Przestrzenie dwuliniowe. Macierze kongruentne

Od kilku wykładów zajmujemy się badaniem przestrzeni liniowych V wyposażonych w dodatkową strukturę pochodzącą od pewnych funkcji na przestrzeni $V \times V$ (dotychczas nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$). Celem geometrycznym jest zrozumienie naturalnych obiektów związanych z prostopadłością. Z algebraicznego punktu widzenia interesujące było rozważanie przekształceń liniowych zachowujących dodatkową strukturę i sposobów ich klasyfikowania m.in. za pomocą macierzy ortogonalnych. Celem obecnych rozważań jest omówienie tych zagadnień w ogólnym kontekście, nie ograniczając się do ciał liczb rzeczywistych i zespolonych. Formy dwuliniowe, bo o nich będzie mowa, wywodzą się z badania problemów znacznie starszych niż sama algebra liniowa, m.in. z teorioliczbowych problemów rozkładu liczb całkowitych na sumy (pewnej liczby) kwadratów, geometrycznych problemów klasyfikacji powierzchni opisanych wielomianowymi równaniami stopnia 2 czy analitycznych problemów szukania ekstremów funkcji wielu zmiennych.

Definicja 96. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Funkcję:*

$$h : V \times V \to K$$

nazywamy FORMĄ DWULINIOWĄ *(albo* FUNKCJONAŁEM DWULINIOWYM*) na przestrzeni V, jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in K$ zachodzi:*

(1) $h(a\alpha + b\beta, \gamma) = a \cdot h(\alpha, \gamma) + b \cdot h(\beta, \gamma)$ *liniowość względem pierwszej zmiennej,*

(2) $h(\alpha, c\gamma + d\delta) = c \cdot h(\alpha, \gamma) + d \cdot h(\alpha, \delta)$ *liniowość względem drugiej zmiennej,*

Jeśli h jest formą dwuliniową na V oraz $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to formę $h' : W \times W \to K$ określoną dla każdych $u, w \in W$ wzorem

$$h'(u, w) = h(u, w)$$

nazywamy OGRANICZENIEM FORMY *h do W i oznaczamy $h|_W$.*

Definicja ta przypomina definicję iloczynu skalarnego, przy czym opuściliśmy w niej założenie o symetryczności i dodatniej określoności. Oczywiście każdy iloczyn skalarny jest formą dwuliniową. Forma hermitowska nie jest formą dwuliniową (analogiem są tu tzw. formy półtoraliniowe). Zobaczmy kilka dalszych przykładów.

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja $h : V \times V \to \mathbb{R}$ dana wzorem:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3,$$

- Dla dowolnej pary wektorów $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$ określamy:

$$h((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

- Dla $V = M_n(K)$ oraz dowolnych $A, B \in V$ określamy:

$$h((A, B)) = \mathrm{tr}(AB^T).$$

- Dla $V = F_c[0, 1]$ – funkcji „całkowalnych” z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$, określamy:

$$h(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- Dla przestrzeni $V = (P(X), \triangle, \emptyset)$ nad $\mathbb{Z}_2$ oraz $A, B \in V$ określamy:

$$h(A, B) = |A \cap B| \pmod 2.$$

Nietrudno widzieć (naśladując dowody z poprzednich wykładów), że każda forma dwuliniowa $h : K^n \times K^n \to K$ na przestrzeni K^n zadana jest wzorem:

$$\begin{aligned} h((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= h(x_1\epsilon_1 + \ldots + x_n\epsilon_n, y_1\epsilon_1 + \ldots + y_n\epsilon_n) = \\ &= x_1h(\epsilon_1, y_1\epsilon_1 + \ldots + y_n\epsilon_n) + \ldots + x_nh(\epsilon_n, y_1\epsilon_1 + \ldots + y_n\epsilon_n) = \\ &= \sum_{i,j}^n x_iy_ih(\epsilon_i, \epsilon_j), \end{aligned}$$

gdzie $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ jest bazą standardową K^n. Podobnie można wykazać, że jeśli $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni V, to wszystkie formy dwuliniowe na V opisane są wzorami:

$$h((x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n), (y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n)) = \sum_{i,j}^n x_iy_jh(\alpha_i, \alpha_j).$$

Definicja 97. *Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową na przestrzeni V i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V.* MACIERZĄ FORMY h W BAZIE $\mathcal{A}$ *nazywamy macierz:*

$$G(h; \mathcal{A}) = [h(\alpha_i, \alpha_j)] \in M_n(K)$$

Pojęcie to jest naturalnym uogólnieniem macierzy Grama bazy przestrzeni euklidesowej. Rozważmy kilka przykładów, uwzględniających między innymi macierze nie spełniające kryterium Sylvestera:

- Niech $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana będzie wzorem
$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$
Wówczas:
$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Niech $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana będzie wzorem
$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$
Wówczas jeśli $\mathcal{A} = ((1, 1), (0, 4))$, to
$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 32 & 80 \end{bmatrix}.$$

Przypominamy formułę wynikającą z definicji macierzy formy i wyprowadzaną już na wykładzie o iloczynie skalarnym.

