Baza prostopadła przestrzeni dwuliniowej

Na ostatnim wykładzie poznaliśmy pojęcie przestrzeni dwuliniowej, czyli skończenie wymiarowej przestrzeni nad ciałem K z dodatkową strukturą h zadaną przez symetryczną formę dwuliniową. Opuszczenie obowiązującego w przestrzeniach euklidesowych $(V, \langle\,,\rangle)$ założenia o dodatniej określoności formy $\langle\,,\rangle$ sprawia, że przestrzeń dwuliniowa może zawierać wektory prostopadłe do siebie. Ważnym skutkiem tego zjawiska jest, jak się okaże, występowanie podprzestrzeni W przestrzeni dwuliniowej V, które nie mają „dopełnienia ortogonalnego", czyli $V \neq W + W^{\perp}$. Utrudnia to (a czasem wręcz uniemożliwia) skuteczne badanie układów prostopadłych wektorów w przestrzeniach dwuliniowych.

Definicja 102. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Mówimy, że wektory α, β są* PROSTOPADŁE, *jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$. Zbiór wszystkich wektorów prostopadłych do zbioru $X \subseteq V$ oznaczamy $X^{\perp}$. Wektor $\alpha \in V$ nazywamy* IZOTROPOWYM, *jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$, to znaczy $\alpha \perp \alpha$.*

Rozważmy kilka przykładów.

- W przestrzeniach euklidesowych nie ma niezerowych wektorów izotropowych, bo dla iloczynu skalarnego h w V i każdego niezerowego wektora $\alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \alpha) > 0$. Dla każdej podprzestrzeni W przestrzeni euklidesowej V mamy $V = W \oplus W^{\perp}$. W przestrzeni dwuliniowej nie zawsze tak jest.

- Dla formy $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

  $$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

  wektory $(1, 0), (0, 1)$ są izotropowe. Przy tym $\mathrm{lin}(1, 0)^{\perp} = \mathrm{lin}(1, 0)$ oraz $\mathrm{lin}(0, 1)^{\perp} = \mathrm{lin}(0, 1)$.

- Dla formy $h : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ zadanej wzorem

  $$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

  każdy wektor jest izotropowy, bo $h((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 2x_1 x_2 = 0$. A jednak jest to przestrzeń nieosobliwa!

Definicja 103. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów V nazywamy* PROSTOPADŁYM *(albo* ORTOGONALNYM*), jeśli $\alpha_i \perp \alpha_j$ (czyli $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$), dla każdych $i \neq j$.*

Bazę przestrzeni V nazywamy PROSTOPADŁĄ *(albo* ORTOGONALNĄ*), jeśli jest ona układem prostopadłym.*

Przykład. Dla formy $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

mamy $\operatorname{lin}(1, 0)^\perp = \operatorname{lin}(1, 0)$ oraz $\operatorname{lin}(0, 1)^\perp = \operatorname{lin}(0, 1)$, a zatem wektory $(1, 0), (0, 1)$ nie tylko nie są prostopadłe, ale nie uda nam się, korzystając z żadnej „dwuliniowej ortogonalizacji" typu Grama-Schmidta, otrzymać bazy prostopadłej z tego układu. To rodzi następujące pytanie: czy w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, h)$ istnieje baza ortogonalna? Okazuje się, że tak, wystarczy obrać układ $((1, 1), (1, -1))$. Pierwszy układ zawierał wektory izotropowe, drugi ich nie zawiera. Czy zawsze można wybrać bazę z wektorów nieizotropowych?

Same wzory mają sens, bo w każdym ciele K dopuszczalny jest iloraz typu $h(\beta, \alpha)/h(\alpha, \alpha)$, gdzie α – nieizotropowy.

Przykład. W $(\mathbb{Z}_2)^2$ z formą $h : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ daną wzorem:

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

nie ma bazy prostopadłej. Istotnie, gdyby α_1, α_2 było taką bazą, to $h(\alpha_1, \alpha_2) = h(\alpha_2, \alpha_1) = 0$. Co więcej, mielibyśmy także

$$h(\alpha_1, \alpha_1) = h(\alpha_2, \alpha_2) = 0,$$

bo każdy wektor w $((\mathbb{Z}_2)^2, h)$ jest izotropowy. To oznacza, że gdyby $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$ było bazą, to macierz $G(h; \mathcal{A})$ byłaby zerowa. To by z kolei oznaczało, że h wykonane na dowolnej parze wektorów (v, w) jest zerowe (bo wykonanie h to przemnożenie $G(h; \mathcal{A})$ z obydwu stron przez wektory współrzędnych v, w w bazie $\mathcal{A}$. Mamy natomiast $h((1, 0), (0, 1)) = 1 \neq 0$. Sprzeczność.

