

Kongruentność macierzy nad \mathbb{R} oraz \mathbb{C}

Poprzedni wykład dotyczył znajdowania baz prostopadłych w przestrzeniach dwuliniowych. Kluczowy rezultat zapewnia istnienie takiej bazy dla każdej przestrzeni dwuliniowej nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wynik ten ma bardzo istotne skutki dla problemu znajdowania macierzy danej symetrycznej dwuliniowej formy h . Jeśli dodamy informację, że macierze kwadratowe $A, B \in M_n(K)$ są kongruentne tylko wtedy, gdy są macierzami pewnej formy dwuliniowej, otrzymamy kluczowy wniosek.

Fakt 158. *Nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej.*

Naszym celem jest klasyfikacja symetrycznych macierzy nad ciałem K (na razie zakładamy tylko, że $\text{char } K \neq 2$), które znajdują się w tej samej klasie kongruencji (nad K). Wiemy już, że każda macierz symetryczna jest w tej relacji z pewną macierzą diagonalną. Nad ciałami \mathbb{R} oraz \mathbb{C} możemy doprecyzować to twierdzenie do następującej postaci.

Fakt 159. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K .*

(a) *Jeśli $K = \mathbb{C}$, to istnieje taka baza prostopadła $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni V , że:*

$$h(\alpha_i, \alpha_i) \in \{0, 1\}, \text{ dla } i = 1, \dots, n.$$

Zatem dla $i, j = 1, \dots, n$ mamy:

$$h(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 \text{ lub } 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

(b) *Jeśli $K = \mathbb{R}$, to istnieje taka baza prostopadła $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni V , że:*

$$h(\alpha_i, \alpha_i) \in \{0, 1, -1\}, \text{ dla } i = 1, \dots, n.$$

Zatem dla $i, j = 1, \dots, n$ mamy:

$$h(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, 1 \text{ lub } -1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Fakt 161. Symetryczne macierze $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam rząd. Istnieje więc $n + 1$ klas kongruencji symetrycznych macierzy zespolonych $n \times n$.

Dowód. Wykazaliśmy, że każda symetryczna macierz zespolona A jest kongruentna nad \mathbb{C} do macierzy D_A mającej postać z Wniosku 1. Przy tym liczba jedynek występującej na przekątnej macierzy D_A równa jest $r(D_A)$, czyli też $r(A)$, bo macierze kongruentne muszą mieć identyczny rząd (jest to rząd odpowiadającej im formy). Zatem jeśli macierze symetryczne $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ mają ten sam rząd k , to obie są kongruentne do tej samej macierzy 0-1-kowej z Wniosku 1. Stąd, z przechodniości relacji kongruencji, macierze A i B są kongruentne nad \mathbb{C} . Macierzy $n \times n$ postaci D_A opisanej we Wniosku 1 jest $n + 1$, przy czym parami różne nie są kongruentne, bo mają różny rząd. Wynika stąd, że jest $n + 1$ klas kongruencji symetrycznych macierzy zespolonych $n \times n$. \square

Czego zatem dowiedzieliśmy się o każdej zespolonej symetrycznej formie dwuliniowej h na przestrzeni V ? Otóż można do niej dobrać bazę prostopadłą V taką, że forma h obcięta do podprzestrzeni rozpiętej przez pierwszych $r(h)$ wektorów tej bazy jest dodatnio określona. Zachowuje się ona na tej podprzestrzeni „w zasadzie jak” iloczyn skalarny. Jesteśmy wprawdzie nad \mathbb{C} , ale dla tej podprzestrzeni te $r(h)$ wektorów rozpinających to jest właściwie „baza ortonormalna”, której nie da się w przestrzeniach dwuliniowych często wyznaczyć (co innego z bazą ortogonalną). Na prostopadłej podprzestrzeni rozpiętej przez pozostałe $\dim V - r(h)$ wektorów (izotropowych) forma jest całkowicie zdegenerowana – zabija wszystko. A więc symetryczne formy dwuliniowe nad \mathbb{C} można oglądać „lokalnie” obcinając je do dwóch podprzestrzeni. Patrząc na każde obcięcie z osobna całkowicie rozumiemy co się w podprzestrzeni dzieje (z formą) i w łatwy sposób umiemy „skleić” obcięcia do pełnego opisu. Ta sama idea, tylko dotycząca „sklejania” endomorfizmu z jego obcięć do podprzestrzeni niezmienniczych leży u podstaw twierdzenia Jordana.

