Izometrie liniowe. Macierze ortogonalne

Celem tego wykładu jest powiedzieć coś więcej o przekształceniach liniowych przestrzeni euklidesowych mających równoważne sobie własności: zachowywania iloczynu skalarnego oraz zachowywania długości wektorów. Podobnie jak prostopadłość (czy ogólniej mówiąc – struktura euklidesowa) wywiera wpływ na własności układów wektorów, np. gwarantując ich liniową niezależność, tak i w przypadku przekształceń liniowych zachowywanie struktury euklidesowej ma konsekwencje dla struktury samego przekształcenia.

Definicja 76. *Niech $(V_1, \langle\,,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi oraz niech $\phi : V_1 \to V_2$ będzie przekształceniem liniowym.*

(a) Mówimy, że ϕ ZACHOWUJE ILOCZYN SKALARNY, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ zachodzi:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle_2.$$

(b) Mówimy, że ϕ ZACHOWUJE DŁUGOŚĆ WEKTORÓW jeśli dla każdego $\alpha \in V_1$ zachodzi

$$\|\alpha\|_1 = \|\phi(\alpha)\|_2,$$

gdzie $\|\alpha\|_1 = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_1}$, $\|\gamma\|_2 = \sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle_2}$, dla każdych $\alpha \in V_1, \gamma \in V_2$.

Fakt 99. *Niech $(V_1, \langle\,,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi oraz niech $\phi \in L(V_1, V_2)$. Wówczas ϕ zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ zachowuje długość wektorów.*

Dowód. Jeśli ϕ zachowuje iloczyn skalarny, to dla $\alpha \in V_1$ mamy:

$$\|\phi(\alpha)\|_2 = \sqrt{\langle \phi(\alpha), \phi(\alpha) \rangle_2} = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle_1} = \|\alpha\|_1.$$

Na odwrót: załóżmy, że ϕ zachowuje długość wektorów. Zachodzi równość $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle$, a więc

$$2\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2,$$

dla dowolnych wektorów α, β. Zatem dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ mamy:

$$\begin{aligned} 2\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle_2 &= \|\phi(\alpha) + \phi(\beta)\|_2^2 - \|\phi(\alpha)\|_2^2 - \|\phi(\beta)\|_2^2 = \\ &= \|\alpha + \beta\|_1^2 - \|\alpha\|_1^2 - \|\beta\|_1^2 = 2\langle \alpha, \beta \rangle_1. \end{aligned}$$

□

Fakt 100. *Jeśli przekształcenie liniowe ϕ zachowuje iloczyn skalarny, to ϕ jest monomorfizmem.*

Dowód. Dla $\alpha \in \ker(\phi)$ mamy $\phi(\alpha) = 0$, czyli $\|\phi(\alpha)\|_2 = 0$, skąd $\|\alpha\|_1 = 0$, a więc $\alpha = 0$. □

Definicja 77. *Niech $(V_1, \langle\,,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi. Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest* IZOMETRIĄ *przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\,,\rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\,,\rangle_2)$ jeśli:*

(a) ϕ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej V_1 na przestrzeń liniową V_2,

(b) ϕ zachowuje iloczyn skalarny.

Izometrię przestrzeni $(V, \langle\,,\rangle)$ na $(V, \langle\,,\rangle)$ nazywamy IZOMETRIĄ PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ *$(V, \langle\,,\rangle)$.*

Oto dwa podstawowe przykłady izometrii przestrzeni euklidesowych.

1. **Symetrie prostopadłe**. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\,,\rangle)$ i niech $\psi : V \to V$ będzie symetrią prostopadłą względem W. Wówczas ψ jest izomorfizmem oraz dla dowolnego $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$

$$\begin{aligned}\|\phi(v)\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2\rangle &= \\ = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2\langle v_1, v_2\rangle &= \\ \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v_1 + v_2\|^2 &= \|v\|^2.\end{aligned}$$

   Zauważmy, że zgodnie z przyjętą definicją rzut prostopadły nie jest (zwykle) izometrią.

2. **Obroty**. Niech $(V, \langle\,,\rangle)$ będzie dwuwymiarową przestrzenią euklidesową liniową. Załóżmy, że V jest zorientowana i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną tej przestrzeni, zorientowaną zgodnie z zadaną orientacją. Wówczas przekształcenie $\phi : V \to V$ zadane warunkiem

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   nazywamy OBROTEM O KĄT θ.

