Diagonalizowalność

Na ostatnim wykładzie postawiony został problem rozpoznawania natury geometrycznej przekształcenia liniowego przy pomocy macierzy tego przekształcenia, szczególnie w kontekście endomorfizmów, czyli przekształceń przestrzeni liniowej w siebie. Pojęcie macierzy endomorfizmu w ustalonej bazie uzasadnia wprowadzenie relacji (równoważności) podobieństwa w $M_n(K)$. Klasy równoważności tej relacji służą m.in. do rozróżniania rozmaitych, różnych geometrycznie przekształceń. Wprowadzone na końcu poprzedniego wykładu pojęcia wektora i wartości własnej są kluczowe dla zrozumienia jakie właściwie geometryczne własności przekształceń nas interesują. Dziś poznamy jedną z najważniejszych własności tego typu: diagonalizowalność.

W dalszym ciągu rozważamy jedynie przestrzenie skończonego wymiaru.

Niech $V = \mathbb{R}^2$ oraz niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane będzie macierzą

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wektory własne endomorfizmu ϕ, czyli $\alpha = (3,4)$ oraz $\beta = (1,-1)$ tworzą bazę $\mathbb{R}^2$. Jeśli nazwiemy tę bazę $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)$, to mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zobaczmy jak wyraźna jest geometryczna informacja o endomorfizmie ϕ, możliwa do wyczytania z jego macierzy w bazie $\mathcal{A}$. Mówi ona, że przekształcenie ϕ działa jak

- jednokładność o skali 6 w kierunku $(3,4)$,
- jak jednokładność o skali -1 w kierunku wektora $(1,-1)$

a dla każdego innego wektora $(x_1, x_2) = a(3,4) + b(1,-1)$. mamy:

$$a(3,4) + b(1,-1) \xrightarrow{\phi} 6a(3,4) + (-1)b(1,-1).$$

Bierzemy wektor (x_1, x_2), rozkładamy go w uzyskanej bazie złożonej z wektorów własnych ϕ, a następnie na każdej składowej działamy za pomocą odpowiedniej „składowej jednokładności".

Możemy więc myśleć o wektorach własnych z bazy $\mathcal{A}$ jako swego rodzaju *osiach jednokładności*. Dziś spróbujemy powiedzieć coś więcej o tego typu endomorfizmach. Przypomnijmy ważną definicję.

Definicja 10. *Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy* DIAGONALNĄ, *jeśli*

$$a_{ij} = 0$$

dla każdych $i \neq j$ (tzn.: tylko wyrazy na przekątnej A mogą być niezerowe).

Fakt 18. *Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne*

(i) macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna

(ii) wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są wektorami własnymi endomorfizmu ϕ.

Dowód. Załóżmy (i). Niech $a_1, a_2 \dots, a_n$ będą kolejnym wyrazami na diagonali macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, tzn.

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Z definicji macierzy przekształcenia liniowego mamy:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_1) &= a_1 \cdot \alpha_1 \\ \phi(\alpha_2) &= a_2 \cdot \alpha_2 \\ &\vdots \\ \phi(\alpha_n) &= a_n \cdot \alpha_n \end{aligned}$$

W szczególności baza $\mathcal{A}$ jest bazą złożoną z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, czyli mamy (ii). Druga implikacja jest teraz oczywista. □

Definicja 11. *Mówimy, że endomorfizm jest* DIAGONALIZOWALNY, *jeśli istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.*

Przykłady endomorfizmów diagonalizowalnych nad każdym ciałem:

- identyczność,
- jednokładność,
- rzut,
- symetria.

Podstawowym przykładem endomorfizmu niediagonalizowalnego jest obrót w przestrzeni rzeczywistej.

Fakt 19. *Niech $\dim(V) < \infty$. Endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ma w pewnej bazie macierz diagonalną.*

Definicja 12. *Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy* DIAGONALIZOWALNĄ NAD CIAŁEM K*, jeśli jest ona podobna do macierzy diagonalnej.*

Teraz przeformułowujemy pojęcia diagonalizowalności z języka endomorfizmów i ich macierzy w bazach do języka macierzy i relacji podobieństwa.

