejnej sytuacji, gdy endomorfizm $\phi \in \text{End}(K^{11})$ ma dokładnie jedną wartość własną a , co więcej $w_\phi(\lambda) = -(a - \lambda)^{11}$, ale w bazie $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_{11}\}$ ma postać Jordana o trzech klatkach rozmiarów odpowiednio 5, 4, 2.

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

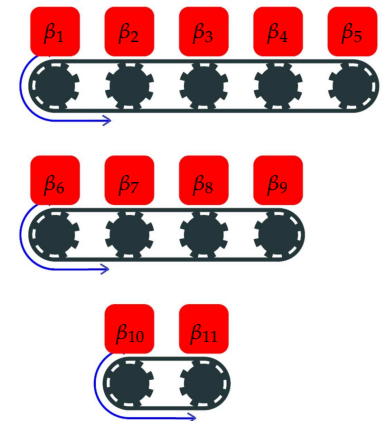
Widzimy zatem, że tym razem wektory bazy Jordana endomorfizmu ϕ układają się w trzy łańcuchy, odpowiadające trzem podprzestrzeniom cyklicznym rozpiętym przez wektory $\beta_5, \beta_9, \beta_{11}$.

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
β_6	β_7	β_8	β_9	
β_{10}	β_{11}			

Możemy zobrazować bazę Jordana na diagramie zawierającym wektory bazowe. W wierszach tego diagramu wpisane są wektory rozpinające odpowiednie przestrzenie cykliczne, natomiast to, że dany wektor należy do i -tej kolumny od lewej oznacza, że wektor ten leży w $\ker(\phi - a \text{id})^i$. Gdyby było tak, że znamy wzór przekształcenia ϕ i wiemy, że jego macierz w pewnej bazie ma postać powyżej, wówczas można (i będziemy to robić) wyznaczyć bazę $(\beta_1, \dots, \beta_{11})$.

Wreszcie, należy przyjrzeć się ogólnej sytuacji, gdy endomorfizm ϕ ma (parami różne) wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ o krotnościach algebraicznych t_1, t_2, \dots, t_s i krotnościach geometrycznych r_1, r_2, \dots, r_s .

Twierdzenie Jordana mówi, że z dokładnością do kolejności klatek macierz endomorfizmu triangularyzowalnego będąca w postaci Jordana jest wyznaczona jednoznacznie.



Działanie $\phi - a \cdot \text{id}$ na trzech blokach.

Uspokajam – będziemy to robić dla macierzy rozsądnych rozmiarów.

Oto przykładowa sytuacja, gdy $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$, zaś $t_1 = 8, t_2 = 6, t_3 = 2$ oraz $r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1$. Weźmy $A \in M_{16}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jeśli przyjmiemy, że jest to macierz endomorfizmu $\phi \in \mathbb{R}^{16}$ w bazie Jordana $(\beta_1, \dots, \beta_{16})$, to dla każdej wartości własnej rozważyć można diagramy opisujące działania odpowiednich endomorfizmów:

- endomorfizm $\phi - 1 \cdot \text{id}$ ograniczony do przestrzeni rozpiętej na $\{\beta_1, \dots, \beta_8\}$ przekształca te wektory zgodnie ze schematem:

$$\beta_4 \mapsto \beta_3 \mapsto \beta_2 \mapsto \beta_1 \mapsto 0, \quad \beta_7 \mapsto \beta_6 \mapsto \beta_5 \mapsto 0, \quad \beta_8 \mapsto 0.$$

- endomorfizm $\phi - 3 \cdot \text{id}$ ograniczony do przestrzeni rozpiętej na $\{\beta_9, \dots, \beta_{14}\}$ przeprowadza te wektory zgodnie ze schematem:

$$\beta_{11} \mapsto \beta_{10} \mapsto \beta_9 \mapsto 0, \quad \beta_{14} \mapsto \beta_{13} \mapsto \beta_{12} \mapsto 0$$