   Oczywiście obrót jest izomorfizmem. Jeśli $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ jest bazą ortonormalną V, to dla dowolnego $\alpha \in V$ biorąc $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned}\|\phi(\alpha)\|^2 &= \|\phi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\|^2 = \|a_1\phi(\alpha_1) + a_2\phi(\alpha_2)\|^2 = \\ &= \|a_1(\cos(\theta)\alpha_1 + \sin(\theta)\alpha_2) + a_2(-\sin(\theta)\alpha_1 + \cos(\theta)\alpha_2)\|^2 = \\ &= \|(a_1\cos(\theta) - a_2\sin(\theta))\alpha_1\|^2 + \|(a_1\sin(\theta) + a_2\cos(\theta))\alpha_2\|^2 = \\ &= (a_1\cos(\theta) - a_2\sin(\theta))^2 + (a_1\sin(\theta) + a_2\cos(\theta))^2 = a_1^2 + a_2^2 = \\ &= \|a_1\alpha_1\|^2 + \|a_2\alpha_2\|^2 = \|a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2\|^2 = \|\alpha\|^2.\end{aligned}$$

Ogólniej: niech $(V, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową i niech $W \subseteq V$ będzie jej 2-wymiarową podprzestrzenią zorientowaną. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ takie, że $\phi|_W$ jest obrotem o kat θ w przestrzeni W, a $\phi|_{W^\perp}$ jest identycznością na przestrzeni $W^\perp$ nazywamy OBROTEM O KAT θ WOKÓŁ PODPRZESTRZENI $W^\perp$. Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest taką bazą przestrzeni V, że $\mathcal{A}' = (\alpha_1, \alpha_2)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni W zorientowaną zgodnie z orientacją W, natomiast $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ jest dowolną bazą przestrzeni $W^\perp$, to $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ jest w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} O_\theta & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix},$$

gdzie $O_\theta = M(\phi|_W)^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Punktem wyjścia jest badanie macierzy izometrii. Oczywiście nie w dowolnych bazach, bo każda macierz odwracalna (odpowiedniego rozmiaru) jest macierzą izometrii. Ograniczymy się do baz ortonormalnych. Oto dlaczego.

Fakt 101. *Niech $(V_1, \langle\,,\rangle_1), (V_2, \langle\,,\rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi liniowymi. Następujące warunki są równoważne dla $\phi \in L(V_1, V_2)$:*

(1) ϕ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\,,\rangle_1)$ na $(V_2, \langle\,,\rangle_2)$,

(2) ϕ przeprowadza każdą bazę ortonormalną przestrzeni $(V_1, \langle\,,\rangle_1)$ na bazę ortonormalną $(V_2, \langle\,,\rangle_2)$,

(3) ϕ przeprowadza pewną bazę ortonormalną przestrzeni $(V_1, \langle\,,\rangle_1)$ na bazę ortonormalną $(V_2, \langle\,,\rangle_2)$.

Co więcej, jeśli $A = M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą izometrii przestrzeni euklidesowych w bazach ortonormalnych, wówczas kolumny A są prostopadłe w $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle_{st})$. Innymi słowy $A^T A = I$.

Dowód. W pierwszej części dowodu pokażemy tylko implikację (3) $\Rightarrow$ (1), bo (2) $\Rightarrow$ (3) jest trywialna, a implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) wynika stad, że ϕ jako izometria zachowuje długość wektorów i prostopadłość układów.

Przypuśćmy zatem, że dla pewnej bazy ortonormalnej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\,,\rangle_1)$ układ wektorów $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $(V_2, \langle\,,\rangle_2)$. Wykażemy, że ϕ zachowuje iloczyn skalarny. Dla dowolnych

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \quad \text{oraz} \quad \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$$

w przestrzeni V_1 mamy

$$\phi(\alpha) = x_1\phi(\alpha_1) + \ldots + x_n\phi(\alpha_n), \quad \text{oraz} \quad \phi(\beta) = y_1\phi(\alpha_1) + \ldots + y_n\phi(\alpha_n),$$

a zatem z ortonormalności obydwu wyróżnionych baz mamy warunek $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle_1 = \langle \phi(\alpha_j), \phi(\alpha_j) \rangle_2 = 1$, dla każdych i, j, czyli:

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle_1 &= \langle x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n \rangle_1 = \\ &= x_1y_1\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle_1 + \ldots + x_ny_n\langle \alpha_n, \alpha_n \rangle_1 = \\ &= x_1y_1\langle \phi(\alpha_1), \phi(\alpha_1) \rangle_2 + \ldots + x_ny_n\langle \phi(\alpha_n), \phi(\alpha_n) \rangle_2 = \\ &= \langle x_1\phi(\alpha_1) + \ldots + x_n\phi(\alpha_n), y_1\phi(\alpha_1) + \ldots + y_n\phi(\alpha_n) \rangle_2 = \\ &= \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle_2.\end{aligned}$$

W przejściu między trzecią a czwartą linią dodajemy elementy typu $x_iy_j\langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle_2 = 0$, dla $i \neq j$, co można zrobić korzystając z ortonormalności układu $\phi(\alpha_i)$.

Przechodzimy do drugiej części dowodu. Niech $\phi : (V_1, \langle\, , \rangle_1) \to (V_2, \langle\, , \rangle_2)$ będzie izometrią. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{N} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazy ortonormalna $(V_1, \langle\, , \rangle_1)$, $(V_2, \langle\, , \rangle_2)$. Rozważamy macierz $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ i chcemy pokazać, że $A^TA = I$.

Niech $i \neq j$ oraz $\phi(\alpha_i) = x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, \phi(\alpha_j) = y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n$. Aby pokazać tezę wystarczy pokazać, że:

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = 0, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1. \qquad (\spadesuit)$$

Mamy jednak

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_1 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \Rightarrow \langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle_2 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases},$$

bo ϕ – izometria. Ale $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$, dla $i \neq j$ oraz $\langle \beta_i, \beta_i \rangle = 1$, czyli:

$$\begin{aligned}\langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle_2 &= \langle x_1\beta_1 + \ldots + x_n\beta_n, y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n \rangle_2 = \\ &= x_1y_1\langle \beta_1, \beta_1 \rangle_2 + \ldots + x_ny_n\langle \beta_n, \beta_n \rangle_2 = \\ &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.\end{aligned}$$

co natychmiast daje ($\spadesuit$) i tezę twierdzenia. $\square$

Definicja 78. *Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy* ORTOGONALNĄ*, jeśli $A^TA = I$. Inaczej mówiąc, kolumny macierzy ortogonalnej są bazą ortonormalną $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym.*

Przykłady macierzy ortogonalnych: macierz obrotu o kąt (w zal. od orientacji) -60° lub 60° oraz macierz permutacyjna:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierze ortogonalne są to więc odwracalne macierze kwadratowe, których odwrotność równa jest ich transpozycji. Wśród wielu ważnych przykładów tych macierzy wyróżnić można macierze permutacyjnej (w tym I), a także macierze obrotu i symetrii prostopadłej (w bazach ortonormalnych). Powyższe rozważania pozwalają sformułować następujący wniosek.

Macierze ortogonalne: pierwsza jest, a druga nie jest macierzą obrotu w $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Fakt 102. *Niech $(V_1, \langle\, , \rangle_1), (V_2, \langle\, , \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi Przekształcenie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V_1, \langle\, , \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(V_2, \langle\, , \rangle_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych (równoważnie: dla każdych) baz ortonormalnych $\mathcal{A}_1$ przestrzeni $(V_1, \langle\, , \rangle_1)$ oraz $\mathcal{A}_2$ przestrzeni $(V_2, \langle\, , \rangle_2)$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ jest ortogonalna.*

Wniosek ten daje wygodnie kryterium sprawdzania czy przekształcenie liniowe przestrzeni euklidesowych zadane wzorem jest izometrią, czy nie. Dla przykładu, weźmy endomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym dany wzorem $\phi((x_1, x_2)) = (x_1, -x_1 + x_2)$. Baza standardowa jest bazą ortonormalną tej przestrzeni euklidesowej, a zatem do sprawdzenia czy ϕ jest izometrią wystarczy przekonać się czy $M(\phi)_{st}^{st}$ jest ortogonalna (wtedy będzie też pewność, że w dowolnych innych bazach ortonormalnych przestrzeni $\mathbb{R}^2$ przekształcenie to ma macierz ortogonalną). Mamy natomiast:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W rezultacie ϕ nie jest izometrią.