Fakt 162 (Twierdzenie Sylwestera o bezwładności). Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ będą bazami prostopadłymi przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem \mathbb{R} . Oznaczmy:

- $r_+(\mathcal{A}) =$ liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $h(\alpha_i, \alpha_i) > 0$,
- $r_-(\mathcal{A}) =$ liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $h(\alpha_i, \alpha_i) < 0$,
- $r_+(\mathcal{B}) =$ liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $h(\beta_i, \beta_i) > 0$,
- $r_-(\mathcal{B}) =$ liczba takich $1 \leq i \leq n$, że $h(\beta_i, \beta_i) < 0$.

Wówczas

$$r_+(\mathcal{A}) = r_+(\mathcal{B}) \quad \text{oraz} \quad r_-(\mathcal{A}) = r_-(\mathcal{B}).$$

Ponadto $r_+(\mathcal{A}) + r_-(\mathcal{A}) = r(h) = r_+(\mathcal{B}) + r_-(\mathcal{B})$.

Dowód. Definiujemy następujące trójki podprzestrzeni V rozpiętych przez elementy bazowe z \mathcal{A} , \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} V_+ &= \text{lin}(\alpha_i \mid h(\alpha_i, \alpha_i) > 0), & W_+ &= \text{lin}(\beta_i \mid h(\beta_i, \beta_i) > 0), \\ V_- &= \text{lin}(\alpha_i \mid h(\alpha_i, \alpha_i) < 0), & V_0 &= \text{lin}(\alpha_i \mid h(\alpha_i, \alpha_i) = 0), \\ W_- &= \text{lin}(\beta_i \mid h(\beta_i, \beta_i) < 0), & W_0 &= \text{lin}(\beta_i \mid h(\beta_i, \beta_i) = 0). \end{aligned}$$

Jest jasne, że

$$r_+(\mathcal{A}) = \dim V_+, r_-(\mathcal{A}) = \dim V_-, r_+(\mathcal{B}) = \dim W_+, r_-(\mathcal{B}) = \dim W_-.$$

Co więcej

$$V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0,$$

skąd

$$\dim V_+ + \dim V_- + \dim V_0 = \dim V = \dim W_+ + \dim W_- + \dim W_0.$$

Przy tym

$$\dim V_+ + \dim V_- = r(h) = \dim W_+ + \dim W_-,$$

co daje

$$r_+(\mathcal{A}) + r_-(\mathcal{A}) = r(h) = r_+(\mathcal{B}) + r_-(\mathcal{B}),$$

co stanowi drugą część tezy.

Dowodzimy, że $r_+(\mathcal{A}) = r_+(\mathcal{B})$. Zaczniemy od pokazania tego, że $V_+ \cap (W_- + W_0) = \{0\}$. Otóż

- dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in V_+$ mamy

$$h(\alpha, \alpha) = h\left(\sum a_i \alpha_i, \sum a_i \alpha_i\right) = \sum a_i^2 h(\alpha_i, \alpha_i) > 0,$$

- dla każdego wektora $\beta \in W_-$ mamy

$$h(\beta, \beta) = h\left(\sum b_i \beta_i, \sum b_i \beta_i\right) = \sum b_i^2 h(\beta_i, \beta_i) \leq 0.$$

A zatem dla każdego $\delta = \beta + \gamma$, gdzie $\beta \in W_-$, $\gamma \in W_0$ zachodzi:

$$h(\delta, \delta) = h(\beta + \gamma, \beta + \gamma) = h(\beta, \beta) + 2h(\beta, \gamma) + h(\gamma, \gamma) = h(\beta, \beta) + 0 + 0 \leq 0.$$