- endomorfizm $\phi - 2 \cdot \text{id}$ ograniczony do przestrzeni rozpiętej na $\{\beta_{15}, \beta_{16}\}$ przeprowadza te wektory zgodnie ze schematem:

$$\beta_{16} \mapsto \beta_{15} \mapsto 0.$$

A zatem widzimy, że działania tych endomorfizmów można zebrać na następujących trzech diagramach:

β_1	β_2	β_3	β_4
β_5	β_6	β_7	
β_8			

β_9	β_{10}	β_{11}
β_{12}	β_{13}	β_{14}

β_{15}	β_{16}
--------------	--------------

Przejdziemy teraz do pokazania, że dwie macierze w postaci Jordana są podobne (nad ustalonym ciałem) wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się co najwyżej kolejnością klatek.

Fakt 35. Niech $A \in M_n(K)$ i niech a będzie wartością własną macierzy A . Dla każdego $m = 1, 2, \dots$ niech

$$q_m = r(A - aI)^{m-1} - r(A - aI)^m.$$

Przyjmujemy też $(A - aI)^0 = I$. Wówczas jeśli $B \in M_n(K)$ jest macierzą w postaci Jordana podobną do A , to w macierzy B :

- (1) Suma rozmiarów klatek odpowiadających wartości własnej a to jej krotność algebraiczna.
- (2) Liczba klatek Jordana rozmiaru $\geq m$ odpowiadających a wynosi q_m .
- (3) Liczba klatek Jordana rozmiaru m odpowiadających a wynosi $q_m - q_{m+1}$.

Dowód. Macierze A i B są podobne, więc mają ten sam wielomian charakterystyczny. Stwierdzenie (1) wynika od razu z tego, że wszystkimi pierwiastkami wielomianu charakterystycznego macierzy (górnotrójkątnej) w postaci Jordana są elementy z przekątnej. Suma rozmiarów klatek odpowiadających wartości własnej a równa jest sumie wystąpień a na przekątnej macierzy B . Dowodzimy (2), (3). Zaczniemy od sprawdzenia, że jeśli A jest macierzą rozmiaru n nad K , oraz B jest podobną do niej macierzą w postaci Jordana, to dla każdego $a \in K$ mamy

$$r(A - aI)^k = r(B - aI)^k.$$

Rzeczywiście, skoro $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C , to:

$$C^{-1}(A - aI)C = C^{-1}AC - C^{-1}aIC = B - aI.$$

W szczególności macierze $A - aI$ oraz $B - aI$ są podobne. Mamy więc:

$$\begin{aligned} (B - aI)^k &= (C^{-1}(A - aI)C)^k = \\ &= \underbrace{C^{-1}(A - aI)C \cdot C^{-1}(A - aI)C \cdot \dots \cdot C^{-1}(A - aI)C}_k \\ &= C^{-1}(A - aI)^k C. \end{aligned}$$

Skoro macierze $(B - aI)^k$ oraz $(A - aI)^k$ są podobne, to oczywiście ich rzędy są równe. Zajmiemy się zatem wyznaczeniem rzędów potęg odpowiednich macierzy powstałych z macierzy w postaci Jordana.

Zauważmy, że dla macierzy blokowo-diagonalnej B mamy:

$$B = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \implies B^m = \begin{bmatrix} J_1^m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_k^m \end{bmatrix}.$$

Aby uniknąć nawiasowego oczopląsu przyjmujemy, że nigdy nie liczymy potęgi rzędu macierzy, ale zawsze liczymy rząd potęgi macierzy.

W szczególności:

$$r(B^m) = r(J_1^m) + r(J_2^m) + \dots + r(J_k^m).$$

Po drugie, zauważmy, że jeśli B jest blokowo-diagonalna, to również $B - aI$ jest blokowo diagonalna. Skoro B jest w postaci Jordana z klatkami J_1, J_2, \dots, J_k odpowiadającymi wartościom własnym a_1, \dots, a_k , to $B - aI$ ma klatki Jordana $J_1 - aI, J_2 - aI, \dots, J_k - aI$ o wartościach własnych $a_1 - a, a_2 - a, \dots, a_n - a$ (i tych samych rozmiarach). Stąd:

$$r(B - aI)^m = r(J_1 - aI)^m + r(J_2 - aI)^m + \dots + r(J_k - aI)^m.$$

Chcemy wyznaczyć rząd potęgi macierzy postaci:

$$J_i - aI = \begin{bmatrix} a_i - a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i - a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i - a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i - a \end{bmatrix}.$$

