Grupa ortogonalna i odbicia

Nie poświęciliśmy dotąd zbyt wiele miejsca składaniu izometrii. W dodatkach wzmiankowaliśmy rozmaite wyniki klasyfikujące izometrie zarówno w kontekście liniowym, jak i afinicznym. Wyniki te opisują możliwe „macierze kanoniczne" (obrotu, symetrii itd.), które można uzyskać rozpatrując określoną izometrię dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Na tym wykładzie powiemy o innym spojrzeniu na klasyfikację przekształceń, niezwykle istotnym dla rozwoju dwudziestowiecznej matematyki. Zaczniemy od definicji.

Definicja 81. GRUPĄ *nazywamy trójkę* $(G, \circ, e)$, *gdzie* G *jest zbiorem niepustym,* $\circ : G \times G \to G$ *jest działaniem* 2*-argumentowym,* $e \in G$, *i w której spełnione są aksjomaty:*

- *łączność* $\circ$*; dla każdych* $a, b, c \in G$ *mamy* $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
- *element* e *spełnia* $a \circ e = a = e \circ a$, *dla każdego* $a \in G$,
- *każdy element ma odwrotność, tzn. dla każdego* $a \in G$ *istnieje* $b \in G$, *że* $a \circ b = b \circ a = e$.

Znamy już kilka grup, choć nie używaliśmy dotąd tego języka.

- Jeśli $(K, 0, 1, +, \cdot)$ jest ciałem, to trójki $(K, 0, +)$ oraz $(K \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ są grupami, zwanymi odpowiednio: GRUPĄ ADDYTYWNĄ oraz GRUPĄ MULTIPLIKATYWNĄ ciała K.
- Jeśli V jest przestrzenią liniową to zbiór izomorfizmów liniowych przestrzeni V w siebie, ozn. $Aut(V)$ jest grupą (ze względu na składanie przekształceń oraz id_V).
- Podzbiór $GL_n(K)$ złożony z macierzy odwracalnych rozmiaru n nad ciałem K z działaniem mnożenia macierzy i elementem neutralnym I_n jest grupą, zwaną PEŁNĄ GRUPĄ LINIOWĄ nad K.
- Zbiór S_n macierzy permutacyjnych rozmiaru n, a więc w istocie: zbiór permutacji zbioru n-elementowego wraz z operacją składania permutacji, jest grupą.

Używając pojęcia *izomorfizmu grup*:

$$Gl_n(\mathbb{R}) \simeq Aut(\mathbb{R}^n).$$

Grupy mają olbrzymie znacznie w matematyce. Z punktu widzenia algebry liniowej również grają one poważną rolę, ale prowadzą do wielu skomplikowanych zagadnień, na które nie ma czasu w toku wykładu. Są im poświęcone nierzadko osobne przedmioty. Być może nie będzie zbyt dużym uproszczeniem, jeśli przyjmiemy, że bardzo ważną ideą teorii grup jest to, że można próbować wyróżnić pewien „reprezentatywny" podzbiór elementów grupy i próbować przedstawiać wszystkie inne za pomocą ciągów napisów złożonych z tych elementów oraz łączących je działań grupowych. Dla przykładu:

Takie zbiory elementów nazywamy zbiorami generatorów. Grupa G może mieć różne zbiory generatorów, np. całe G.

- w grupie $(\mathbb{Z}, +, 0)$ każdy element jest sumą pewnej liczby jedynek lub elementów przeciwnych do jedynki,
- w grupie liczb całkowitych podzielnych przez 3 (z działaniem dodawania) każdy element jest sumą pewnej liczby elementów 3 lub -3,
- w grupie permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ każdy element jest złożeniem permutacji zamieniających sąsiednie wyrazy,
- w grupie macierzy odwracalnych rozmiaru n nad K każdy element jest iloczynem macierzy operacji elementarnych.