A zatem $V_+ \cap (W_- + W_0) = \{0\}$, a stąd

$$\dim V_+ + \dim(W_- + W_0) = \dim(V_+ + W_- + W_0) \leq \dim V.$$

Korzystając z $\dim(W_- + W_0) = \dim W_- + \dim W_0 = \dim V - \dim V_+$, możemy powyższą nierówność przepisać w postaci

$$\dim V_+ + \dim V - \dim W_+ \leq \dim V.$$

W rezultacie dostajemy $\dim V_+ \leq \dim W_+$. Tak samo dowodzimy, że $\dim W_+ \leq \dim V_+$, co daje łącznie $\dim V_+ = \dim W_+$. Korzystając z tej równości i równości udowodnionej w pierwszej części tezy mamy też $\dim V_- = \dim W_-$. Dowód jest zakończony. \square

Po prostu wektor przestrzeni V jest kombinacją liniową wektorów z V_+ , V_- , V_0 , a przestrzenie te nie tylko mają zerowe przecięcie, ale każda z nich przecina się jedynie na zerze z sumą dwóch pozostałych. Stąd też wynika natychmiast, że wymiar sumy prostej trzech podprzestrzeni równy jest sumie wymiarów poszczególnych składników. Analogicznie dla rozkładu $V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$.

Definicja 106. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem \mathbb{R} . SYGNATURĄ PRZESTRZENI (V, h) (albo formy dwuliniowej h) nazywamy liczbę $r_+(A) - r_-(A)$ z poprzedniego twierdzenia. Sygnaturę oznaczamy $s(V, h)$ lub $s(h)$. Twierdzenie pokazuje, że jest ona dobrze określona (nie zależy od wyboru bazy prostopadłej A).

SYGNATURĄ MACIERZY SYMETRYCZNEJ $A \in M_n(\mathbb{R})$ nazywamy sygnaturę formy dwuliniowej $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej macierzą $G(h; st) = A$. Sygnaturę macierzy A oznaczamy $s(A)$. Więc $s(A)$ równa jest różnicy liczby dodatnich oraz liczby ujemnych wyrazów na przekątnej w macierzy diagonalnej kongruentnej (nad \mathbb{R}) do macierzy A .

Przed nami kluczowy wniosek określający postaci kanoniczne kongruencji (nad \mathbb{R}) w zbiorze $M_n(\mathbb{R})$.

Fakt 163. Symetryczne macierze $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są kongruentne (nad \mathbb{R}) wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe rzędy i sygnatury, tzn. $r(A) = r(B)$ oraz $s(A) = s(B)$. Istnieje $(n+1)(n+2)/2$ klas kongruencji symetrycznych macierzy rzeczywistych $n \times n$.

Dowód. Rozumowanie jest takie samo jak w przypadku analogicznej charakteryzacji kongruencji symetrycznych macierzy zespolonych. Każda rzeczywista macierz symetryczna A jest kongruentna nad \mathbb{R} do macierzy diagonalnej D_A opisanej we Wniosku 2. Macierzy takich jest $(n+1)(n+2)/2$ przy czym parami różne z nich nie są kongruentne nad \mathbb{R} , bo mają różne rzędy lub sygnatury. \square

Dokonałiśmy klasyfikacji macierzy kongruentnych dla macierzy nad ciałami \mathbb{C} i \mathbb{R} . Dla jakich ciał istnieją analogiczne klasyfikacje? Nie trudno zobaczyć, że można zamienić \mathbb{C} na dowolne ciało algebraicznie domknięte. Ciało \mathbb{R} można zamienić na tzw. ciało kwadratowo domknięte (musimy umieć wyciągać pierwiastki kwadratowe z każdego elementu), w którym każda liczba jest, modulo pewien kwadrat, elementem 1 lub -1 . w dodatku pokażemy analog kryterium Sylwestera, które pozwala w wielu sytuacjach określać macierz diagonalną kongruentną do danej za pomocą głównych minorów wiodących.

Twierdzenie Sylwestera o bezwładności jest punktem wyjścia do mówienia o określoności form kwadratowych. Temat ten, niezwykle istotny dla zastosowań, omówimy następnym razem, zamykając tym samym teorię przestrzeni liniowych na tym wykładzie. Teoria wymiernych form dwuliniowych jest znacznie bardziej skomplikowana i przekracza ramy tego wykładu.