Oczywiście jeśli $a_i - a \neq 0$, to rząd każdej potęgi tej klatki równy jest jej rozmiarowi, powiedzmy s_i . Jeśli jednak $a_i - a = 0$, to dostajemy macierz mającą jedynki nad przekątną samych zer. A zatem jeśli (po ewentualnym przenumerowaniu) przyjmiemy, że $a_i - a = 0$ dla $i = 1, 2, 3, \dots, s$, gdzie s to liczba klatek Jordana macierzy B odpowiadających wartości własnej a , to mamy:

$$r(B - aI)^{m-1} - r(B - aI)^m = \sum_{i=1}^s r(J_i - aI)^{m-1} - r(J_i - aI)^m.$$

Dla $i > s$, czyli dla klatek J_i nie odpowiadających wartości własnej a mamy

$$r(J_i - aI)^{m-1} = r(J_i - aI)^m = s_i.$$

Załóżmy, że J_i ma rozmiar s_i . Ile wynosi składnik opisany wyżej? Przypomnijmy, że

$$J_i - aI = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{s_i}(K).$$

Innymi słowy J jest macierzą w bazach standardowych (znanego nam już) endomorfizmu $\phi \in \text{End}(K^{s_i})$ postaci:

$$\phi(x_1, \dots, x_{s_i}) = (x_2, x_3, \dots, x_{s_i}, 0).$$

Jest zatem jasne, że

$$\dim \text{im } \phi^m = \begin{cases} s_i - m, & m \leq s_i \\ 0, & m \geq s_i. \end{cases}$$

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem bazy Jordana endomorfizmu. Nie podamy ogólnego algorytmu, ale zilustrujemy kilka problemów.

Przykład. Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zadane będzie wzorem:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_2 + 3x_3 + 2x_4, x_3 + x_4, x_4).$$

Macierz w bazach standardowych tego endomorfizmu to:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście wielomianem charakterystycznym tego endomorfizmu jest $(1 - \lambda)^4$. Skoro rozkłada się on nad \mathbb{R} na iloczyn czynników liniowych, to wiemy, że istnieje baza, w której ϕ ma macierz w postaci Jordana. Wyznamy ją przez badanie potęg macierzy $A = M(\phi - \text{id})_{st}^{st}$. Mamy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A zatem $r(A) = 3, r(A^2) = 2, r(A^3) = 1$ oraz $r(A^n) = 0$, dla $n \geq 4$. A zatem endomorfizm ϕ ma w pewnej bazie Jordana \mathcal{J} jedną klatkę rozmiaru 4 postaci:

$$M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak wyznaczamy bazę $\mathcal{J} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$? Przypomnijmy jak wygląda diagram z elementami tej bazy:

$$\boxed{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4}$$

A zatem przy endomorfizmie $\phi - \text{id}$ poszczególne wektory bazowe przechodzą na siebie w następujący sposób:

$$\alpha_4 \mapsto \alpha_3 \mapsto \alpha_2 \mapsto \alpha_1 \mapsto 0.$$



Zamiast czytać można również obejrzeć:
<https://youtu.be/ayIYqL26MNY>.