Fakt 112. *Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Zbiór $O(V) \subseteq End(V)$ izometrii przestrzeni V na siebie jest grupą z działaniem składania przekształceń oraz elementem neutralnym równym* id_V.

Dowód. Zacznijmy od zobaczenia, że złożenie dwóch izometrii H jest izometrią. Jeśli $f, g : H \to H$ są izometriami, to dla każdego $v \in V$ mamy$\|(g \circ f)(v)\| = \|g(f(v))\| = \|f(v)\| = \|v\|$, czyli $g \circ f$ zachowuje normę na H i jest izometrią. Przekształcenie id_V jest izometrią, bo nie zmienia normy. Jest to element neutralny działania składania izometrii w $O(V)$. Wreszcie, każda izometria f ma odwrotną. Rzeczywiście, f jest izomorfizmem, więc istnieje przekształcenie odwrotne f^{-1}. Skoro f zachowuje normę, to f^{-1} oczywiście też to robi. Jest więc izometrią. □

Definicja 82. *W zbiorze $Gl_n(K)$ wyróżniamy podzbiory:*

$$O_n(K) = \{A \in Gl_n(K) \mid A^T A = I_n\},$$
$$SO_n(K) = \{A \in O_n(K) \mid \det(A) = 1\}.$$

Zbiory $O_n(K)$ oraz $SO_n(K)$ wraz działaniami mnożenia macierzy oraz elementem neutralnym I_n tworzą (odpowiednio) tzw. GRUPĘ ORTOGONALNĄ *oraz* SPECJALNĄ GRUPĘ ORTOGONALNĄ.

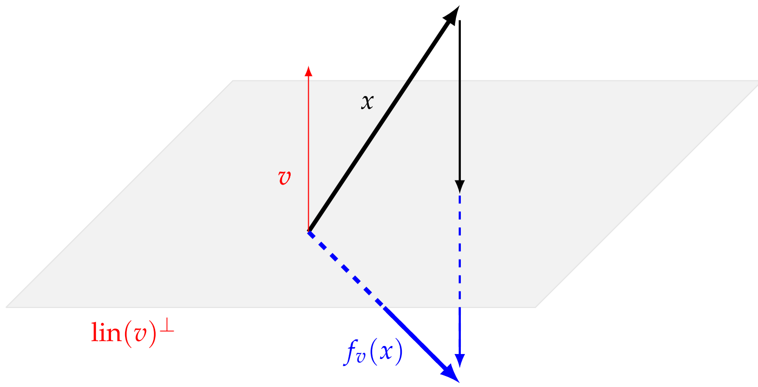
Grupy $SO_2(\mathbb{R})$ oraz $SO_3(\mathbb{R})$ złożone są z macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1. Z Faktów 104 oraz 105 wynika, że muszą to być macierze obrotów, a więc w istocie te grupy to grupy obrotów. Grupa $SO_4(\mathbb{R})$ nie jest już złożona z samych obrotów, ale je zawiera. Dlaczego?

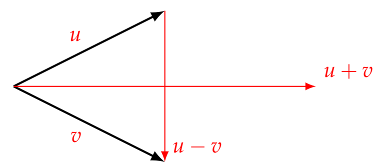
Naszym celem będzie zrozumienie, że grupa $O_n(\mathbb{R})$ jest „w istocie" (kiedyś poznamy termin: izomorfizmu grup) grupą izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^n$, niezależnie od przyjętego na niej iloczynu skalarnego. Wprowadzimy najpierw głównego bohatera dzisiejszych rozważań.

Definicja 83. *Załóżmy, że $(V, \langle\, , \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową liniową. Dla dowolnego wektora $0 \neq v \in V$ symetrię prostopadłą V względem podprzestrzeni $\mathrm{lin}(v)^{\perp}$ określoną wzorem*

$$f_v(x) = x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v$$

nazywamy ODBICIEM *V względem $\mathrm{lin}(v)^{\perp}$.*





Kluczowy dla naszych rozważań jest następujący lemat.