Fakt 20. *Macierz A jest diagonalizowalna nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \mathrm{End}(V)$ zadany przez $A = M(\phi)_{st}^{st}$ jest diagonalizowalny.*

Zajmiemy się teraz badaniem kiedy dany endomorfizm skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V jest diagonalizowalny. Jest jasne, że nie musi tak być zawsze, skoro endomorfizm może w ogóle nie mieć wartości własnych. Skoro mówimy o bazach złożonych z wektorów własnych, spróbujmy najpierw zrozumieć zależność pomiędzy wektorami własnymi o różnych wartościach własnych.

Fakt 21. *Niech $\phi : V \to V$ oraz niech:*

- $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *– parami różne wartości własne ϕ,*
- $\beta_1 \in V_{(a_1)}, \beta_2 \in V_{(a_2)}, \ldots, \beta_k \in V_{(a_k)}$.

Wówczas jeśli $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, to $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$.

Dowód. Stosujemy indukcję po k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego, zakładając, że teza jest spełniona dla $k-1$. Niech $\beta_1, \ldots, \beta_k$ spełniają założenia i niech $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$. Stosując ϕ do obydwu stron tej równości dostajemy:

$$0 = \phi(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = \phi(\beta_1) + \ldots + \phi(\beta_k) = \\ = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k.$$

Możemy także przemnożyć wyjściowe założenie przez a_1 i dostać

$$a_1\beta_1 + \ldots + a_1\beta_k = 0$$

A ta i poprzednia równość dają łącznie

$$a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \ldots + a_1\beta_k = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k,$$

czyli po uproszczeniu:

$$(a_2 - a_1)\beta_2 + \ldots + (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Oczywiście składnik $(a_i - a_1)\beta_i$ należy do $V_{(a_i)}$, dla $i = 2, \ldots, k$, więc z założenia indukcyjnego wynika, że

$$(a_2 - a_1)\beta_2 = (a_3 - a_1)\beta_3 = \ldots = (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Skoro $a_1, \ldots, a_k$ są parami różne, to mamy $\beta_2, \ldots, \beta_k = 0$. A zatem równość $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$ redukuje się do $\beta_1 = 0$, co kończy krok indukcyjny i cały dowód. □

Zauważmy, że korzystamy tu z podstawowego faktu o przestrzeniach liniowych: jeśli $a \cdot \alpha = 0$, to $a = 0$ lub $\alpha = 0$, dla $a \in K$ oraz $v \in V$.

Rezultat ten prowadzi do fundamentalnego wniosku.

Fakt 22. *Niech $\phi : V \to V$ oraz niech:*

- *$a_1, a_2, \ldots, a_k$ – parami różne wartości własne ϕ,*
- *$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – wektory własne o wart. własnych $a_1, \ldots, a_k$ (odpowiednio)*

Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Przypuśćmy, że $b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k = 0$, dla pewnych skalarów $b_1, \ldots, b_k \in K$. Wówczas $b_i\alpha_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Na mocy poprzedniej uwagi mamy zatem, ze $b_i\alpha_i = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Zatem $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$, bo $\alpha_i \neq 0$, dla $i = 1, \ldots, k$. □

W dowodzie wniosku wykorzystaliśmy założenie, że α_i są wektorami własnymi, więc muszą być niezerowe. Oto kluczowy wniosek.

Fakt 23. *Jeśli endomorfizm n wymiarowej przestrzeni liniowej ma n różnych wartości własnych, to jest on diagonalizowalny.*

Oczywiście warunek posiadania n różnych wartości własnych nie jest konieczny do diagonalizowalności, bo przecież macierz diagonalna może mieć te samy elementy w różnych miejscach na przekątnej, jak choćby sama macierz identycznościowa. W sytuacji gdy wielomian charakterystyczny ma pierwiastki wielokrotne, diagonalizowalność zależy od wymiarów przestrzeni własnych odpowiadających parami różnym wartościom własnym.