Zatem α_4 należy do $\ker(\phi - \text{id})^4 \setminus \ker(\phi - \text{id})^3$. Macierzą $(\phi - \text{id})^4$ jest macierz A^4 , szukamy więc wektorów takich, że $A^4 v = 0$. Oczywiście każdy wektor z \mathbb{R}^4 ma tę własność, czyli

$$\ker(\phi - \text{id})^4 = \mathbb{R}^4.$$

Wyznamy $\ker(\phi - \text{id})^3$. Podprzestrzeń ta składa się z wektorów w takich, że $A^3 w = 0$. A zatem jeśli w_1, \dots, w_4 to współrzędne w w bazie standardowej, mamy:

$$A^3 w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W rezultacie

$$\ker(\phi - \text{id})^3 = \text{lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)).$$

Nietrudno więc wybrać wektor α_4 z $\ker(\phi - \text{id})^4 \setminus \ker(\phi - \text{id})^3$. Jest to dowolny wektor postaci $(0, 0, 0, a)$, gdzie $0 \neq a \in K$. Każdy wybór a doprowadzi do uzyskania innej bazy Jordana V endomorfizmu ϕ , w której przekształcenie to będzie miało jednakże taką samą macierz. Na przykład bierzemy $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$. Wówczas:

$$\alpha_3 = (\phi - \text{id})(\alpha_4) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_2 = (\phi - \text{id})(\alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\alpha_1 = (\phi - \text{id})(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A zatem przykładowa baza Jordana \mathcal{J} endomorfizmu ϕ to:

$$((6, 0, 0, 0), (5, 3, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Zauważmy, że dla $C = M(\text{id})_{\mathcal{J}}^{st}$ mamy $M(\phi)_{\mathcal{J}} = C^{-1}M(\phi)_{st}C$, czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ktoś z Państwa może powiedzieć: to zdecydowanie zbyt skomplikowana metoda, nawet jak na jedną klatkę. Mamy macierz przekształcenia i wiemy, że

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_1) &= \alpha_1 \\ \phi(\alpha_2) &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ \phi(\alpha_3) &= \alpha_2 + \alpha_3, \\ \phi(\alpha_4) &= \alpha_3 + \alpha_4\end{aligned}$$

Czy nie możemy po prostu wyznaczyć wektora własnego α_1 , a później napisać układów równań, które pozwolą wyznaczyć pozostałe wektory? Innymi słowy: wiemy, że każdy wektor własny x o współrzędnych w bazie standardowej (x_1, x_2, x_3, x_4) spełnia warunek $(\phi - \text{id})(x) = 0$, czyli

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

czyli $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{lin}((1, 0, 0, 0))$. Możemy zatem wybrać $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)$ i przejść do wyznaczenia α_2 o współrzędnych (y_1, y_2, y_3, y_4) z warunku $\phi(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, czyli $(\phi - \text{id})(\alpha_2) = \alpha_1$. Dostajemy układ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy w ten sposób nie wyznaczymy α_2, α_3 oraz α_4 ? Wyznaczymy, i w prostych sytuacjach można tak wyznaczać bazę Jordana (tzn. w sytuacjach, gdy wprowadzić wartości własnych może być wiele, ale każdej odpowiada jedna klatka). Metoda ta ma jednak wady gdy danej wartości własnej odpowiada więcej klatek.

Przykład. Weźmy $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane w bazie standardowej macierzą.

$$A = M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mam nadzieję, że uwierzycie mi Państwo, że $w_\psi(\lambda) = (2 - \lambda)^3$ oraz, że $r(A - 2I) = 1$, a zatem postać Jordana ψ ma 2 bloki rozmiaru ≥ 1 , czyli w pewnej bazie $\mathcal{J} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$M(\psi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jak teraz wyznaczymy Państwo α_1 ? Sprawdzamy, że

$$V_{(2)} = \text{lin}((1, 2, 0), (0, 0, 1)).$$

Czy można przyjąć za α_1 dowolny wektor własny, choćby $(1, 2, 0)$? Wówczas koniecznie $\psi(\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2$, czyli

$$(\psi - 2\text{id})(\alpha_2) = \alpha_1.$$

Jeśli $\alpha_2 = (x_1, x_2, x_3)$, to mamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że układ ten nie ma rozwiązań! A zatem wybór wektora własnego $(1, 2, 0)$ był nieprawidłowy. Nie można wybrać dowolnego wektora własnego „do klatki” rozmiaru > 1 ! Wektor α_1 jest bowiem zdeterminowany przez postać α_2 , a dokładniej wektory poszukiwanej bazy powstają zgodnie ze schematem:

α_1	α_2
α_3	

Wektor α_1 powinien być innym elementem $V_{(2)}$. Jakim? Wróćmy do metody opisanej dla sytuacji gdy macierz endomorfizmu była pojedynczą klatką. Wyznamy najpierw α_2 . Oczywiście w dalszym ciągu

$$\alpha_2 \in \ker(\psi - 2\text{id})^2 \setminus \ker(\psi - 2\text{id}).$$

Jednak $\ker(\psi - 2\text{id})^2 = \mathbb{R}^3$, bo

$$M((\psi - 2\text{id})^2)_{st} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A zatem α_2 może być wybrany jako dowolny niezerowy wektor niewłasny. Na przykład $\alpha_2 = (0, 1, 0)$. Wówczas mamy: $\alpha_1 = (\psi - 2\text{id})(\alpha_2)$, czyli $\alpha_1 = (-1, -2, -4)$. Teraz możemy do wektora α_1 wektor własny α_3 . Wybór α_3 zależy więc od wyboru wektora niewłasnego α_2 , a nie tylko od liniowej niezależności z α_1 . Czy widzicie Państwo jak wyglądałaby sytuacja, gdyby było to przekształcenie $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ i jego postać Jordana miałaby dwie klatki 2×2 odpowiadające tej samej wartości własnej?

Nie jest naszym celem uczenie Państwa ogólnych algorytmów wyznaczania bazy Jordana, choć są one opisane i można je wywnioskować na podstawie powyższych przykładów. Na ćwiczeniach i kolokwiach obowiązują przykłady o stopniu trudności występującym w skrypcie dr. Koźniewskiego i na poprzednich kolokwiach.

Uzupełnienie. Podobieństwo nad ciałami nieskończonymi

Ten materiał poświęcimy krótkiej informacji na temat badania podobieństwa macierzy, które nie są triangularyzowalne, a więc nie są podobne do żadnej macierzy górnotrójkątnej (i co za tym idzie nie są podobne do macierzy w postaci Jordana). Chciałbym w nim podkreślić dwa aspekty sprawy, a więc dwa podejścia do stwierdzania czy macierze są podobne.

Jedno podejście mówi, że można próbować określać inne typy „postaci kanonicznych”, do których można by próbować sprowadzać dowolną macierz, niekoniecznie triangularyzowalną. Postać Jordana jest typem „postaci kanonicznej” dla macierzy triangularyzowalnej – za jej pomocą można po prostu zliczać wszystkie klasy podobieństwa macierzy tego typu. Jest wiele innych form, ogólniejszych – w szczególności niegórnotrójkątnych. Najstynniejszą jest zapewne postać kanoniczna (normalna) Frobeniusa, inną jest postać kanoniczna Weyra, a jest ich więcej. Czytelnik bez trudu znajdzie odpowiednie wyniki w literaturze. Warto pokazać przykład takich form kanonicznych dla macierzy nad ciałem liczb rzeczywistych. Zachęcam Czytelnika, by wychodząc od twierdzenia Jordana spróbował udowodnić następujący wynik.

Fakt 37 (Rzeczywista postać Jordana). *Niech $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$. Istnieje taka baza \mathcal{A} przestrzeni \mathbb{R}^n , że macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać blokowo-diagonalną, w której bloki są klatkami Jordana lub uogólnionymi rzeczywistymi klatkami Jordana postaci*

$$K_n(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} A & I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

(blok A pojawia się $n \geq 1$ razy), zaś

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

dla pewnych $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$.

Nietrudno zrozumieć ideę tego twierdzenia. Liczba nierzeczywista z jest wartością własną wielomianu charakterystycznego $w_\phi(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ endomorfizmu $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, to \bar{z} też jest pierwiastkiem tego wielomianu. A zatem gdyby traktować macierz A endomorfizmu ϕ jako macierz rozmiaru n nad \mathbb{C} , to oczywiście znaleźlibyśmy takie $C \in M_n(\mathbb{C})$, że $C^{-1}AC$ jest w postaci Jordana. Chodzi jednak o to, by poprawić C do odwracalnej macierzy rzeczywistej. Jak to zrobić?

