Izometrie afiniczne

Definicja 84. *Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ jest* IZOMETRIĄ *przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H_1, \langle\, , \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową afiniczną $(H_2, \langle\, , \rangle_2)$ jeśli:*

- *f jest izomorfizmem przestrzeni afinicznej H_1 na przestrzeń afiniczną H_2,*
- *$f' : T(H_1) \to T(H_2)$ jest izometrią $(T(H_1), \langle\, , \rangle_1)$ na $(T(H_2), \langle\, , \rangle_2)$.*

Dla każdej przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\, , \rangle)$ izometrię przestrzeni $(H, \langle\, , \rangle)$ na $(H, \langle\, , \rangle)$ nazywamy IZOMETRIĄ PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ AFINICZNEJ *$(H, \langle\, , \rangle)$.*

Przykłady:

- Niech $(H, \langle\, , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną oraz niech $\alpha \in T(H)$. Przekształcenie afiniczne $f_\alpha : H \to H$. zadane wzorem $f_\alpha(p) = p + \alpha$, czyli PRZESUNIĘCIE O WEKTOR α, jest izometrią przestrzeni afinicznej $(H, \langle\, , \rangle)$. Pochodną przesunięcia jest identyczność na $T(H)$.

- Dla podprzestrzeni M przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\, , \rangle)$ symetria prostopadła względem M jest izometrią H.

- Niech $(H, \langle\, , \rangle)$ będzie 2-wymiarową przestrzenią euklidesową afiniczną i załóżmy, że w $T(H)$ wybrana jest orientacja. Dla punktu $p \in H$ przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że:

  - $f(p) = p$,
  - $f' : T(H) \to T(H)$ jest obrotem o kąt θ

  nazywamy OBROTEM WOKÓŁ PUNKTU p o kąt θ. Dla $\dim M \geq 2$ przekształcenie afiniczne $f : M \to M$ jest obrotem o kąt θ wokół podprzestrzeni W wymiaru $\dim(M) - 2$, jeśli:

  - dla każdego $p \in W$ mamy $f(p) = p$,
  - $f'|_{T(W)^\perp}$ jest obrotem o kąt θ
    (na $T(W)^\perp$ musi być zadana orientacja).

Z własności przestrzeni euklidesowych liniowych dostajemy następującą charakteryzację izomerii przestrzeni euklidesowych afinicznych.

Fakt 119. *Jeśli* $(H_1, \langle\,,\rangle_1)$, $(H_2, \langle\,,\rangle_2)$ *są przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi oraz* $\mathcal{A}_i$ *jest bazą ortonormalną przestrzeni* $(T(H_i), \langle\,,\rangle_i)$, *dla* $i = 1, 2$, *to przekształcenie afiniczne* $f : H_1 \to H_2$ *jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy macierz* $M(f')_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ *jest ortogonalna.*

Definicja 85. *Niech* $(H_1, \langle\,,\rangle_1)$, $(H_2, \langle\,,\rangle_2)$ *będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi i niech* ρ_i *oznacza odległość w przestrzeni* $(H_i, \langle\,,\rangle_i)$, *dla* $i = 1, 2$. *Powiemy, że funkcja* $f : H_1 \to H_2$ ZACHOWUJE ODLEGŁOŚĆ PUNKTÓW, *jeśli dla każdych* $p, q \in H_1$ *zachodzi:*

Niekoniecznie przekształcenie afiniczne, ale po prostu dowolna funkcja.

$$\rho_1(p, q) = \rho_2(f(p), f(q)).$$

Fakt 120. *Niech* $(H, \langle\,,\rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech* ρ *będzie odległością w tej przestrzeni. Dla dowolnego przekształcenia afinicznego* $f : H \to H$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) f *jest izometrią przestrzeni* H,