Fakt 24. *Niech $w_\phi(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu ϕ przestrzeni V oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu charakterystycznego tego endomorfizmu, czyli taką liczbą, że*

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas zachodzi nierówność $k \geq \dim V_{(a)}$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$. Uzupełnijmy ją wektorami $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wówczas macierz ϕ w bazie $\mathcal{A}$ ma postać blokową:

$$A = M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} aI_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dla pewnych $B \in M_{r\times(n-r)}(K)$, $C \in M_{n-r}(K)$. Zatem:

$$w_\phi = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)^r \cdot \det(C - \lambda I).$$

Z definicji krotności (i z jednoznaczności rozkładu w $K[\lambda]$) mamy $k \geq r = \dim V_{(a)}$. □

Definicja 13. *Niech a będzie wartością własną endomorfizmu ϕ. Liczbę k występującą w poprzednim lemacie nazywamy* KROTNOŚCIĄ ALGEBRAICZNĄ *wartości własnej a endomorfizmu ϕ. Liczbę $\dim V_{(a)}$ nazywamy* KROTNOŚCIĄ GEOMETRYCZNĄ *wartości własnej a.*

Fakt 25. *Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą wartościami własnymi endomorfizmu ϕ przestrzeni V. Wówczas:*

$$\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} \leq \dim V.$$

Dowód. Wymiar V równy jest stopniowi wielomianu charakterystycznego (Uwaga 7), zaś liczba pierwiastków (z krotnościami) wielomianu o współczynnikach z ciała nie przekracza jego stopnia. Teza wynika zatem z udowodnionego wyżej lematu. □

Możemy teraz sformułować kluczowe twierdzenie tego wykładu.

Fakt 26. *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Niech $a_1, \ldots, a_k \in K$ będą wszystkimi, parami różnymi, wartościami własnymi endomorfizmu ϕ. Wówczas endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V.$$

Czytelnikowi pamiętającemu czym jest rozkład przestrzeni V na sumę prostą dowolnej liczby podprzestrzeni polecam (nietrudną, po prześledzeniu poniższych argumentów) próbę samodzielnego pokazania, że do dwóch równoważnych warunków z tezy twierdzenia można dołączyć trzeci:

$$V_{(a_1)} \oplus V_{(a_2)} \oplus \ldots \oplus V_{(a_k)} = V.$$

O rozkładach tego typu powiem więcej w dodatku do wykładu trzeciego.

Dowód. Zaczniemy od pokazania, że układ wektorów złożony z podukładów wektorów liniowo niezależnych wziętych z podprzestrzeni własnych $V_{(a_i)}$ także jest liniowo niezależny.

Dla każdego $i = 1, \ldots, k$ niech układ $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależny w $V_{(a_i)}$. Przypuśćmy, że:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_{11} + \ldots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1} + \\ + a_{21}\alpha_{21} + \ldots + a_{2m_2}\alpha_{2m_2} + \\ + \ldots + \\ + a_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{km_k}\alpha_{km_k} = 0, \end{aligned}$$

dla pewnych $a_{11}, \ldots, a_{km_k} \in K$. Niech

$$\beta_i = a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{im_i}\alpha_{im_i} \in V_{(a_i)} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Na mocy Uwagi 21 mamy, że $\beta_i = 0$, dla wszystkich i. Stąd mamy

$$a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{im_i}\alpha_{im_i} = 0.$$

Wobec liniowej niezależności każdego z układów $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ mamy $a_{i1}, \ldots, a_{im_i} = 0$, dla wszystkich i. A zatem rozważany układ jest liniowo niezależny.

Z obserwacji tej wynika natychmiast, że jeśli zachodzi warunek

$$\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V,$$

to układ

$$\alpha_{11}, \ldots \alpha_{1m_1}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2m_2}, \ldots, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km_k}$$

jest bazą przestrzeni V złożoną z wektorów własnych endomorfizmu ϕ. W szczególności endomorfizm ten jest diagonalizowalny.