Fakt 113. *Załóżmy, że $(V, \langle\, , \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową liniową. Udowodnij, że gdy $u, v \in V$ spełniają $\|u\| = \|v\|$, to $u + v \perp u - v$ oraz istnieje taka f, będąca identycznością lub odbiciem, że $f(u) = v$ oraz $f(v) = u$.*

Dowód. Oczywiście jeśli $u = v$ teza jest oczywista, bo $u - u = 0$ jest prostopadły do każdego wektora i możemy wziąć $f = \mathrm{id}$. Załóżmy więc, ze $u \neq v$. Mamy: $\langle u + v, u - v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$. Skoro:

$$u = \underbrace{\frac{1}{2}(u+v)}_{\in \mathrm{lin}(u-v)^{\perp}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u-v)}_{\in \mathrm{lin}(u-v)}.$$

to odbicie f_{u-v} względem $\mathrm{lin}(u-v)^{\perp}$ spełnia warunki zadania:

$$u = \frac{1}{2}(u-v) + \frac{1}{2}(u+v) \xrightarrow{f_{u-v}} \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v = v.$$

□

Fakt 114 (Twierdzenie Cartana)**.** *Niech $(V, \langle\, , \rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową liniową. Dla każdej izometrii ϕ przestrzeni $(V, \langle\, , \rangle)$ istnieje liczba $k \leq n$ taka, że ϕ jest złożeniem k (być może różnych) odbić przestrzeni V (tzn. symetrii prostopadłych wzgl. podprzestrzeni wymiaru $n - 1$).*

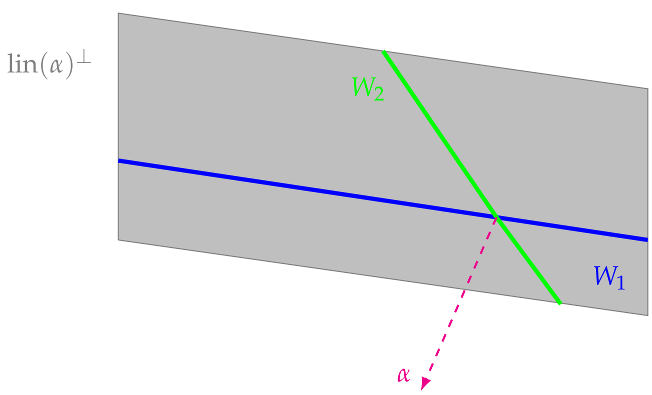
Dowód. Stosujemy indukcję po n. Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, bo są tylko dwie izometrie 1-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej: id oraz $-\mathrm{id}$. Dla pierwszej mamy $k = 0$, dla drugiej zaś $k = 1$.

Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie dla przestrzeni euklidesowych wymiaru mniejszego od n. Niech $\phi : V \to V$ będzie izometrią n wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\,,\rangle)$. Wybierzmy dowolny wektor $0 \neq \alpha \in V$ i rozpatrzmy $\mathrm{lin}(\alpha)$. Możliwe są dwa przypadki.

- Przypadek 1, gdy $\phi(\alpha) = \alpha$. Wówczas $\mathrm{lin}(\alpha)$ oraz $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ są ϕ-niezmiennicze, bo α to wektor własny oraz dla każdego $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ zachodzi
$$\langle \phi(\beta), \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0,$$
bo ϕ jest izometrią. Przekształcenie $\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp}$ jest zatem izometrią przestrzeni euklidesowej $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ wymiaru $n-1$ z iloczynem skalarnym będącym obcięciem $\langle\,,\rangle$ do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy dwa podprzypadki:

  - Gdy $\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp} = \mathrm{id}_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp}$ (złożenie 0 symetrii), wtedy
$$\phi(\alpha) = \alpha \Rightarrow \phi = \mathrm{id}_V .$$