(ii) f *zachowuje odległość punktów.*

Dowód. Zacznijmy od (i) $\Rightarrow$ (ii). Zgodnie z (i) przekształcenie $f' : T(H) \to T(H)$ zachowuje iloczyn skalarny, więc f' zachowuje normę wektorów. Stąd dla każdych punktów $p, q \in H$ mamy:

$$\rho(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|f'(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(p, q),$$

czyli f zachowuje odległość punktów. Również dowód (ii) $\Rightarrow$ (i) jest natychmiastowy. Przypuśćmy, że f jest przekształceniem afinicznym. Wówczas dla każdego punktu $p \in H$ oraz każdego wektora $\alpha \in T(H)$ mamy $f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}$, więc:

$$\begin{aligned}\|f'(\alpha)\| = \|\overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}\| &= \rho(f(p), f(p+\alpha)) \\ &\overset{(ii)}{=} \rho(p, p+\alpha) = \|\overrightarrow{p\,(p+\alpha)}\| = \|\alpha\|.\end{aligned}$$

Zatem f' zachowuje długość wektorów, czyli f jest izometrią przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\,,\rangle)$. □

Naszym celem jest pokazanie, że dowolna funkcja z przestrzeni afinicznej $(H, \langle\,,\rangle)$ w $(H, \langle\,,\rangle)$ – nie tylko przekształcenie afiniczne, zachowuje odległość na H wtedy i tylko wtedy, gdy jest jej izometrią. Jak jednak badać dowolne funkcje zachowujące odległość? Trzeba pokazać, że funkcje takie muszą być przekształceniami afinicznymi. Jest to zaskakujący i stosunkowo techniczny wynik, ale jak widzimy wyżej – sprowadzi on zagadnienie do przypadku omówionego w Fakcie 120. Dowód jest bardzo pouczający.

Fakt 121 (Twierdzenie Mazura-Ulama). *Niech* $(H, \langle\,,\rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech* ρ *będzie odległością w* $(H, \langle\,,\rangle)$. *Jeśli funkcja* $f : H \to H$ *zachowuje odległość, to* f *jest przekształceniem afinicznym.*

Dowód jest długi, ale idea jest następująca. Weźmiemy dowolną funkcję f zachowującą odległość punktów i zobaczymy jak zachowuje się ona na pewnym układzie ortonormalnym w H. Potem weźmiemy izometrię g, która na tym samym układzie ortonormalnym w H zachowuje się jak f i pokażemy, że f i g muszą być tym samym przekształceniem. Ten sposób dowodzenia jest bardzo charakterystyczny.

Dowód. **Krok 1.** Wykażemy, że dla każdej bazy punktowej $p_0, \ldots, p_n$ przestrzeni H położenie punktu w przestrzeni H jest jednoznacznie wyznaczone przez odległości od punktów $p_0, \ldots, p_n$. Innymi słowy, jeśli dla pewnych $x, y \in H$ mamy $\rho(x, p_i) = \rho(y, p_i)$, dla $i = 0, \ldots, n$, to koniecznie $x = y$.

Oznaczmy $\overrightarrow{p_0x} = \beta$, $\overrightarrow{p_0y} = \gamma$ oraz $\overrightarrow{p_0p_i} = \alpha_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{xp_i} &= \overrightarrow{xp_0} + \overrightarrow{p_0p_i} = -\beta + \alpha_i = \alpha_i - \beta \\
\overrightarrow{yp_i} &= \overrightarrow{yp_0} + \overrightarrow{p_0p_i} = -\gamma + \alpha_i = \alpha_i - \gamma \\
\overrightarrow{xy} &= \overrightarrow{xp_0} + \overrightarrow{p_0y} = -\beta + \gamma = \gamma - \beta.
\end{aligned}$$