Fakt 143. *Jeśli $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową, $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni V oraz $A = G(h; \mathcal{A})$, to dla dowolnych wektorów $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$, $\beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ przestrzeni V zachodzi:*
$$h(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ważnym wątkiem naszych rozważań będzie badanie macierzy form dwuliniowych w różnych bazach.

Fakt 144. *Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową oraz niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będą bazami przestrzeni V. Jeśli $A = G(h; \mathcal{A}), B = G(h; \mathcal{B})$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, to*
$$B = C^T AC.$$

Dowód. Niech $C = [c_{ij}]$. Opiszmy wyraz z i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy $C^T AC$. Nietrudno widzieć (bo tak jest dla dowolnego iloczynu trzech macierzy), że wyraz ten powstaje przez przemnożenie i-tego wiersza macierzy C^T, macierzy A oraz j-tej kolumny macierzy C. Mnożymy więc w rezultacie współrzędne i-tego oraz j-tego elementu bazy $\mathcal{B}$ zapisanych w bazie $\mathcal{A}$ przez macierz formy h w bazie $\mathcal{A}$. A zatem zgodnie z poprzednią uwagą wyraz ten wynosi $h(\beta_i, \beta_j)$. Dokładnie tej samej postaci jest także z definicji wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy $B = G(h; \mathcal{B})$. □

Uwaga ta motywuje wprowadzenie następującego ważnego pojęcia.

Definicja 98. *Mówimy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są* KONGRUENTNE NAD K *jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(K)$ taka, że*

$$B = C^T AC.$$

Przykład. Macierze $A_1, A_2 \in M_3(K)$ postaci

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są kongruentne nad dowolnym ciałem charakterystyki różnej od 2, ponieważ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fakt 145. *Macierze $A, B \in M_n(K)$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tej samej formy dwuliniowej (w pewnych bazach).*

Dowód. Jeśli istnieje forma dwuliniowa $h : V \times V \to K$ na n wymiarowej przestrzeni liniowej V nad K oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że $A = G(h, \mathcal{A})$, $B = G(h, \mathcal{B})$, to macierze A, B są kongruentne na mocy uwagi wyżej. Na odwrót, niech $B = C^T AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_n(K)$. Niech $A = [a_{ij}]$. Określmy formę dwuliniową $h : K^n \times K^n \to K$ warunkiem $G(h; st) = A$. To znaczy:

$$h((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

Niech $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będzie bazą przestrzeni K^n zadaną przez $M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = C$. Wówczas z dowodu poprzedniej uwagi wynika natychmiast, że $B = G(h; \mathcal{B})$. □

Kilka dalszych przykładów.

- Dla (rozważanej wcześniej) formy $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

  $$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 5x_2 y_2$$

  wyliczyliśmy

  $$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 32 & 80 \end{bmatrix},$$

  więc macierze te są kongruentne nad $\mathbb{R}$. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, h)$ nie jest jednak euklidesowa, bo $G(h; st)$ nie jest nawet symetryczna.

- Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas dowolne dwie macierze Grama dla baz $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ przestrzeni V są kongruentne. W szczególności, skoro dla każdej przestrzeni euklidesowej istnieje baza ortonormalna, to macierz Grama w tej bazie jest identycznością. W szczególności każda macierz Grama bazy n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest kongruentna do macierzy identyczności I rozmiaru $n \times n$.

Jak wiemy z kryterium Sylvestera, nie każda macierz rozmiaru n nad $\mathbb{R}$ jest macierzą Grama. Istnieją więc macierze, które nie są kongruentne z identycznością.

- Niech ϕ będzie izometrią na przestrzeni euklidesowej V oraz niech A, B będą odpowiednio macierzami tej izometrii w bazach ortonormalnych $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Macierz C przejścia pomiędzy bazami ortonormalnymi $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ jest macierzą ortogonalną (bo to także macierz izometrii – identyczności), to znaczy $C^{-1} = C^T$. W szczególności macierze A oraz B są jednocześnie podobne i kongruentne. Nietrudno jednak wskazać przykłady macierzy kongruentnych, które nie są podobne, i na odwrót.

Kongruentność, podobnie jak podobieństwo, jest relacją równoważności w zbiorze $M_n(K)$. Rzeczywiście:

- zwrotność relacji kongruencji wynika z faktu, że $A = I^T AI$,
- symetryczność relacji kongruencji wynika z tego, że jeśli $A = C^T BC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C, to $B = (C^{-1})^T AC^{-1}$,
- przechodniość relacji kongruencji wynika z tego, że jeśli $A = X^T BX$, $B = Y^T CY$, to $A = X^T Y^T CYX = (YX)^T C(YX)$.

Mamy oczywiście $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$.

Stwierdzenie kiedy macierze są kongruentne może być bardzo trudnym zadaniem. Jednym z celów kolejnego wykładu jest dokonać takiej klasyfikacji dla macierzy symetrycznych nad ciałem liczb rzeczywistych i zespolonych. Sformułujmy teraz kilka warunków koniecznych, aby macierze były kongruentne.