  - Gdy
$$\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp} = \phi_k \circ \ldots \circ \phi_1,$$
gdzie $k \leq n-1$ oraz $\phi_i : \mathrm{lin}(\alpha)^\perp \to \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ jest odbiciem $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ względem podprzestrzeni $W_i \subseteq \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$. Zobaczmy poglądowy rysunek sytuacji w przypadku $V = \mathbb{R}^3$. Wówczas $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ to płaszczyzna i przyjmijmy, że nasza izometria obcięta do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ to złożenie dwóch odbić:

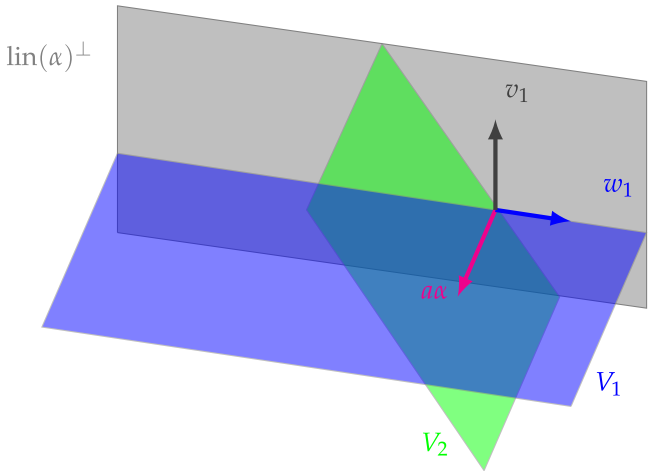


Chcemy „podnieść ten rozkład" do rozkładu endomorfizmu ϕ na całej V. Inaczej, chcemy pokazać, że
$$\phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1,$$
gdzie ψ_i są pewnymi odbiciami, które po obcięciu do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ są przekształceniami ϕ_i.

Określamy podprzestrzenie

$$V_i = \mathrm{lin}(\alpha) + W_i,$$

dla $i = 1, \ldots, k$. Skoro $W_i \subset \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$, to $V_i = \mathrm{lin}(\alpha) \oplus W_i$.



Zauważmy, że jeśli ϕ_i jest symetrią w przestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ względem W_i, to $\psi_i : V \to V$ określone, dla $w \in \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ wzorem

$$\psi_i(a\alpha + w) = a\alpha + \phi_i(w)$$

jest symetrią V względem $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni V_i. Rzeczywiście, możemy zapisać $w = a\alpha + w = a\alpha + w_i + v_i$, gdzie $w_i \in W_i, v_i \in (W_i^\perp \cap \mathrm{lin}(\alpha)^\perp)$. W ten sposób:

$$\psi_i(a\alpha + w) = \psi_i(a\alpha + w_i + v_i) = a\alpha + \phi_i(w) = a\alpha + w_i - v_i,$$

czyli ψ jest odbiciem V względem V_i. Pozostaje pokazać, że mamy $\phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$. Obetnijmy więc złożenie $\psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$ do $\mathrm{lin}(\alpha)$. Oczywiście dostaniemy identyczność. Jeśli natomiast obetniemy je do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ to zamienia się ono w $\phi_k \circ \ldots \circ \phi_1$. Stąd mamy $\phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$

Dwa endomorfizmy V określone identycznie na dwóch składnikach sumy prostej $V = W \oplus W'$ muszą być identycznie, bo pokrywają się na pewnej bazie całej V (złożonej z baz każdego ze składników).