Stąd dla każdego $i = 1, \ldots, n$ mamy ciąg równoważności:

$$\begin{aligned}
\rho(x, p_i) = \rho(y, p_i) &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{xp_i}\|^2 = \|\overrightarrow{yp_i}\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|\alpha_i - \beta\|^2 = \|\alpha_i - \gamma\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|\alpha_i\|^2 - 2\langle \alpha_i, \beta\rangle + \|\beta\|^2 \\
&= \|\alpha_i\|^2 - 2\langle \alpha_i, \gamma\rangle + \|\gamma\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|\alpha_i\|^2 - 2\langle \alpha_i, \beta\rangle + \rho(x, p_0)^2 \\
&= \|\alpha_i\|^2 - 2\langle \alpha_i, \gamma\rangle + \rho(y, p_0)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2\langle \alpha_i, \beta\rangle = 2\langle \alpha_i, \gamma\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle \alpha_i, \beta - \gamma\rangle = 0
\end{aligned}$$

Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą przestrzeni $T(H)$, więc równości $\langle \alpha_i, \beta - \gamma\rangle = 0$, dla $i = 1, \ldots, n$, oznaczają, że $\beta = \gamma$, czyli $x = y$. Wykazaliśmy zatem, że z $\rho(x, p_i) = \rho(y, p_i)$, dla $i = 0, \ldots, n$ wynika, że $x = y$.

Krok 2. Niech $f : H \to H$ będzie funkcją zachowującą odległość punktów. Niech $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie ortonormalnym układem bazowym przestrzeni H i niech $p_i = p_0 + \alpha_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Niech $q_i = f(p_i)$, dla $i = 0, \ldots, n$ oraz $\beta_i = \overrightarrow{q_0q_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wykażemy, że $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$ też jest ortonormalnym układem bazowym w H.

Po pierwsze zauważmy, że funkcja f przeprowadza wektory o normie 1 na wektory o normie 1. W szczególności dla każdego $i = 1, \ldots, n$:

$$\|\beta_i\| = \|\overrightarrow{q_0 q_i}\| = \rho(q_0, q_i) = \rho(f(p_0), f(p_i)) = \|\overrightarrow{p_0 p_i}\| = \|\alpha_i\| = 1.$$

Pozostaje pokazać, że f przeprowadza prostopadłe wektory na prostopadłe. Skorzystamy w tym celu z następującej obserwacji prawdziwej w każdej przestrzeni euklidesowej afinicznej: wśród wszystkich trójkątów równoramiennych o ramionach długości 1 tylko trójkąt prostokątny ma trzeci bok długości $\sqrt{2}$. Formalnie: dla dowolnych $p \in H$ oraz $\gamma, \delta \in T(H)$ spełniających $\|\gamma\| = \|\delta\| = 1$:

$$\gamma \perp \delta \Leftrightarrow \rho(p + \gamma, p + \delta) = \sqrt{2}.$$

Dowód:

$$\rho(p + \gamma, p + \delta)^2 = \|\gamma - \delta\|^2 = \|\gamma\|^2 - 2\langle \gamma, \delta \rangle + \|\delta\|^2 = 2 - 2\langle \gamma, \delta \rangle,$$

a więc $\langle \gamma, \delta \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(p + \gamma, p + \delta)^2 = 2$.

Zauważmy zatem, że dla każdego $i \neq j$ mamy:

$$\rho(q_0 + \beta_i, q_0 + \beta_j) = \rho(q_i, q_j) = \rho(p_i, p_j) = \rho(p_0 + \alpha_i, p_0 + \alpha_j) = \sqrt{2},$$

więc $\beta_i \perp \beta_j$, co kończy dowód ortonormalności układu $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Krok 3. Niech $p_0, \ldots, p_n$ oraz $q_0, \ldots, q_n$ będą układami bazowymi z Kroku 2. Niech $g : H \to H$ będzie przekształceniem afinicznym zadanym warunkiem $g(p_i) = q_i$, dla $i = 0, \ldots, n$. Wykażemy, że $f = g$, czyli dla każdego $x \in H$ mamy $f(x) = g(x)$.