Pozostaje więc wykazać, że jeśli przestrzeń V posiada bazę złożoną z wektorów własnych (czyli ϕ jest diagonalizowalny), to zachodzi $\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, mającego wartości własne $a_1, \ldots, a_k$. Dla każdego $i = 1, \ldots, k$ niech $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ będą wszystkimi tymi spośród wektorów bazy $\mathcal{A}$, które należą do $V_{(a_i)}$. Wówczas

$$n_1 + \ldots + n_k = \dim(V).$$

Ponadto wówczas dla każdego i układ $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ jest liniowo niezależny, więc $n_i \leq \dim V_{(a_i)}$. Zatem

$$\dim(V) = n_1 + \ldots + n_k \leq \dim V_{(k_1)} + \ldots + \dim V_{(k_r)} \leq \dim V,$$

na mocy wniosku po lemacie poprzedzającym dowód. Zatem z diagonalizowalności wynika $\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$.
□

Sklasyfikowaliśmy endomorfizmy diagonalizowalne w języku wymiarów podprzestrzeni własnych. Niestety baza z wektorów własnych nie zawsze istnieje nawet jeśli wielomian charakterystyczny rozkłada się na czynniki liniowe. Co możemy zatem powiedzieć o jego geometrycznych własnościach? Aby odpowiedzieć na to pytanie na następnym wykładzie uogólnimy pojęcie wektora własnego do pojęcia podprzestrzeni niezmienniczej, co pozwoli na rozważanie tzw. endomorfizmów triangularyzowalnych oraz pozwoli na sformułowanie związku pomiędzy rozkładalnością wielomianu charakterystycznego i rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze.

Przyjrzymy się także podprzestrzeni rozpinanej przez potęgi (wielokrotne złożenia ze sobą) endomorfizmów i ich macierzy. Centralnym wynikiem będzie twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówiące, że każda macierz kwadratowa „spełnia" swój wielomian charakterystyczny.

Uzupełnienie. Potęgi macierzy i rekurencje liniowe

Materiał ten zostanie omówiony w ramach ćwiczeń, a ze względu na niezwykle istotne zastosowania przedstawiamy go także jako uzupełnienie wykładu, rozszerzając go następnie w dodatku do tematu związanego z dyskretnymi układami dynamicznymi.

Nasze rozważania oparte są na następującym rachunku. Niech

$$A = C^{-1}DC,$$

gdzie D jest macierzą diagonalną oraz C – macierzą odwracalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} A^n &= (C^{-1}DC)^n = \\ &= C^{-1}DCC^{-1}DCC^{-1}\dots CC^{-1}DC = \\ &= C^{-1}D^nC, \end{aligned}$$

przy tym D^n to macierz diagonalna mająca na przekątnej n-te potęgi odpowiednich elementów z przekątnej D.

Zobaczmy przykład zastosowania takiego rachunku.

Zadanie. Wyznacz macierz A^{2020}, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{2020} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy A równy jest

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-1-\lambda)-9 = \lambda^2-6\lambda-16 = (\lambda+2)(\lambda-8).$$

A zatem macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej:

$$A = P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\cdot P,$$

przy czym macierz P^{-1} zawiera w kolumnach wektory własne o wartościach własnych $-2, 8$, na przykład $(1,-3)$ oraz $(3,1)$. Zatem:

Istotnie, jeśli $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zadany jest warunkiem $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz jeśli przyjmiemy $\mathcal{A} = ((1,-3),(3,1))$, wówczas $D = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ oraz $P = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

W rezultacie dostajemy:

$$A^{2020} = \left(P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\cdot P\right)^{2020} = P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 2^{2020} & 0 \\ 0 & 8^{2020} \end{bmatrix}\cdot P.$$

■

LINIOWE CIĄGI REKURENCYJNE. Definiujemy liniowy ciąg rekurencyjny $(X_n) \in K^\infty$ rzędu k warunkami:

- $X_0, \dots, X_{k-1} \in K$ – dane,
- dla $n \geq k$ mamy liczby $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in K$, dla których:

$$X_n + c_{k-1}X_{n-1} + \ldots + c_0 X_{n-k} = 0, \quad \text{dla } n \geq k.$$

Nietrudno widzieć, że:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{k-1} \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