- Przypadek 2, gdy $\phi(\alpha) \neq \alpha$. Mamy jednak $\|\phi(\alpha)\| = \|\alpha\|$. Dzięki Faktowi 113 wiemy, że istnieje odbicie f, które przeprowadza $\phi(\alpha)$ na α. Stąd przekształcenie $f \circ \phi : V \to V$ spełnia warunek

$$(f \circ \phi)(\alpha) = \alpha.$$

Na mocy Przypadku 1 mamy więc albo $f \circ \phi = \mathrm{id}_V$, albo $f \circ \phi = \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$, gdzie $k \leq n-1$ i $\psi_k : V \to V$ są odbiciami. Zatem (korzystając z $f^2 = \mathrm{id}_V$) mamy albo $\phi = \psi$, albo $\phi = \psi \circ \psi_k \circ \ldots \circ \psi_1$, co jest złożeniem nie więcej niż n symetrii. Dowód jest zakończony.

□

Twierdzenie jest udowodnione. Można jeszcze wspomnieć o kilku wzmocnieniach, na przykład zastanawiając się czy jest dolne ograniczenie liczby symetrii, na którą można rozłożyć symetrię. Okazuje się, że jest to możliwe. Zachodzi następujący rezultat.

Znacznie szersze materiały znajdzie Czytelnik w monumentalnych notatkach prof. Jeana H. Galliera: `https://www.cis.upenn.edu/~cis610/geombchap7.pdf`

Fakt 115. *Jeśli σ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V, \langle , \rangle)$ wymiaru n taką, że*

$$\dim(\sigma - \mathrm{id}) = n - s,$$

to σ nie można przedstawić jako złożenia mniej niż s odbić.

Dowód mogą Państwo przeczytać w rozwiązaniu zadania 5 w poniższych materiałach: `https://mimuw.edu.pl/~amecel/2021l/gal21/GALII+_kol2_2021rozw.pdf`. Twierdzenie to można również uogólniać na formy dwuliniowe nad ciałami charakterystyki różnej od 2 (aby mieć wciąż odbicie), ale mimo, że poznamy te obiekty, samo twierdzenie Cartana nie będzie nam tam potrzebne.

Warto odnotować ważną obserwację dotyczącą izomerii i orientacji, wynikającą z twierdzenia Cartana.

Fakt 116. *Każdą izometrię ϕ zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej można przedstawić w postaci złożenia parzystej albo nieparzystej liczby odbić. Jeśli $\det \phi = 1$, to izometria ϕ jest złożeniem parzystej liczby odbić. Gdy $\det \phi = -1$, to izometria ϕ jest złożeniem nieparzystej liczby odbić.*

Powyższy wniosek motywuje następującą definicję.

Definicja 84. *Izometrie przestrzeni euklidesowej liniowej o wyznaczniku równym 1 nazywamy* IZOMETRIAMI PARZYSTYMI, *a izometrie o wyznaczniku -1 nazywamy* IZOMETRIAMI NIEPARZYSTYMI.

Oczywiście izometrie parzyste zachowują orientację i są złożeniem parzystej liczby odbić, a nieparzyte – nie zachowują orientacji, będąc złożeniem nieparzystej liczby odbić.

Możliwość przedstawienia dowolnej izometrii przestrzeni euklidesowej liniowej jako złożenia pewnej liczby symetrii to jedynie wierzchołek góry lodowej olbrzymiej teorii związanej z tak zwanymi liniowymi i afinicznymi grupami odbić, badanymi już w XIX wieku, w latach 20. XX wieku zastosowanymi w teorii grup Liego przez Weyla i Cartana, później zaś usamodzielnionymi przez prace Coxetera. Tamte wyniki mają wciąż wielkie znaczenie. Wspominam o tym na początku, aby zasygnalizować Państwu, że elementarnie formułowalne geometryczne wyniki algebry liniowej, choćby klasyfikacja izometrii przestrzeni trójwymiarowej, nie są tylko ubieraniem matematyki „szkolnej" w język algebraiczny. Więcej o grupach odbić powiem w dodatkach.

Uzupełnienie. Twierdzenia o przedłużaniu

W trakcie wykładu pokazaliśmy Fakt 113 mówiący w istocie, że izometrię przestrzeni jednowymiarowych można rozszerzyć do izometrii przestrzeni, w których te jednowymiarowe izometryczne przestrzenie się znajdują. Rezultat ten jest szczególnym przypadkiem ważnego rezultatu zwanego twierdzeniem Witta o przedłużaniu. Sformułujmy ten niezwykle istotny rezultat.