Fakt 146. *Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są kongruentne nad K, to:*

- $r(A) = r(B)$,
- $\det(A) \cdot \det(B)$ *jest kwadratem w ciele K.*

Dowód. Skoro istnieje macierz odwracalna C taka, że $B = C^T AC$, to:

$$r(B) = r(C^T AC) = r(A),$$

bo mnożenie przez macierz odwracalną (z dowolnej strony) nie zmienia rzędu. Mamy również:

$$\det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(C^T AC) = (\det A \cdot \det C)^2.$$

□

Intuicyjnie mówiąc, problem badania kongruencji macierzy nad K jest tym trudniejszy, im więcej elementów ciała K nie można utożsamić za pomocą kwadratu. Stąd na przykład klasyfikacja macierzy kongruentnych nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest bardzo skomplikowana, w porównaniu do ciał $\mathbb{C}$ oraz $\mathbb{R}$. Przede wszystkim jednak, interesuje nas ograniczenie się do badania form i macierzy symetrycznych.

Definicja 99. *Mówimy, że forma dwuliniowa h na przestrzeni V jest* SYMETRYCZNA, *jeśli dla każdych wektorów $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.*

Fakt 147. *Relacja kongruencji nad ciałem K jest relacją równoważności w zbiorze macierzy symetrycznych rozmiaru n. W szczególności macierz symetryczna nie może być kongruentna do macierzy niesymetrycznej.*

Dowód. Jeśli $A = A^T$ oraz $B = C^T AC$, dla pewnej macierzy A, to oczywiście

$$B^T = (C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC = B.$$

□

Zobaczmy kilka przykładów zastosowania tych rezultatów:

- Weźmy macierze zespolone

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Macierze te są kongruentne nad $\mathbb{C}$, ponieważ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Nad $\mathbb{R}$ macierze A i B nie będą kongruentne, a nad ciałem $\mathbb{Q}$ także B i C nie są kongruentne.

- Wśród poniższych czterech macierzy rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

  kongruentne nad $\mathbb{R}$ są jedynie macierze niesymetryczne B, C. Rzeczywiście, mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Widzimy też, że $\det A = -1, \det B = 1, \det C = 2$, co oznacza, że A, B nie mogą być kongruentne nad $\mathbb{R}$, zaś B, C nie mogą być kongruentne nad $\mathbb{Q}$.

Podstawową metodą sprawdzania czy macierze są kongruentne jest próba znalezienia kongruentnej do nich macierzy o szczególnie prostej postaci, np. macierzy diagonalnej. Kiedy macierz formy dwuliniowej jest diagonalna? Czy zawsze musi być diagonalna? Na te pytania odpowiada teoria przestrzeni dwuliniowych, stanowiących uogólnienie przestrzeni euklidesowych.

Definicja 100. *Parę (V, h), gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy* PRZESTRZENIĄ DWULINIOWĄ.

Oczywiście każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią dwuliniową. Podobnie jak w przypadku przestrzeni euklidesowych, jeśli weźmiemy podprzestrzeń W przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad K, wówczas obcięcie $h|_W : W \times W \to K$ formy h do W zadaje na W strukturę przestrzeni dwuliniowej $(W, h|_W)$. W przeciwieństwie jednak do przypadku euklidesowego, podprzestrzenie przestrzeni dwuliniowej mogą – jako przestrzenie dwuliniowe z „odziedziczoną formą" – mieć zupełnie inne własności niż wyjściowa przestrzeń. Problemowi temu przyjrzymy się następnym razem. Dziś zakończymy definicją prostopadłości, analogiczną do euklidesowej, odnoszącą się do problemu znajdowania diagonalnych macierzy danej formy dwuliniowej.

Definicja 101. *Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową.*

(a) Mówimy, że wektory α, β są PROSTOPADŁE, *jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$. Jeśli X, Y są podzbiorami V i $\alpha \perp \beta$, dla każdych $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, to piszemy $X \perp Y$.*

(b) Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni dwuliniowej (V, h) i $\alpha_i \perp \alpha_j$, dla każdego $i \neq j$, to bazę $\mathcal{A}$ nazywamy BAZĄ PROSTOPADŁĄ *(ortogonalną) przestrzeni dwuliniowej (V, h).*

Problem znajdowania diagonalnej macierzy formy dwuliniowej jest zatem w istocie problemem istnienia i znajdowania bazy prostopadłej przestrzeni dwuliniowej. Na kolejny wykład mamy zatem następujące wyzwania:

- rozstrzygnąć kiedy (i czy) przestrzenie dwuliniowe mają bazy prostopadłe, co by oznaczało, ze każda macierz formy dwuliniowej jest kongruentna do macierzy diagonalnej,
- opisać metody znajdowania baz prostopadłych przestrzeni dwuliniowych, jeśli istnieją,
- rozstrzygnąć kiedy macierze diagonalne są kongruentne nad ciałem K (i jak to zależy od ciała K, bo zależy, i to bardzo).