Definicja 104. *Mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest* NIEOSOBLIWA*, jeśli dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A})$ jest odwracalna. Będziemy wtedy mówić krótko, że h jest formą nieosobliwą oraz, że V jest nieosobliwa. Jeśli macierz $G(h, \mathcal{A})$ nie jest odwracalna, to mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) (krócej: forma h/przestrzeń V) jest* OSOBLIWA.

Jeśli $h(v, w) = 0$, dla każdych $v, w \in V$, to mówimy, że forma h (przestrzeń V) jest CAŁKOWICIE ZDEGENEROWANA.

Przykład: weźmy formę dwuliniową na $\mathbb{R}^4$ zadaną macierzą:

$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wówczas przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa, ale na podprzestrzeni $W = \mathrm{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ forma $h|_W$ jest osobliwa. Podprzestrzeń $Z = \mathrm{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ jest natomiast całkowicie zdegenerowana względem h.

Fakt 148. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Następujące warunki są równoważne:*

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in V$ istnieje wektor $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód. Załóżmy, że (V, h) jest nieosobliwa. Załóżmy, że dla pewnego niezerowego $\alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = 0$, dla wszystkich $\beta \in V$. Wektor α dopełniamy do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V postaci $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s)$. Wówczas $G(h, \mathcal{A})$ ma zerowy pierwszy wiersz i kolumnę, bo $h(\alpha, \alpha) = 0$ oraz $h(\alpha, \beta_i) = h(\beta_i, \alpha) = 0$, dla $i = 1, \ldots, s$. A zatem $G(h, \mathcal{A})$ jest osobliwa, sprzeczność. Na odwrót: załóżmy, że zachodzi (ii), ale dla pewnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest osobliwa. Oznacza to, że rząd tej macierzy nie jest maksymalny. A zatem kolumny tej macierzy są liniowo zależne, czyli istnieje wektor niezerowy $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ taki, że:

$$x_1 \begin{bmatrix} h(\alpha_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_1, \alpha_n) \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} h(\alpha_2, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_2, \alpha_n) \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} h(\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z liniowości formy dwuliniowej względem pierwszej zmiennej mamy zatem:

$$\begin{bmatrix} h(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Niech $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$. Zauważmy, że skoro $h(\alpha, \alpha_i) = 0$, dla każdego $i = 1, \ldots, n$, to $h(\alpha, \beta) = 0$, dla każdego $\beta \in V$ (bo każde β jest sumą α_i). Skoro w (V, h) zachodzi (ii), to $\alpha = 0$. Ale α to kombinacja wektorów bazowych przestrzeni (V, h) o współczynnikach $x_1, \ldots, x_n$. A zatem $x_1 = \ldots = x_n = 0$, co przeczy wyborowi elementów x_i jako współczynników liniowej zależności kolumn $G(h; \mathcal{A})$. □

Fakt 149. *Każda przestrzeń euklidesowa jest nieosobliwa.*

Fakt 150. *Przestrzeń (V, h) jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) = 0$, dla każdego $\beta \in V$.*

Definicja 105. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową.* RZĘDEM PRZESTRZENI (V, h) *(albo formy dwuliniowej h) nazywamy rząd macierzy $G(h; \mathcal{A})$ dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$, oznaczany $r(V, h)$ lub $r(h)$.*

Fakt 151. *Przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $r(V, h) = \dim V$.*

Problemy te są skutkiem poniższego faktu.

Fakt 152. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) *W jest nieosobliwa.*

Dowód. Załóżmy, że $V = W \oplus W^{\perp}$. Mamy zatem $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Gdyby W była osobliwa to, na mocy wyników z poprzedniego wykładu, istniałby wektor $\alpha \in W$ taki, że dla każdego $\beta \in W$ mielibyśmy $h(\alpha, \beta) = 0$. W szczególności $h(\alpha, \alpha) = 0$, czyli $\alpha \in W^{\perp}$. A zatem $\alpha \in W \cap W^{\perp}$, sprzeczność.

Na odwrót: przypuśćmy, że przestrzeń W jest nieosobliwa. Mamy wykazać, że $V = W \oplus W^{\perp}$, czyli że dla każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory $\alpha' \in W$ oraz $\alpha'' \in W^{\perp}$ takie, że $\alpha = \alpha' + \alpha''$. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie bazą przestrzeni W. Istnienie i jednoznaczność wektora $\alpha' = x_1\alpha_1 + \ldots + x_k\alpha_k$ spełniającego powyższe warunki jest równoważne istnieniu i jednoznaczności współczynników $x_1, \ldots, x_k \in K$ takich, że $\alpha - (x_1\alpha_1 + \ldots + x_k\alpha_k) \in W^{\perp}$. Sprawdzenie czy jakiś wektor leży w $W^{\perp}$ jest równoważne sprawdzeniu, czy wektor ten jest prostopadły do każdego wektora z bazy W (na mocy liniowości h). A zatem teza (czyli (1)) jest równoważna temu, że zachodzi układ warunków