Uzupełnienie. Twierdzenie Jacobiego

W niektórych sytuacjach możliwe jest określenie (nad dowolnym ciałem) macierzy diagonalnej, do której kongruentna jest dana macierz.

Fakt 164 (Twierdzenie Jacobiego). Niech (V, h) będzie taką przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2, że wiodące minory główne $\Delta_i = A^{(i)}$ macierzy $A = G(h, \mathcal{A})$ są niezerowe, dla pewnej bazy \mathcal{A} przestrzeni V . Wówczas istnieje baza \mathcal{B} przestrzeni V taka, że

$$G(h, \mathcal{B}) = \text{diag} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right), \quad \text{gdzie } \Delta_0 = 1.$$

Dowód. Rozumowanie jest indukcją ze względu na n . Załóżmy, że istnieje baza $\mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ przestrzeni V , że:

$$G(h, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \Delta_1/\Delta_0 & 0 & \dots & 0 & h(\gamma_1, \gamma_n) \\ 0 & \Delta_2/\Delta_1 & \dots & 0 & h(\gamma_2, \gamma_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta_{n-1}/\Delta_{n-2} & h(\gamma_{n-1}, \gamma_n) \\ h(\gamma_n, \gamma_1) & h(\gamma_n, \gamma_2) & \dots & h(\gamma_n, \gamma_{n-1}) & h(\gamma_n, \gamma_n) \end{bmatrix}.$$

Skoro $W = \text{lin}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ jest nieosobliwa (bo $\Delta_{n-1} \neq 0$) to można przyjąć, że γ_n to niezerowy wektor z W^\perp (mamy wszak $V = W \oplus W^\perp$), czyli istnieje baza \mathcal{B} przestrzeni V taka, że istnieje baza $\mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ przestrzeni V , że:

$$G(h, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \Delta_1/\Delta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2/\Delta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta_{n-1}/\Delta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h(\gamma_n, \gamma_n) \end{bmatrix}.$$

Niech $C = M(\text{id})_C^A$ i $\det C = d$. Mamy $C^T \cdot A \cdot C = G(h, \mathcal{C})$ oraz $\det A = \Delta_n$. Zatem $d^2 \cdot \Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot h(\gamma_n, \gamma_n)$. Możemy podmienić wektor γ_n przez $d^{-1} \cdot \gamma_n$ dostając, że istnieje baza $\mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ przestrzeni V , że:

$$G(h, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \Delta_1/\Delta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2/\Delta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta_{n-1}/\Delta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h(\gamma_n, \gamma_n)/d^2 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\det M(\text{id})_C^A = 1$. Zatem $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \frac{h(\gamma_n, \gamma_n)}{d^2}$, co kończy dowód.

Założenie o charakterystyce nie jest potrzebne – to twierdzenie jest prawdziwe nad każdym ciałem. W dowodzie korzystamy jednak z rozkładu $V = W \oplus W^\perp$, dla podprzestrzeni nieosobliwej V .

Trivia. Sygnatura, a geometria elementarna

W 1866 roku G. Darboux zdefiniował potęgę pary okręgów C_1, C_2 , czyli:

$$C_1 * C_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2,$$

gdzie r_1, r_2 to promienie okręgów C_1, C_2 , a d to odległość pomiędzy ich środkami. Jeśli okręgi się przecinają, wówczas $C_1 * C_2 = r_1 r_2 \cos \theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy okręgami. Jeśli okręgi są rozłączne, wówczas $C_1 * C_2$ równy jest kwadratowi długości odcinka narysowanego niżej.



Źródło: J. Kocik, *A theorem on circle configurations*.