Można też zajrzeć do mojego wykładu dla potoku gwiazdkowego, gdzie znajdują się opisy tych form i szkice dowodów: <https://mimuw.edu.pl/~amecel/2021l/gal21/GAL2+-AM-w6.pdf>.

Drugi wynik, o którym wspomniemy stanowi rozwinięcie idei podanej wyżej. Mówi ono coś bardzo zaskakującego.

Fakt 38. *Jeśli $K \subseteq L$ są ciałami oraz $A, B \in M_n(K)$, to jeśli A, B są podobne nad L , to są podobne nad K .*

Przyjmijmy, że $K = \mathbb{R}$ oraz $L = \mathbb{C}$. Powyższy wynik mówi, że do sprawdzenia czy dwie macierze rzeczywiste są podobne nad \mathbb{R} nie trzeba znajdowania ich rzeczywistych postaci Jordana i porównywania ich, ale wystarczy sprawdzić czy są one podobne jako macierze zespolone. Jeśli są, to muszą być podobne również nad \mathbb{R} . Podejście to więc zapewni jedynie istnienie macierzy podobieństwa, bez wskazywania jej.

Dowód tego rezultatu jest stosunkowo nietrudny, gdy K jest ciałem nieskończonym. Poniżej opisany jest w punktach jego szkic, który można samodzielnie uzupełnić. W przypadku, gdy K jest skończone wymaga osobnej, ciekawej teorii macierzy wielomianowych (znowu odsyłam do moich notatek dla potoku gwiazdkowego).

1. Niech $K \subseteq L$ oraz niech macierze $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L . Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
2. Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K . A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K .
3. Z poprzedniego punktu mamy

$$C = C_1 e_1 + \dots + C_r e_r,$$

gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z przestrzeni F (nad K).

4. Rozważmy wielomian r zmiennych (definicja indukcyjna, intuicyjna) postaci

$$P(t_1, \dots, t_r) = \det(t_1 C_1 + \dots + t_r C_r) \in K[t_1, \dots, t_r].$$

5. Skoro $\det C \neq 0$, to $P(e_1, \dots, e_r) \neq 0$, a więc $P \neq 0$.
6. Skoro K jest nieskończone (!), to istnieją skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, że $P(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0$.
7. Zatem $D = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r \in M_n(K)$ jest odwracalna i łatwo widzieć, że $B = D^{-1}AD$. Dowód jest zakończony.

Fakt 39. Niech $\phi \in \text{End}(V)$ i niech a_1, \dots, a_k będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ . Następujące warunki są równoważne.

- Endomorfizm ϕ jest triangularyzowalny.
- $\dim V = \dim V_{[a_1]} + \dim V_{[a_2]} + \dots + \dim V_{[a_k]}$.
- $V = V_{[a_1]} \oplus V_{[a_2]} \oplus \dots \oplus V_{[a_k]}$.

Jeśli zachodzi dowolny z warunków wyżej oraz

$$w_\phi(\lambda) = (a_1 - \lambda)^{t_1} \cdot \dots \cdot (a_k - \lambda)^{t_k},$$

to

- (1) $V_{[a_j]} = \ker(\phi - a_j \text{id})^{t_j}$.
- (2) $\text{im}((\phi - a_j \text{id})^{t_j}) = \bigoplus_{i \neq j} V_{[a_i]}$
- (3) $w_{\phi|_{V_{[a_i]}}}(\lambda) = (a_j - \lambda)^{t_j}$,
- (4) $\dim V_{[a_j]} = t_j$.

Pierwsza część tego wyniku jest wnioskiem z twierdzenia o rozkładzie prymarnym, a druga wymaga osobnych, całkiem ładnych argumentów.