$$h(\alpha_j, \alpha - x_1\alpha_1 + \ldots + x_k\alpha_k) = 0, \text{ dla każdego } j = 1, \ldots, k,$$

czyli (1) równoważne jest, z liniowości h, istnieniu jednoznacznego rozwiązania $(x_1, \ldots, x_k)$ układu równań

$$\begin{cases} x_1 h(\alpha_1, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_1, \alpha_k) & = h(\alpha_1, \alpha) \\ x_1 h(\alpha_2, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_2, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_2, \alpha_k) & = h(\alpha_2, \alpha) \\ & \vdots \\ x_1 h(\alpha_k, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_k, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_k, \alpha_k) & = h(\alpha_k, \alpha) \end{cases}.$$

Macierzą współczynników tego (być może niejednorodnego) układu jest macierz $G(h|_W, \mathcal{A})$. Skoro W jest nieosobliwa, to macierz ta jest odwracalna, a zatem jej rząd wynosi k. Także rząd macierzy całego układu (rozmiarów $k \times k+1$) wynosi k, a zatem na mocy Twierdzenia Kroneckera-Capelliego układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. To kończy dowód istnienia i jednoznaczności wektora α', a więc i α''. □

Układ ortogonalny złożony z dwóch egzemplarzy wektora izotropowego nie jest liniowo niezależny. Okazuje się, że jest to w zasadzie jedyna przeszkoda do tego, aby układy ortogonalne były liniowo niezależne.

Fakt 153. *Każdy układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.*

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym złożonym z wektorów nieizotropowych. Przypuśćmy, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$. Oczywiście dla każdej formy dwuliniowej na V oraz wektora $v \in V$ mamy $h(0, v) = h(v, 0) = 0$, bo $h(0, v) = 0 \cdot h(v, v) = 0$. A zatem dla każdego $j = 1, \ldots, k$ mamy:

$$\begin{aligned} 0 = h(0, \alpha_j) &= h(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k, \alpha_j) \\ &= a_1 h(\alpha_1, \alpha_j) + \ldots + a_j h(\alpha_j, \alpha_j) + \ldots + a_k h(\alpha_k, \alpha_j) \\ &= a_j h(\alpha_j, \alpha_j), \end{aligned}$$

bo $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, dla $i \neq j$. Układ nasz składa się z wektorów nieizotropowych, czyli $h(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$, dla $j = 1, \ldots, k$. Z równości $0 = a_j h(\alpha_j, \alpha_j)$ dostajemy zatem $a_j = 0$, dla $j = 1, \ldots, k$, czyli liniową niezależność układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. □

Poprzednia uwaga mówi, że jeśli rozpinający przestrzeń dwuliniową (V, h) układ prostopadły złożony jest z wektorów nieizotropowych, to układ ten jest bazą V. Jest również jasne, że prostopadłość bazy przestrzeni dwuliniowej (V, h) można wyrazić przez macierz $G(h; \mathcal{A})$ formy h w tej bazie. Mianowicie: baza $\mathcal{A}$ jest prostopadła wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest diagonalna.

Fakt 154. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od* 2. *Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.*

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim V = n - 1$. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- Przypadek 1. W przestrzeni V istnieje wektor nieizotropowy.

Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Rozpatrzmy przestrzeń $W = \mathrm{lin}(\alpha)$. Skoro α jest nieizotropowy, to W jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.

Zatem $\dim W^{\perp} = n-1$. Z założenia indukcyjnego zatem $W^{\perp}$ ma bazę prostopadłą. Oznaczmy ją przez $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Wówczas $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni V.

- Przypadek 2. Wszystkie wektory przestrzeni V są izotropowe.

Dla każdych $\alpha, \beta \in V$ wektory $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ są izotropowe, więc:

$$0 = h(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = h(\alpha, \alpha) + 2h(\alpha, \beta) + h(\beta, \beta) = 2h(\alpha, \beta),$$

a stąd $h(\alpha, \beta) = 0$, bo $2 \neq 0$ w K (założenie o charakterystyce). Zatem wszystkie pary wektorów w przestrzeni V są prostopadłe, co oznacza, że każda baza V jest bazą prostopadłą.

□

Poniższe wnioski wprowadzają do dwóch kolejnych wykładów.