A zatem znajomość potęgi macierzy znajdującej się po lewej stronie jest kluczowa do ewentualnego określenia wzoru na n-ty wyraz ciągu rekurencyjnego. Problem w tym, że wypisana po lewej macierz $k \times k$ nie musi być diagonalizowalna (na przykład dla $X_n = 4X_{n-1} - 4X_{n-2}$), a to znacznie utrudnia wyznaczenie ogólnej formuły. Zobaczmy jednak klasyczny przykład sytuacji gdy diagonalizowalność ma miejsce.

Tym, którzy chcieliby się dowiedzieć więcej o ciągach rekurencyjnych polecam bardzo ciekawe materiały u prof. W. Guzickiego: https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/materialy/Rekurencja.pdf.

Ciąg Fibonacciego zadany jest warunkami

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0, \text{ dla } n \geq 2.$$

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (*).$$

A zatem jeśli uda nam się wyznaczyć dowolną potęgę macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

to będziemy mieli kontrolę nad wyrazem ogólnym ciągu Fibonacciego. Mamy $w_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, stąd wartości własne macierzy A to

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Macierz A jest zatem diagonalizowalna:

$$A = S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot S.$$

Wyznaczywszy S^{-1} (ta macierz ma w kolumnach wektory własne A) oraz S uzyskujemy z $(*)$ słynny wzór Bineta:

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Dodatek. Dyskretny układ dynamiczny

Poniżej prezentuję przykład zastosowania teorii macierzy diagonalizowalnych i omówionego w uzupełnieniu algorytmu podnoszenia macierzy diagonalizowalnej do potęgi do badania bardzo elementarnego liniowego dyskretnego układu dynamicznego. Cóż to takiego jest? Mowa tu o sytuacji, gdy pewne zjawisko opisane jest za pomocą wektora o dyskretnej liczbie współrzędnej i podlega dyskretnym zmianom. W najprostszym przypadku polegają one na domnażaniu wektora przez kolejne potęgi tej macierzy. Pod koniec wspomnę o innej możliwości.

Oczywiście zastosowań teorii endomorfizmów jest bardzo, bardzo wiele. Innym typowym motywem podobnym do przedstawionego niżej są tzw. równowagi w teorii gier, ale o tym opowiemy przy okazji diagonalizowania macierzy symetrycznych (za jakiś czas).

Rozważymy następującą sytuację. Weźmy „ekosystem" złożony z:

- m_n (milionów) much,
- z_n (tysięcy) żab.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym) modelem liniowym:

Źródło. K. Behrend, *Dynamical Systems and Matrix Algebra*, `http://www.math.ubc.ca/~behrend/math223/DynSys.pdf`.

Zamiast czytać można również obejrzeć: `https://youtu.be/NkmoGML5uxs`.

$$\begin{cases} m_{n+1} &= -0,36 z_n + 1,22 m_n, \\ z_{n+1} &= 0,38 z_n + 0,24 m_n \end{cases}. \qquad (\spadesuit)$$

Jak rozumieć taki model? Muchy się rozmnażają, ale też są zjadane. Żaby gdy nie mają co jeść, wymierają. Mimo wszystko co roku również się rozmnażają, ale w zupełnie innym tempie. Oto nasze pytanie:

> Jaka jest DYNAMIKA tego układu w zależności od wyboru z_0, m_0?

Widzimy, że naśladując rozumowania dotyczące rekurencji mamy:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dany będzie macierzą

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}.$$

Podprzestrzenie własne ϕ to $V_{(1,1)} = \mathrm{lin}(1,3), V_{(0,5)} = \mathrm{lin}(2,1)$.

Twierdzimy, że w przypadku opisywanego układu wyznaczone wektory własne ustalają **jedyne takie proporcje** populacji żab i much, które nie zmieniają się przy działaniu określonego systemu. Oto wyjaśnienie.