Warto sformułować kolejny wniosek dotyczący zmiany baz.

Fakt 103. *Jeśli $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są bazami ortonormalnymi $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, to*

$$(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T.$$

Zatem dla izometrii ϕ przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Na koniec pozostawiam Państwu do wykazania dwa istotne fakty. Pierwszy jest bardzo prosty, bo wymaga jedynie analizy tego jak może wyglądać macierz ortogonalna rozmiaru 2, drugi wymaga nieco więcej wysiłku.

Fakt 104. *Każda izometria przestrzeni euklidesowej liniowej wymiaru 2 jest albo obrotem o kąt θ albo symetrią prostopadłą względem $\mathrm{lin}((\sin\theta, 1 - \cos\theta))$, a więc w pewnej bazie ortonormalnej ma jedną z poniższych macierzy:*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

Fakt 105. *Każda izometria przestrzeni euklidesowej liniowej wymiaru 3 jest albo obrotem, albo obrotem złożonym z symetrią prostopadłą, albo symetrią płaszczyznową. Przekształcenia te mają w pewnej bazie ortonormalnej macierze postaci, odpowiednio:*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ostatnie twierdzenie można pokazać także korzystając z twierdzenia Cartana o rozkładzie izometrii przestrzeni trójwymiarowej na nie więcej niż trzy symetrie (na następnym wykładzie). Przyjrzyjmy się jednak innemu interesującemu zagadnieniu, które wynika z tego rezultatu.

Definicja 79. *Załóżmy, że V jest zorientowaną przestrzenią linową skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$. Izomorfizm $\phi : V \to V$ nazwiemy* AUTOMORFIZMEM *V. Powiemy, że automorfizm ϕ przestrzeni V:*

- ZACHOWUJE ORIENTACJĘ *V, jeśli dla każdej jej (równow. pewnej) bazy dodatnio zorientowanej przestrzeni$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ baza $(\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_n))$ jest dodatnio zorientowana,*

- ZMIENIA ORIENTACJĘ *V, jeśli nie zachowuje orientacji.*

Łatwo sprawdzić, że izomorfizm ϕ zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \phi > 0$, a zmienia ją tylko wtedy, gdy $\det \phi < 0$. W kontekście izometrii nabiera to istotnego znaczenia. Zacznijmy od następującej uwagi.

Fakt 106. *Jeśli ϕ jest izometrią przestrzenia euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$, to*

$$\det \phi = \pm 1.$$

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną V. Wtedy $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ jest macierzą ortogonalną, a więc

$$(M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})^T \cdot M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = I.$$

Wyznacznik macierzy równy jest wyznacznikowi jej transpozycji, a zatem:

$$\det((M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})^T \cdot M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}) = (\det M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})^2 = (\det \phi)^2 = 1.$$

Skoro $\det \phi \in \mathbb{R}$, to $\det \phi = \pm 1$. □

Zauważmy, że z wyżej wypisanych twierdzeń wynika, że w $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$ jedynie obroty zachowują orientację. Jak się okaże, zbiory obrotów w $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$ tworzą ważne obiekty, zwane specjalnymi grupami ortogonalnymi. O tym więcej na następnym wykładzie. Powiemy o nim też o ważnym typie izometrii zmieniającym orientację – czyli o tzw. odbiciach. Są to symetrie prostopadłe w przestrzeni wymiaru n względem HIPERPŁASZCZYZN, czyli podprzestrzeni wymiaru $n-1$. Jak się okaże, każda izometria n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $(n > 0)$ jest złożeniem nie więcej niż n odbić. Rezultat ten ma ogromne znaczenie i jest punktem wyjście wielu ważnych teorii matematycznych.

Na sam koniec warto odnotować: czasem dzięki wyznacznikowi jesteśmy w stanie szybko stwierdzić czy dane przekształcenie liniowe jest danym typem izometrii, czy nie. Na przykład izometria o wyznaczniku równym -1 nie może być obrotem, ani złożeniem dwóch odbić. Jeszcze inna uwaga: jeśli np. wiemy, że izometria ϕ jest symetrią, to jak znaleźć podprzestrzeń, względem której jest ta symetria? Oczywiście jest to podprzestrzeń własna ϕ odpowiadająca wartości własnej 1. Schodzą się więc w tym miejscu różne poznane przez nas metody, pozwalając na rozpoznawanie izometrii w języku algebry.