Fakt 117 (Twierdzenie Witta o przedłużaniu izometrii, sformułowanie pierwsze)**.** *Niech V, W będą izometrycznymi przestrzeniami euklidesowymi tzn. istnieje izometria V na W. Niech $V = X_1 \oplus V_1$ oraz $W = X_2 \oplus V_2$ oraz niech $f : X_1 \to X_2$ będzie izometrią. Wówczas istnieje izometria $F : V \to W$ taka, że $F|_{X_1} = f$.*

Fakt 118 (Twierdzenie Witta o przedłużaniu izometrii, sformułowanie drugie)**.** *Niech V będzie przestrzenią euklidesową. Jeśli $0 \neq U, W \subseteq V$ są podprzestrzeniami przestrzeni V oraz jeśli $i_0 : U \to W$ jest izometrią, to istnieje przedłużenie izometrii i_0 do izometrii i na V, tzn. $i|_U = i_0$.*

Gdy poznamy formy dwuliniowe wtedy można będzie powiedzieć, że to twierdzenie działa dla nieosobliwych podprzestrzeni przestrzeni dwuliniowej nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wynik ten pochodzi z 1937 roku z przełomowej pracy o formach kwadratowych, która dała początek nowoczesnej algebrze liniowej i dziedzinom, które z niej wyrosły.

Rezultat Witta ma decydujące znaczenie w dowodzie jednoznaczności niezwykle ważnego twierdzenia o tzw. rozkładzie Witta. Opowiem o nim w dodatku do twierdzenia o formach kwadratowych.

Twierdzenia o przedłużaniu rozmaitych przekształceń mają bardzo ważne miejsce w matematyce. Przykłady (będą na dalszych latach).

- (topologia) lemat Tietzego o przedłużaniu przekształcenia ciągłego z podzbioru domkniętego przestrzeni metrycznej,
- (analiza funkcjonalna) twierdzenie Hahna-Banacha o przedłużaniu funkcjonałów ograniczonych na przestrzeni unormowanej,
- (analiza wielowymiarowa) twierdzenie Whitneya (mniej więcej) o przedłużaniu funkcji na zbiorze domkniętym tak, by miała ona z góry zadane pochodne,
- (teoria miary) twierdzenie Carathéodory'ego o konstrukcji miary itd.
- (algebra) twierdzenie o rozszerzaniu ciał oraz o istnieniu algebraicznego domknięcia.

Twierdzenia o przedłużaniu są często delikatne i wymagają użycia aksjomatu wyboru. Twierdzenie Hahna-Banacha, które poznacie Państwo na analizie funkcjonalnej (dotyczy ono funkcjonałów i w materiałach dra T. Koźniewskiego jest jego sk. wymiarowa wersja) prowadzi do paradoksalnego rozkładu kuli autorstwa Banacha i Tarskiego (wynik wrocławskiego matematyka prof. Janusza Pawlikowskiego z 1991 roku).

A skoro o tym paradoksie mowa, to polecam tekst Joanny Jaszuńskiej *O kul rozmnażaniu*, z Delty: `http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/analiza/teoria_miary/2017/03/25/O_kul_rozmnazaniu/`.

Dodatek. Skończone grupy odbić i izometrie wielokątów

Dowiedliśmy, że każda symetria przestrzeni euklidesowej jest złożeniem odbić. W szczególności oznacza to, że każda macierz ortogonalna jest iloczynem macierzy odbić. Co to za macierze, nie ma w tym momencie aż tak wielkiego znaczenia (ale będzie miało znaczenie np., gdy poznacie Państwo odbicie jako transformację Householdera na matematyce obliczeniowej), ale nawet sama świadomość, że każda macierz z $O(V)$ jest iloczynem macierzy, które w kwadracie są identycznościami daje do myślenia. Interesujące pytanie jest następujące: bierzemy grupę $O_n(\mathbb{R})$ i rozważamy następujący problem, postawiony w 1934 przez wielkiego geometrę Coxetera.

Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), „Król geometrii" — jeden z najbardziej znanych geometrów XX wieku.

> Rozważmy skończoną liczbę ODBIĆ $s_1, \ldots, s_r$ przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle)$ i zacznijmy je ze sobą składać, a dalej składać złożenia itd. Innymi słowy rozważmy GRUPĘ GENEROWANĄ przez symetrie $s_1, \ldots, s_r$, ozn. $W(s_1, \ldots, s_r)$, nazywaną GRUPĄ SYMETRII. Kiedy ta grupa jest skończona i jak ją opisać?

Uwaga: grupa symetrii nie składa się z samych symetrii, ale ze złożeń symetrii. $W(s_1, \ldots, s_r)$ to „najmniejsza" grupa zawierająca wszystkie symetrie $s_1, \ldots, s_r$.

Oczywiście Coxeter nie postawił tylko pytań, ale w serii artykułów w latach 1934-1935 w najlepszych światowych czasopismach pokazał co następuje (oczywiście z nieco innym nazewnictwem)

- Grupy odbić w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to tzw. grupy Coxetera, por. *Discrete groups generated by reflections*, Annals of Mathematics, 35, s. 588–621, 1934.
- Każda skończona grupa Coxetera jest izomorficzna z pewną grupą odbić w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, por. *The groups determined by the relations of the form* $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc., 10 (1935).

Z prac Coxetera powstała wielka teoria, dziś obejmująca swoim zakresem algebrę, geometrię algebraiczną, teorię reprezentacji i wiele innych dziedzin. Rozwiązanie problemu Coxetera wymagało wprowadzenia nowych obiektów i zrozumienia na nowo wielu obiektów uważanych za znane. Była to piękna realizacja XIX-wiecznego programu Felixa Kleina.

Pytamy tu w istocie o tzw. skończone podgrupy $O_n(\mathbb{R})$. To, że takie podgrupy istnieją jest oczywiste, nawet jeśli ograniczymy się do badania izometrii płaszczyzny. Okazuje się bowiem, że skończone podgrupy $O_2(\mathbb{R})$ to grupy symetrii wielokątów foremnych. Kilka przykładów.

- Niech $\theta = 2\pi/m$ oraz niech:
  $$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
  Wówczas elementy grupy H_m (tzw. grupa dihedralna) generowanej przez symetrie T oraz $R_\theta \cdot T$ to izometrie zachowujące m-kąt foremny na płaszczyźnie (o środku w środku układu współrzędnych).
- Niech $\Delta^3 = S(e_1, e_2, e_3, e_4)$ będzie sympleksem trójwymiarowym w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, rozpiętym przez punkty $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. Każdej parze wierzchołków odpowiada symetria s_{ij}, która przeprowadza $i-$ty wierzchołek na j-ty, a pozostałych nie rusza. Każda izometria zachowująca czworościan Δ^3 jest złożeniem elementarnych symetrii. **Grupa symetrii** czworościanu, to po prostu okazuje się być grupa permutacji S_4 zbioru 4-elementowego.
- **Twierdzenie**: każda skończona grupa **generowana przez obroty** w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ (w języku macierzy: skończona podgrupa w $SO(3)$) *jest* albo grupą obrotów lub **grupą symetrii** wielokąta foremnego, albo jedną z trzech **grup symetrii** zachowujących wielościany platońskie (!).

Prosty tekst, gdzie (z obrazkami) opowiedziane jest jakie są te grupy odbić: *Symmetry Groups of Platonic Solids*, David Newcomb: `https://dnewcomb.com/pdfs/Platonic%20Solids.pdf`