Przekształcenie g jest izometrią przestrzeni $(H, \langle\,,\rangle)$, bo g' przeprowadza bazę ortonormalną $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ na bazę ortonormalną $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Dla każdego punktu $x \in H$ zachodzi

$$\rho(f(x), q_i) = \rho(f(x), f(p_i)) = p(x, p_i) = \rho(g(x), q_i),$$

dla $i = 0, \ldots, n$. Pokazaliśmy, że $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$ jest układem bazowym przestrzeni H, więc $q_0, \ldots, q_n$ jest bazą punktową przestrzeni H. Zatem z powyższego ciągu równości i tezy Kroku 1 wynika, że $f(x) = g(x)$, dla każdego $x \in H$. Stąd f jest przekształceniem afinicznym g, co kończy dowód Twierdzenia. □

A zatem dostajemy kluczowy wniosek.

Fakt 122. *Niech $(H, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech ρ będzie odległością w tej przestrzeni. Dla dowolnej funkcji $f : H \to H$ następujące warunki są równoważne:*

(1) f jest izometrią przestrzeni $(H, \langle\,,\rangle)$,

(2) f zachowuje odległość punktów.

Dodatek. Punkty stałe i rozkłady izometrii afinicznych

Definicja 86. *Niech $(H, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią afiniczną oraz $f : H \to H$. Powiemy, że $x \in H$ jest* PUNKTEM STAŁYM *funkcji f jeśli $f(x) = x$.*

Fakt 123. *Niech $(H, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. Dla dowolnego przekształcenia afinicznego $f : H \to H$ następujące warunki są równoważne:*

(1) istnieje baza punktowa H złożona z punktów stałych H,

(2) f jest przekształceniem identycznościowym.

Badanie wielu klas przekształceń związane jest z poszukiwaniem punktu stałego. Mówi się nawet o teorii punktu stałego. Jest to jeden z bardzo często powracających motywów w matematyce. Polecam każdemu próbę policzenia permutacji zbioru n-elementowego, które nie ruszają dokładnie jednego elementu. Szereg twierdzeń o punkcie stałym pochodzących z rozmaitych działów matematyki nosi nazwiska znamienitych uczonych: Poincarego, Borela, Atiyaha, Lefschetza, Kakutaniego, Brouwera, Kleene, choć wydaje się, że jednym najważniejszych rezultatów tego typu jest twierdzenie Stefana Banacha. Wielu zresztą polskich matematyków, zwłaszcza związanych z topologią lub analizą funkcjonalną, dowodziło znakomite rezultaty dotyczące punktów stałych, jak choćby Schauder, Ryll-Nardzewski, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, Tarski, Borsuk, Sieklucki, a także prof. A. Białynicki-Birula.

Trivia: liczba permutacji zbioru n elementowego bez punktu stałego „ma taką samą asymptotykę" jak funkcja $n!/e$.

Klasyfikacje różnych typów przekształceń prowadzi się niekiedy w oparciu o analizę punktów stałych. Nie starczy nam na tym wykładzie miejsca na przeprowadzenie klasyfikacji izometrii przestrzeni afinicznych niskich wymiarów, a opiera się ona właśnie o rozgraniczenie izometrii, które nie mają punktów stałych (np. przesunięcia), które mają dokładnie jeden punkt stały (np. obrót na płaszczyźnie) lub wyżej wymiarową podprzestrzeń afiniczną punktów stałych (np. symetria).

Kto by chciał dowiedzieć się więcej o punktach stałych, izometriach i ich zastosowaniach w ładnych zadaniach, polecam tekst dra Krzysztofa Żyjewskiego (UAM) *O składaniu symetrii i obrotów. Punkty stałe izometrii*, pod adresem: `http://wmii.uwm.edu.pl/f/images/PTM/SZM-2016/o_skladaniu_symetrii_i_obrotow._punkty_stale_izometrii_-_krzysztof_zyjewski.pdf`.