Uzupełnienie. O kącie obrotu

Pojęcie obrotu wymaga dobrego zrozumienia pojęcia orientacji przestrzeni euklidesowej, ponieważ wyznaczenie właściwego kąta obrotu i podprzestrzeni wokół której obracamy możliwe jest jedynie wówczas, gdy blok O_θ macierzy endomorfizmu ϕ przestrzeni euklidesowych uzyskany jest w dodatnio zorientowanej bazie podprzestrzeni W. Inaczej macierz endomorfizmu ϕ ma właściwą postać blokową, ale możemy ją źle zinterpretować. Oto przykłady, które powinny dać jakąś intuicję.

- Niech $(V, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją wyznaczoną przez bazę standardową. Bierzemy $\phi : V \to V$ zadane macierzą $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Wówczas ϕ jest obrotem o kąt $-\frac{\pi}{3}$.

- $V = \mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją wyznaczoną przez bazę $\mathcal{A} = ((0,1),(1,0))$ (to nie jest baza standardowa!). Bierzemy ϕ zadane tym samym wzorem, co wyżej. Wówczas ϕ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{3}$. Dlaczego? Wprawdzie dalej w bazie standardowej przekształcenie ϕ ma macierz, jak wyżej, ale teraz baza standardowa nie jest zorientowana zgodnie z bazą $\mathcal{A}$ wyznaczającą orientację. Mamy jednak $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

- $V = \mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym zawiera podprzestrzeń W o bazie $\mathcal{A}'$ równej $((0,1,1),(0,1,0))$ i orientacja W jest zgodna z tą bazą. Określamy $\phi : V \to V$ wzorem:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

  Wówczas $\phi|_W$ jest obrotem o kąt $-\theta$. Dlaczego nie o kąt θ? Niech $\mathcal{B}' = ((0,1,0),(0,0,1))$. Bazy $\mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}'$ przestrzeni W są przeciwnie zorientowane, bo $M(id_W)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ma ujemny wyznacznik. A zatem bazy $\mathcal{A}'$ oraz $((0,0,1),(0,1,0))$ są zgodnie zorientowane. Baza $\mathbb{R}^3$ postaci $\mathcal{B} = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ również jest ortonormalna, a $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma postać:

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Przekształcenie ϕ jest zatem obrotem podprzestrzeni W o kąt $-\theta$ wokół $\mathrm{lin}((1,0,0))$.

Dodatek. Macierze ortogonalne i rozkłady

Macierze ortogonalne są jednymi z najważniejszych obiektów w zastosowaniach algebry liniowej. Ich znaczenie stanie się dla nas bardziej jasne, gdy będziemy mówili o diagonalizacji macierzy symetrycznych (rzeczywistych), ale warto wspomnieć o kilku wynikach mających niezwykle istotne znaczenie dla zastosowań. Cytujemy te twierdzenia wraz ze źródłami dowodów.

Fakt 107 (Rozkład QR)**.** *Każdą macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ można przedstawić jako iloczyn QR, gdzie Q jest macierzą ortogonalną oraz R jest górnotrójkątna. Jeśli A jest odwracalna, to rozkład ten jest jednoznaczny.*

Fakt 108 (Rozkład Cholesky'ego)**.** *Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje macierz dolnotrójkątna L taka, że $A = L \cdot L^T$,*
- *A jest symetryczna i dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mamy $\alpha^T A\alpha \geq 0$.*

Dowód wymaga wykorzystania twierdzenia o ortogonalizacji Grama-Schmidta i umiejętnego zastosowania algorytmu Gaussa. Szczegóły znaleźć można w skrypcie dr. Andrzeja Strojnowskiego:
`https://www.mimuw.edu.pl/~stroa/GAL2wyk14.pdf`.