Zbiór punktów na okręgu o promieniu r i środku (f, g) ma postać:

$$x^2 + y^2 - 2fx - 2gy + k = 0 \quad (\spadesuit)$$

gdzie $k = f^2 + g^2 - r^2$. W roku 1883 H. Cox zapisał produkt Darboux dwóch okręgów o środkach (f_1, g_1) , (f_2, g_2) i promieniach r_1, r_2 , odpowiednio, w języku współczynników równań (\spadesuit):

$$C_1 * C_2 = k_1 + k_2 - 2f_1 f_2 - 2g_1 g_2.$$

W 1970 roku D. Pedoe zorientował się, że powyższą równość można interpretować jako... formę dwuliniową \langle , \rangle w przestrzeni \mathbb{R}^4 . Pomysł jest *rzutowy* w naturze: równanie (\spadesuit) można przeskalować do równania postaci: $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$ i określić (dla tak opisanych okręgów):

$$\langle C_1, C_2 \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{d_1 a_1 + d_2 a_2}{2}.$$

O co tu chodzi? Każdemu okręgowi opisanemu w \mathbb{R}^2 równaniem:

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0, \quad a \neq 0.$$

przypisujemy wektor $C(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Każda niezerowa wielokrotność tego wektora reprezentuje ten sam okrąg, a więc możemy ograniczyć się do znormalizowanego równania opisującego C :

$$x^2 + y^2 - 2fx - 2gy + k = 0$$

i związanego z nim wektora współrzędnych $C(1, f, g, k)$.

Na \mathbb{R}^4 wprowadzamy strukturę przestrzeni dwuliniowej Minkowskiego (o wielkim znaczeniu w fizyce) poprzez zadanie formy dwuliniowej \langle , \rangle danej macierzą:

$$G(\langle , \rangle, st) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i widzimy, że teraz rzeczywiście dla okręgów opisanych równaniami

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$$

określić można wektory $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ i wtedy

$$\langle C_1, C_2 \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{d_1 a_2 + d_2 a_1}{2}$$

Zauważmy też, że sens geometryczny mają także wektory (a, b, c, d) , gdzie $a = 0$:

- jeśli $a = 0$ oraz $b^2 + c^2 > 0$, to równanie *okręgu* opisuje prostą na płaszczyźnie, której można przypisać wektor

$$L(0, b, c, d),$$

- dla $a = b = c = 0$ oraz $d \neq 0$ żadne punkty nie spełniają tego równania i można utożsamić je z prostą niewłaściwą o współrzędnych

$$E(0, 0, 0, d).$$

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

- (i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,
- (ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.
- (iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,
- (iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2 \rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2 ,
- (v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$,
- (vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2 \rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,
- (vii) $\langle C_1, L_2 \rangle = -D$ jest skierowaną odległością od środka C_1 do L_2 ,
- (viii) prosta L_2 przechodzi przez środek C_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L_2, C_1 \rangle = 0$,
- (ix) jeśli E to prosta w nieskończoności, to $\langle C_1, E \rangle = -1/2$,
- (x) wszystkie proste właściwe są prostopadłe do prostej w nieskończoności (zwanej też prostą niewłaściwą).

Niech $C_1(1, f_1, g_1, k_1), C_2(1, f_2, g_2, k_2)$ będą dwoma okręgami. Dla dowolnych $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 + a_2 \neq 0$, określamy: $C = a_1C_1 + a_2C_2 / (a_1 + a_2)$, czyli okrąg o środku:

$$\left(\frac{a_1 f_1 + a_2 f_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{a_1 + a_2} \right).$$

Jeśli $a_1 + a_2 = 0$, to zbiór $C = a_1C_1 + a_2C_2$ jest prostą, zwaną **prostą potęgową** okręgów C_1, C_2 , zaś zbiór okręgów

$$C = a_1C_1 + a_2C_2$$

(gdzie $a_1 \neq 0$ lub $a_2 \neq 0$) nazywamy **współosiowym pękiem okręgów**. Zbiór ten odpowiada $\text{lin}(C_1, C_2)$ w przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Fakt 165. Dla każdego punktu P oraz okręgów C_1, C_2 niech D będzie odległością od P do osi potęgowej $C_1 - C_2$ i niech d będzie odległością pomiędzy środkami C_1, C_2 . Wówczas:

$$2Dd = (d_1^2 - r_1^2) - (d_2^2 - r_2^2),$$

jest różnicą potęg punktu P względem C_1 i C_2 .