Wspominam o tym twierdzeniu w ramach pewnej próby opowiedzenia o tym jak w sposób ogólny wyznaczać bazę Jordana endomorfizmu triangularyzowalnego $\phi \in \text{End}(V)$, spełniającego warunki powyższego twierdzenia, bez wchodzenia w szczegóły techniczne. Ogólny algorytm można zamknąć w następujących etapach.

1. Wyznaczenie postaci Jordana ϕ .
2. Wyznaczenie baz Jordana $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k$ podprzestrzeni pierwiastkowych $V_{[a_1]}, \dots, V_{[a_k]}$ endomorfizmów $\phi|_{V_{[a_1]}}, \dots, \phi|_{V_{[a_k]}}$.

Innymi słowy macierz $\phi|_{V_{[a_i]}}$ ma mieć w bazie \mathcal{J}_i wszystkie klatki Jordana odpowiadające wartości własnej a_i w postaci Jordana macierzy całego endomorfizmu ϕ – i tylko te klatki. Oczywiście może być ich wiele, bo \mathcal{J}_i rozbija się na podzbiory rozpinające podprzestrzenie cykliczne odpowiadające poszczególnym klatkom (dla danej wartości własnej). A więc można powiedzieć, że twierdzenie Jordana orzeka, że dla dowolnego endomorfizmu triangularyzowalnego przestrzeni V , możemy napisać, że V jest sumą prostą przestrzeni ϕ -cyklicznych, które pogrupować można w mniejsze sumy proste stanowiące podprzestrzenie pierwiastkowe odpowiadające wartościom własnym ϕ .

Trivia. Problem Collatza

Przy tak poważnym twierdzeniu jak twierdzenie Jordana nie wypada opowiadać o matematycznych zabawkach, a warto przytoczyć prawdziwy i otwarty od dawna problem badawczy. Będzie on dotyczył następującej prostej funkcji na zbiorze liczb naturalnych.

Definicja 25. Definiujemy następującą FUNKCJĘ COLLATZA $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \\ \frac{n}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Problem Collatza (1937). Rozstrzygnąć czy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ w ciągu $f^n(k)$ znajduje się liczba 1.

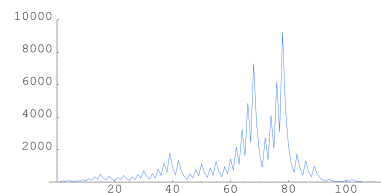
Zagadnienie to było rozważane przez wielu słynnych matematyków, m.in. Ulama, Kakutaniego. Paul Erdős wypowiedział o nim słynne zdanie: „mathematics is not yet ready for such problems”.

Przyjrzyjmy się ciągom $(n, f(n), f^2(n), \dots)$ dla kilku liczb całkowitych:

$$(n, f(n), f^2(n), \dots) = \begin{cases} n = 5 : & (5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ n = 6 : & (6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ n = 7 : & (7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots) \\ n = 8 : & (8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ n = 9 : & (9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots) \\ n = 10 : & (10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \end{cases}$$

Jak widzimy, ciągi te w końcu „schodzą” do 1, a potem powtarza się cykl (1, 4, 2). Można by spodziewać się, że ciągi te nie będą osiągały zawrotnych wartości w porównaniu do liczby początkowej.

Tymczasem patrząc na $n = 27$ okazuje się, że $f^{36}(n) = 1186$, zaś $f^{77}(n) = 9232$. Okazuje się to jednak być największa wartość tego ciągu, a już $f^{111}(n) = 1$. Zachowanie $f^k(n)$ nie jest łatwo przewidywalne.



Przebieg $f^k(27)$.

Gdy problem jest bardzo trudny matematycy próbują go przetłumaczyć na inny problem. Równoważnych sformułowań wielki problemów takich jak hipoteza Riemanna są setki, o ile nie tysiące. Problem Collatza może nie jest milenijny (choć Erdős oferował 500 dolarów za jego rozwiązanie), ale ma ładne przetłumaczenie na problem algebroliniowy, więc kto wie – może Państwo go rozwiążą?

Zgodnie ze sloganem: jeśli chcesz zobaczyć co jest na szczycie góry wejdź na sąsiednią i popatrz przez lornetkę.