Rezultaty te są istotne, bowiem równania liniowe o macierzach ortogonalnych można (za pomocą algorytmów) rozwiązywać znacznie szybciej niż dowolne układy równań liniowych. Po prostu jeśli mamy równanie liniowe $Ax = b$, gdzie $A \in M_n(\mathbb{R})$ oraz $x, b \in \mathbb{R}^n$, to jeśli A jest odwracalna, mamy $x = A^{-1}b$. Rozkład QR daje nam:

$$x = (QR)^{-1}b = R^{-1}Q^{-1}b = R^{-1}Q^Tb,$$

bo Q jest ortogonalna. Odwracanie macierzy górnotrójkątnej nie jest tak skomplikowane jak odwracanie dowolnej macierzy, a transpozycja jest niemal bezkosztowa. Co więcej, niedługo poznamy twierdzenie Cartana o rozkładzie izomerii na symetrie. W języku macierzowym będzie ono mówiło, że każda macierz ortogonalna jest iloczynem macierzy $S_1 \ldots, S_n$ takich, że $H_1^{-1} = H_i$ (tzw. macierze Householdera). Więcej o tych zagadnieniach można przeczytać w artykule *LZNK. Rozkład QR. Metoda Householdera* na portalu `https://dydmat.mimuw.edu.pl/`.

Na koniec warto wspomnieć o postaci dowolnej macierzy ortogonalnej. Rezultat ten jest częścią większej teorii dotyczącej macierzy normalnych. Wspomnimy o nich podczas rozważania zagadnień dotyczących iloczynów hermitowskich na przestrzeniach zespolonych.

Fakt 109 (Klasyfikacja izometrii w $\mathbb{R}^n$)**.** *Niech $(V, \langle\, ,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izometrią. Wówczas*

- *jeśli $W \subseteq V$ jest ϕ-niezmiennicza, to $W^\perp$ też jest ϕ-niezmiennicza,*
- *ϕ ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru ≤ 2,*
- *istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ przestrzeni $(V, \langle\, ,\rangle)$, w której macierz ϕ ma postać:*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s}, O_{\theta_1}, \ldots, O_{\theta_t}),$$

gdzie $k + s + 2t = n$, $0 \leq k \leq s \leq n$, $0 \leq t \leq \lfloor n/2 \rfloor$ oraz

$$O_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}.$$

Wśród różnych dowodów tego rezultatu chyba nie jest łatwo znaleźć rozumowanie nieodnoszące się do teorii przekształceń unitarnych. Wydaje się też, że z czysto geometrycznych powodów rezultaty tego typu są dla nas interesujące przede wszystkim dla $n = 2$ oraz $n = 3$, gdzie klasyfikacje mają charakter geometryczny. Warto natomiast wspomnieć w tym kontekście o jeszcze jednym niezwykle istotnym rezultacie, czyli tzw. twierdzeniu o rozkładzie biegunowym.

Fakt 110 (Twierdzenie o rozkładzie biegunowym, wersja rzeczywista)**.** *Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ istnieje macierz ortogonalna S taka, że*

$$A = S \cdot \sqrt{A^T \cdot A}.$$

Macierz $\sqrt{A^T \cdot A}$ to taka, że jej kwadrat wynosi $A^T A$. Nie dowodzimy w tym miejscu, że macierz $A^T A$ ma dokładnie jeden pierwiastek, ale za jakiś czas dowiemy się czym są macierze nieujemnie określone i być może także tego, że mają one jednoznaczne pierwiastki. Rozkład ten ma duże znaczne, chociażby ze względu na związek z fundamentalnym dla zastosowań twierdzeniem o rozkładzie według wartości osobliwych.

Definicja 80. *Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, ,\rangle)$.* Wartościami osobliwymi *ϕ nazywamy wartości własne endomorfizmu $\sqrt{\phi^*\phi}$, przy czym wartość osobliwa λ występuje z krotnością*

$$\dim\ker(\sqrt{\phi^*\phi} - \lambda\,\mathrm{id}).$$

Są to liczby nieujemne (bo operator $\sqrt{\phi^*\phi}$ jest dodatnio półokreślony).

Po wykładzie o przestrzeniach samosprzężonych dowiemy się, że macierz ϕ w bazach ortonormalnych jest symetryczna i jest diagonalizowalna za pomocą pewnej bazy ortonormalnej w V.

Uwaga: wartości osobliwe można wyznaczać także dla przekształceń liniowych (czy ich macierzy) pomiędzy przestrzeniami różnych wymiarów. Np. biorąc:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix},$$

wyznaczamy wartości własne $A^T A$ (macierz przekształcenia sprzężonego ϕ^* to A^T, jeśli macierz przekształcenia ϕ to A) postaci: zaś wartości osobliwe A to ich pierwiastki: $\sigma_1 = 6\sqrt{10}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{10}$, $\sigma_3 = 0$.