Ograniczę się do kilku uwag wraz z podaniem źródeł, gdzie można doczytać szczegóły i niektóre dowody. Rozważania te można prowadzić zarówno algebraicznie (w języku wektorów i wartości własnych), jak i czysto geometrycznie (zwłaszcza w $\mathbb{R}^2$).

Fakt 124. *Każda izometria skończenie wymiarowej przestrzeni afinicznej $(H, \langle\,,\rangle)$ może być przedstawiona jednoznacznie w postaci złożenia $t \circ k$, gdzie t jest przesunięciem, zaś k jest izometrią mającą punkt stały. Innymi słowy każda izometria f przestrzeni afinicznej ma punkt stały albo prostą niezmienniczą, na której f jest przesunięciem.*

Wykład dr. Strojnowskiego, tw. 19.4: `https://www.mimuw.edu.pl/~stroa/GAL2wyk14.pdf`.

W szczególności jeśli $H = \mathbb{R}^n$, to powyższa uwaga mówi, że każda izometria jest złożeniem przesunięcia i izometrii zachowującej wektor zerowy. Przedstawię teraz rezultaty klasyfikujące wszystkie izometrie przestrzeni afinicznych $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$ (nie są to fakty obowiązkowe, ale na ćwiczeniach będą przykłady).

Opis ten odwołuje się do stron 42-43 w https://www.mimuw.edu.pl/~stroa/GAL2wyk14.pdf.

Fakt 125. *Każda izometria prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ jest postaci $f(x) = x + c$ lub $f(x) = -x + c$, dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Są to zatem: przesunięcie lub symetria środkowa.*

Fakt 126. *Każda izometria płaszczyzny afinicznej $\mathbb{R}^2$ jest jednym z czterech przekształceń: przesunięciem, obrotem, symetrią lub tzw. symetrią z poślizgiem, czyli złożeniem niezerowego przesunięcia o wektor α oraz symetrii względem przestrzeni* $\mathrm{lin}(\alpha)$.

Dowód algebraiczny tego faktu wynika stosunkowo łatwo z twierdzenia klasyfikującego izometrie liniowe płaszczyzny jako obroty lub symetrie prostopadłe. Na mocy wcześniejszej uwagi każda izometria afiniczna jest złożeniem przesunięcia i jednego z tych przekształceń. Identyczność ma trzy afinicznie niezależne punkty stałe, symetria osiowa – dwa. Obrót ma jeden punkt stały, a przesunięcie i symetria z poślizgiem ich nie mają. Warto dodać, że złożenie obrotów (o niekoniecznie takich samych środkach) jest obrotem – gdy kąty obrotów nie sumują się do wielokrotności π, lub przesunięciem. Obrót o kąt $\theta \neq 0$ to złożenie dwóch symetrii prostopadłych względem prostych tworzących kąt $\theta/2$. Warto znaleźć elementarny dowód lub zajrzeć do artykułu Piotra Grzeszczuka w Delcie: http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2011/02/16/Obroty_w_zadaniach_geometrycznyc/.

Fakt 127. *Każda izometria trójwymiarowej przestrzeni afinicznej jest identycznością, obrotem, symetrią płaszczyznową, obrotem z odbiciem (te izometrie mają punkty stałe) lub obrotem z poślizgiem bądź symetrią płaszczyznową z poślizgiem (brak punktów stałych).*

Fakt ten wywodzi się z twierdzenia Cartana o izometriach. Kto by chciał zobaczyć elementarny dowód, zachęcam do lektury pięknego tekstu prof. Kordosa: Rzut butem, czyli twierdzenie Chaslesa: http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/stereometria/2015/10/27/1511delta-chasles.pdf. Opowiada on o wyjaśnieniu następującego fenomenu:

> Zdjąłem z nogi but i cisnąłem nim byle jak, po czym on upadł byle gdzie i jakoś tam leży. Istnieje ruch po linii śrubowej, za pomocą którego można kulturalnie przenieść ten but z obecnego położenia na moją nogę.