Niech $\mathcal{A} = ((1,3),(2,1))$ będzie bazą $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu ϕ. Mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Przepisujemy równanie

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}$$

w bazie $\mathcal{A}$, przyjmując:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = c_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = c_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

skąd dostajemy:

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,1)^n c_0 \\ (0,5)^n d_0 \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\begin{cases} z_{n+1} &= 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} &= 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}. \qquad (\heartsuit)$$

Zwróćmy uwagę, że uzyskany opis jest znacznie wygodniejszy od wyjściowego. Opisywanie „wektora much i żab" w standardowej bazie $\mathbb{R}^2$ układem (♠) zamiast w bazie z wektorów własnych, za pomocą układu ($\heartsuit$), nie pozwala poprawnie ocenić dynamiki układu, czyli tego jakie są skutki wyboru określonych wartości początkowych z_0, m_0.

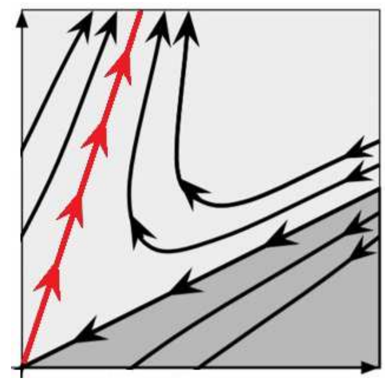
Zagadnienia tu opisane są oczywiście jedynie drobną zabawką, ale opowiadają o jednym z ważnych zastosowań teorii endomorfizmów – rozwiązywaniu układów liniowych równań różniczkowych i różnicowych. Nie będziemy jednak poruszać tego zagadnienia. Na koniec warto jednak pomyśleć chwilę nad pewną komplikacją.

Wyobraźmy sobie, że ktoś chce STEROWAĆ populacją much i żab mimo znajomości jej dynamiki. Jak to robi? Każdego roku wprowadza do ekosystemu pewną liczbę osobników, ale – uwaga – zachowując ich wyjściowe proporcje! Oto jak „wygląda" ekosystem po dwóch latach.

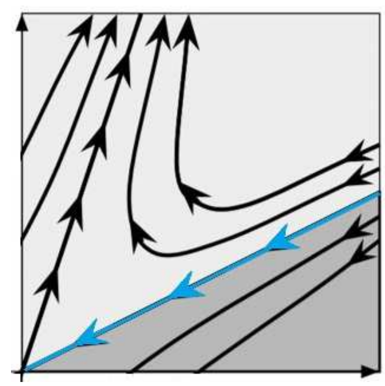
$$\begin{bmatrix} z_2' \\ m_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

Jak teraz opisać liczbę osobników każdego roku w zależności od a_1, a_2? Czy można uzyskać dowolny rezultat? Mowa tu o tzw. teorii sterowania. Zainteresowanych odsyłam do tekstu: `http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/teaching/ac/pdf/01-Introduction.pdf`.

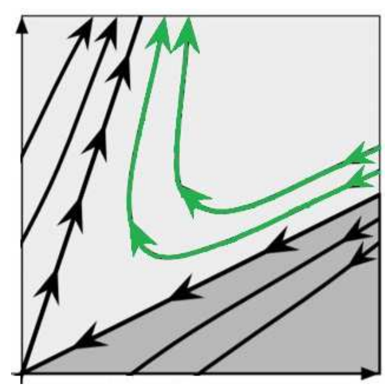
Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0.



Jeśli $c_0 = 1$, $d_0 = 0$, czyli $(z_0, m_0) = (1,3)$ oraz $(z_{n+1}, m_{n+1}) = ((1,1)^n, 3 \cdot (1,1)^n)$, to populacje rosną w tym samym tempie: stosunek much do żab jest stały!



Jeśli $c_0 = 0$, $d_0 = 1$, czyli $(z_0, m_0) = (2,1)$ oraz $(z_{n+1}, m_{n+1}) = (2 \cdot (0,5)^n, (0,5)^n)$, to populacje maleją w tym samym tempie: stosunek much do żab jest stały!