Fakt 155. *Nad ciałem charakterystyki różnej od* 2 *każda macierz symetryczna jest kongruentna do macierzy diagonalnej (będącej macierzą odpowiedniej formy w bazie diagonalnej).*

Fakt 156. *Nad ciałem charakterystyki różnej od* 2 *forma dwuliniowa symetryczna h na V wyznaczona jest jednoznacznie przez swoje wartości na parach (v, v), dla $v \in V$.*

Dowód powyższego twierdzenia daje nam także przepis na konstruowanie bazy prostopadłej dowolnej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem charakterystyki różnej od 2, zgodnie z poniższą procedurą.

- Szukaj w (V, h) wektora nieizotropowego. Jeśli nie ma takiego wektora, to wybierz dowolną bazę V i będzie ona prostopadła (por. Przypadek 2). Jeśli istnieje taki wektor α, to przejdź dalej.
- Podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)$ jest nieosobliwa, więc $V = \mathrm{lin}(\alpha) \oplus \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$ (por. Przypadek 1). A zatem dla znalezienia kolejnych wektorów bazy V powtórz wcześniejszy krok dla przestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.

Przykład. Znajdziemy bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie h jest zadana wzorem:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3.$$

Szukamy wektora nieizotropowego $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$. Możemy taki wektor zgadnąć, albo zapisać macierz $G(h; st)$ oraz $\alpha_1 = (x_1, x_2, x_3)$. Wówczas bycie wektorem nieizotropowym równoważne jest warunkowi:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Warunek ten spełnia na przykład $\alpha_1 = (1,0,0)$, bo $h(\alpha_1,\alpha_1) = 1$. Przechodzimy do kolejnego kroku. Opisujemy przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha_1)^\perp$ i sprawdzamy czy w niej jest jakiś wektor nieizotropowy. Przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha_1)^\perp$ składa się z wektorów $\beta = (y_1,y_2,y_3)$ spełniających równanie $h(\beta,\alpha_1) = 0$, a więc:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1)^\perp = \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 = 0\}.$$

W przestrzeni tej również istnieje wektor nieizotropowy, na przykład $\alpha_2 = (1,-1,0)$, bo $h(\alpha_2,\alpha_2) = -1$. A zatem przechodzimy do kolejnego kroku. Układ (α_1,α_2) chcemy dopełnić do bazy prostopadłej $\mathbb{R}^3$. Przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$ opisujemy przez układ warunków (prostopadłość do α_1 oraz do α_2:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp = \{(z_1,z_2,z_3) : z_1 + z_2 = 0, z_2 - 2z_3 = 0\} = \mathrm{lin}((2,-2,-1)).$$

Wektor $(2,-2,1)$ jest izotropowy, a więc każdy wektor w $\mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$ jest izotropowy. A zatem dowolny układ liniowo niezależny z tej przestrzeni dopełnia (α_1,α_2) do bazy $\mathbb{R}^3$. Tutaj potrzebowaliśmy tylko jednego wektora, ale teoretycznie już w poprzednim kroku mogliśmy trafić na przestrzeń mającą jedynie wektory izotropowe. A zatem bazą prostopadłą w $(\mathbb{R}^3,h)$ jest układ $((1,0,0),(1,-1,0),(2,-2,-1))$.

Powyższa procedura oparta była na dobieraniu do pojedynczego wektora nieizotropowego pewnego układu ortogonalnego. Nietrudno pokazać, że dowolny układ wektorów nieizotropowych przestrzeni dwuliniowej (V,h) można dopełnić do bazy ortogonalnej, o ile charakterystyka ciała bazowego nie jest równa 2.

Fakt 157. *Niech (V,h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2 wymiaru n. Niech $((\alpha_1,\ldots,\alpha_k))$ będzie układem prostopadłym złożonym z wektorów nieizotropowych, gdzie $k < n$. Wówczas istnieją w V wektory $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n$ takie, że układ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ jest bazą ortogonalną V.*

Dowód. Rozważmy przestrzeń $W = \mathrm{lin}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$. Układ prostopadły $\mathcal{A} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ złożony jest z wektorów nieizotropowych, a zatem jest to baza W. Macierz $G(h|_W,\mathcal{A})$ jest zatem diagonalna i na jej przekątnej stoją elementy niezerowe $h(\alpha_i,\alpha_i)$, dla $i = 1,\ldots,k$. Zatem macierz ta ma niezerowy wyznacznik. W szczególności W jest nieosobliwa i mamy rozkład $V = W \oplus W^\perp$. Na mocy poprzedniego twierdzenia, istnieje baza ortogonalna $W^\perp$ złożona z pewnych wektorów $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n$. Układ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ jest zatem bazą ortogonalną V. □

Na kolejnym wykładzie rozstrzygniemy problem kongruencji macierzy diagonalnych nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, co pozwoli na pełen opis macierzy symetrycznych (nad tymi ciałami) z dokładnością do kongruencji.