Dowód. Na mocy własności (vii) oraz (iv) mamy:

$$-D = \left\langle P, \frac{C_1 - C_2}{d} \right\rangle = (\langle P, C_1 \rangle - \langle P, C_2 \rangle) / d = (-(d_1^2 - r_1^2) + (d_2^2 - r_2^2)) / 2d.$$

Dwusieczne. Skoro $\langle C, C \rangle = r^2$, to dla okręgów C_1, C_2 o promieniach r_1, r_2 można określić wektory jednostkowe $C_1/r_1, C_2/r_2$. Przez analogię do zwykłych wektorów w przestrzeni euklidesowej można określić

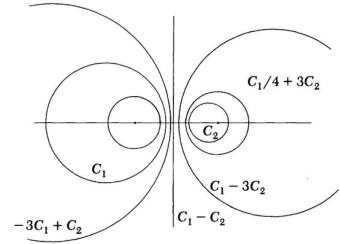
$$I = C_1/r_1 + C_2/r_2, \quad E = C_1/r_1 - C_2/r_2.$$

jako nazywane **wewnętrznym i zewnętrznym okręgiem antypodobieństwa** okręgów C_1, C_2 . Z punktów (viii), (ix) dowodzi się łatwo, że środki I oraz E leżą w punktach, w których przecinają się odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne wspólne styczne do C_1, C_2 (dla prostych są to: **dwusieczna wewnętrzna i zewnętrzna!**).

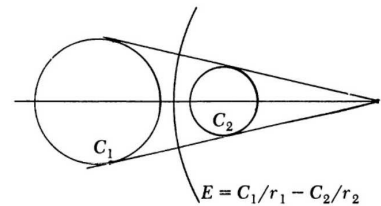
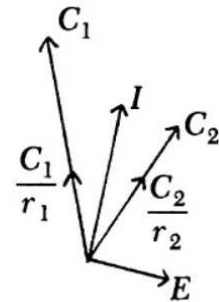
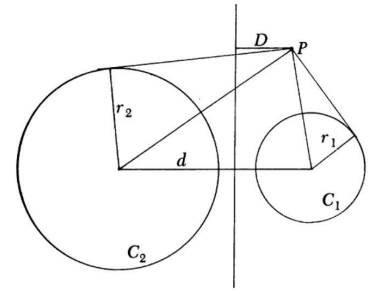
Inwersja. W przestrzeni dwuliniowej odbicie u' wektora U względem V (lub równoległe do V) dane jest formułą:

$$U' = \pm \frac{2\langle U, V \rangle}{\langle V, V \rangle} V \mp U.$$

i jak się okazuje w języku rozważanego iloczynu skalarnego U' jest obrazem inwersyjnym okręgu U względem okręgu V . Dla przykładu, odbicie wektora C_1 względem wektorów I, E daje wektory $C_2, -C_2$ (z dokładnością do skalarnej wielokrotności), więc inwersja C_1 w okręgach I, E daje okrąg C_2 .



Źródło rysunków: R. Pfeifer, C. Van Hoken, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.



Liniowa niezależność. Okręgi C_i są liniowo niezależne jeśli

$$\sum x_i C_i = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = 0$, dla wszystkich i . W szczególności trzy okręgi są liniowo niezależne jeśli żaden nie leży w pęku współosiowym pozostałych dwóch.

Fakt 166 (Tw. Menelaosa). Dane są trzy liniowo niezależne okręgi C_1, C_2, C_3 . Jeśli

$$D_1 = a_1 C_2 + b_1 C_3, \quad D_2 = a_2 C_3 + b_2 C_1, \quad D_3 = a_3 C_1 + b_3 C_2,$$

wówczas D_1, D_2, D_3 są zależne (w tym samym pęku współosiowym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 a_2 a_3 = -b_1 b_2 b_3.$$

Dowód. Istnieją niezerowe x_i spełniające $\sum x_i D_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy poniższy układ ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

Fakt 167 (Tw. Monge'a). Niech C_1, C_2, C_3 będą liniowo niezależnymi okręgami i niech I_{ij}, E_{ij} będą wewnętrznymi i zewnętrznymi okręgami antypodobieństwa dla C_i oraz C_j . Wówczas każdy z czterech układów okręgów jest liniowo zależny (czyli współpękowy):

$$\{E_{12}, E_{23}, E_{31}\}, \{E_{12}, I_{23}, I_{31}\}, \{I_{12}, E_{23}, I_{31}\}, \{I_{12}, I_{23}, E_{31}\}.$$

W szczególności środki okręgów w każdym układzie są współliniowe.