Fakt 111 (Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych (SVD decomposition))**.** *Niech $\phi : (V, \langle,\rangle_1) \to (W, \langle,\rangle_2)$ będzie przekształceniem liniowym o **niezerowych** wartościach osobliwych $s_1, \ldots, s_n$. Istnieją wówczas bazy ortonormalne $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n).$$

Innymi słowy, jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$, to istnieją macierze unitarne P, Q takie, że:

$$A = P\Sigma Q,$$

gdzie $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ma na przekątnej niezerowe wartości osobliwe A.

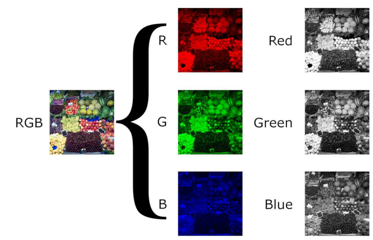
Oznaczenie diag stosujemy tu też dla macierzy niekwadratowej opisując jedyne jej niezerowe wyrazy stojące na przecięciu i-tego wiersza i i-tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz Σ.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T.$$

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych ma niezliczone zastosowania, poniżej kilka ciekawych odnośników. Dowód można znaleźć w moim wykładzie: https://mimuw.edu.pl/~amecel/2021l/gal21/GAL2+_AM_w13.pdf.

- SVD wytłumaczony wizualnie i kompresja obrazów (świetny film!): https://youtu.be/DG7YTlGnCEo
- metody numeryczne (rozwiązywanie układów, pseudoodwrotność, metoda najmn. kwadratów): http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum19/wyklad05.pdf
- przeszukiwanie tekstów (ukryte indeksowanie http://osilek.mimuw.edu.pl/images/e/ea/ED-4.2-m13-1.01.pdf
- rozpoznawanie twarzy, data-mining w polityce, kryształy itd. https://people.maths.ox.ac.uk/porterm/papers/s4.pdf



Powiedzmy o jednym zastosowaniu, związanym z kompresją. Załóżmy, że wykonaliśmy zdjęcie złożone z $600 \cdot 400$ pikseli ułożonych w prostokątną tablicę rozmiaru 600×400.

Jeden ze sposobów reprezentacji barw w postaci cyfrowej mówi, że każdy obraz można rozłożyć na trzy kanały barwowe: czerwony, zielony i niebieski. Nasycenie barwy reprezentowane jest przez jedną z liczb od 0 do 255. A zatem każdy obraz reprezentowany jest przez 3 macierze rozmiarów 600×400, z których każda zawiera wyrazy całkowite, od 0 do 255. Z tych trzech macierzy możemy (program graficzny) odtworzyć nasz obraz.

Niestety z jakiegoś powodu nie podoba nam się myśl o przechowywaniu tylu liczb w tablicach. Co możemy zrobić? Przecież nie zaczniemy usuwać kolorów! A jednak okazuje się, że można je usuwać tak umiejętnie, by oko ludzkie miało trudność z dostrzeżeniem różnicy, a nasz plik będzie (nawet 3 razy) lżejszy. Jak to zrobić? Weźmy jedną z takich tablic, nazwijmy ją $A \in M_{600\times 400}(\mathbb{R})$ i zastosujmy do niej rozkład SVD. Wówczas

$$A = U\Sigma V^T,$$

gdzie $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ma tylko w wyrazach σ_{ii} niezerowe elementy, i to ułożone tak, że

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{400}.$$

Oczywiście sam rozkład SVD nie prowadzi do żadnej kompresji. Zamiast macierzy rozmiaru $m \times n$ mamy teraz trzy macierze. Idea jest taka, żeby popatrzeć na macierz Σ i „wyzerować” najmniejsze z elementów typu σ_{ii}, a zostawić tylko k pierwszych, mając nadzieję, że to nie zaburzy za bardzo całego iloczynu.

Oto obrazek, który pokazuje tę ideę (macierze po prawej mają dużo więcej zer):

Bez sensu? Obraz bez związku z oryginałem? Proszę poeksperymentować z liczbą k w poniższym aplecie i sprawdzić na „własne oczy"”:

`http://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/`.