Jeśli $c_0 > 0$, $d_0 > 0$, to populacje być może pewien czas maleją, potem przyrastają. Stosunek żab do much zmierza *asymptotycznie* do $1:3$ (w istocie: $1:3000$). A jakie układy c_0, d_0 prowadzą do zagłady gatunków? Jest ona możliwa.

Trivia. Uśrednianie na sześciennej kostce

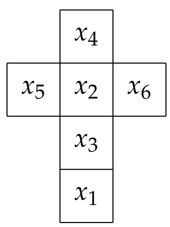
Diagonalizowalność macierzy służy także do badania przebiegu procesów „w dłuższej perspektywie". Jest to niezwykle rozbudowana teoria zawierająca wiele istotnych wyników. My zobaczymy ją na przykładzie.

> **Zadanie.** Matematyk ma kostkę sześcienną, na której ścianach umieszczono liczby $N_1, \dots, N_6$. Zapisuje sobie, dla każdej ściany, średnią arytmetyczną liczb zapisanych na sąsiednich czterech ścianach. Następnie zastępuje każdą z liczb N_i uzyskaną średnią. Następnie powtarza tę procedurę. Jakie liczby pojawią się na poszczególnych ścianach po wykonaniu bardzo wielu takich zmian?

Operacja opisana w zadaniu zostanie przetłumaczona na język endomorfizmu przestrzeni liniowych. Ale jakich przestrzeni? Będzie to przestrzeń $\mathbb{R}^6$ złożona z ciągów

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

gdzie x_i to są liczby wpisane na ścianach kostki jak na rysunku poniżej.



Rozważmy przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ zadane macierzą A

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przemnożenie tej macierzy przez wektor $x = (x_1, \dots, x_6)^T$ daje dokładnie operację, którą wykonuje się na ściankach kostki. Musimy tę operację wykonać wiele razy, więc interesuje nas jak wygląda, dla dużych n, wektor $A^n x$? Jest więc jasne, że trzeba diagonalizować macierz A. Można to zrobić i dostajemy sześć wektorów własnych:

- $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, gdzie $f(v_1) = v_1$,
- $v_2 = (0, 0, 1, 1, -1, -1)$, gdzie $f(v_2) = -\frac{1}{2}v_2$,
- $v_3 = (-2, -2, 1, 1, 1, 1)$, gdzie $f(v_3) = -\frac{1}{2}v_3$,

- $v_4 = (0, 0, -1, 1, 0, 0)$, gdzie $f(v_4) = 0$,
- $v_5 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)$, gdzie $f(v_5) = 0$,
- $v_6 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0)$, gdzie $f(v_6) = 0$.

W bazie $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_6)$ endomorfizm f dany jest macierzą B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biorąc wektor $v = a_1 v_1 + \ldots + a_6 v_6$ widzimy, że

$$B \cdot (a_1 v_1 + \ldots + a_6 v_6) = a_1 v_1 - \frac{1}{2} a_2 v_2 - \frac{1}{2} a_3 v_3.$$

A zatem dla całkowitych dodatnich n mamy

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innymi słowy

$$B^n v \to a_1 v_1.$$

A jakie są współrzędne interesującego nas wektora $(N_1, \ldots, N_6)$ w bazie $\mathcal{A}$? Trzeba sprawdzić, że pierwszą z nich jest

$$\frac{1}{6}(N_1 + N_2 + \ldots + N_6).$$

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że policzenie tych współrzędnych jest trudne, ale za jakiś czas przekonamy się, że wektory v_i są prostopadłe i będzie nieco łatwiej. Natomiast konsekwencja jest taka:

$$B^n \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_6 \end{bmatrix} \to \frac{1}{6}(N_1 + N_2 + \ldots + N_6) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} N_1 + N_2 + \ldots + N_6 \\ N_1 + N_2 + \ldots + N_6 \\ \vdots \\ N_1 + N_2 + \ldots + N_6 \end{bmatrix}.$$

A zatem dla dużych n stanie się to, czego się spodziewamy – nastąpi uśrednienie liczb wpisanych na każdej ścianie. A czy wiecie Państwo jak to pokazać bez takiej skomplikowanej matematyki?