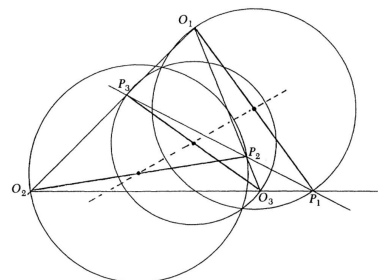
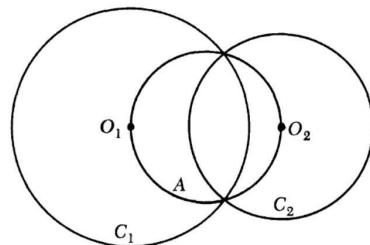
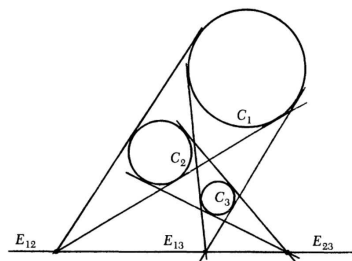
Fakt 168. Niech C_1 będzie ortogonalny do C_2 i niech okręgi te mają środki O_1, O_2 . Rozważmy **okrąg średni** postaci:

$$A = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Wówczas $O_1 O_2$ to średnica A , ponieważ (patrz (ix)):

$$\langle O_i, C_i \rangle = r_i^2 / 2, \quad \langle O_i, C_j \rangle = -r_i^2 / 2 \Rightarrow \langle O_i, A \rangle = 0.$$

Fakt 169. Niech C_1, C_2, C_3 będą trzema wzajemnie prostopadłymi okręgami o środkach O_1, O_2, O_3 . Załóżmy, że (znormalizowane) okręgi D_1, D_2, D_3 zdefiniowane jak w twierdzeniu Menelaosa, o środkach P_1, P_2, P_3 są zależne i niech A_i będą średnimi okręgami okręgów C_i oraz D_i . Wówczas okręgi A_1, A_2, A_3 są zależne (uzyskujemy m.in. tw. Gaussa-Bodenmillera czy tw. Newtona).



Dysponując liniowo zależnym układem wektorów $\sum x_i V_i = 0$ i biorąc formę \langle , \rangle z każdym z wektorów W_i widzimy, że istnieje niezerowe rozwiązanie układu:

$$\begin{bmatrix} \langle W_1, V_1 \rangle & \dots & \langle W_1, V_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle W_n, V_n \rangle & \dots & \langle W_n, V_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dla $W_i = V_i$ widzimy, że wyznacznik Grama tego układu jest zerowy.

- **Wniosek 1.** Nie istnieją cztery parami prostopadłe okręgi na płaszczyźnie - twierdzenie o bezwładności!
- **Wniosek 2.** Biorąc układ czterech parami stycznych zewnętrznie okręgów C_1, C_2, C_3, C_4 o promieniach r_1, r_2, r_3, r_4 oraz $C_5 = E$ warunek $W(C_i) = 0$ implikuje słynne twierdzenie Kartezjusza o okręgach:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_4} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_2 r_4} + \frac{1}{r_3 r_4}.$$

Macierze Grama układów okręgów stycznych w różnych dopuszczalnych konfiguracjach.

W cytowanej pracy iloczyn skalarny jest z przeciwnym znakiem niż u nas, czyli $\langle C_1, C_2 \rangle = (d_1 a_1 + d_2 a_2)/2 - b_1 b_2 - c_1 c_2$ i rozważa się go jedynie na czwórkach wektorów jednostkowych (można, po odpowiednim przeskalowaniu).

Diagram 1: Three circles A, B, C touching at a point. $f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 2: Three circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 3: Four circles A, B, C, D touching at a point. $f = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 4: Three circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 5: Three circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 6: Three circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 7: Two circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 8: Two circles touching at a point, with a small circle 'd' in the center. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 9: A large circle touching a small circle 'd' at a point. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Diagram 10: A circle touching a line at a point. $f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$