

# Przestrzenie euklidesowe afiniczne

Celem dzisiejszego wykładu jest zaprezentowanie najprostszych pojęć związanych z rozważaniem na rzeczywistej przestrzeni afinicznej struktury przestrzeni euklidesowej. Uzyskamy w ten sposób „dostęp” do wielu obiektów geometrycznych znanych ze szkoły oraz otworzą się przez nami nowe interesujące obszary (na które nie ma czasu w ramach tego wykładu): geometrie afiniczna, wypukła i kombinatoryczna, przestrzenie rzutowe, przestrzenie Grassmanna itd. Pouczające będzie jednak zobaczyć jak język algebraiczny ujednocila szereg rachunków geometrycznych, choćby w odniesieniu do pojęć szkolnych. Zaczniemy od definicji przestrzeni euklidesowej afinicznej.

**Definicja 67.** Parę  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , gdzie:

- $H$  jest skończeniem wymiarową przestrzenią afiniczną nad  $\mathbb{R}$ ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : T(H) \times T(H) \rightarrow \mathbb{R}$  jest iloczynem skalarnym

nazywamy PRZESTRZENIĄ EUKLIDESOWĄ AFINICZNĄ.

Każda przestrzeń euklidesowa liniowa jest przestrzenią euklidesową afiniczną. Jeśli  $M$  jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej euklidesowej  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , to  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle|_M)$  jest przestrzenią euklidesową afiniczną. W szczególności każda podprzestrzeń afiniczna przestrzeni euklidesowej liniowej jest przestrzenią euklidesową afiniczną.

**Definicja 68.** Niech  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. ODLEGŁOŚCIĄ punktów  $p, q \in H$  nazywamy długość wektora łączącego  $p$  z  $q$ . Liczbę tę oznaczamy  $\rho(p, q)$ . Zatem  $\rho(p, q) = \|\vec{pq}\|$ .

To, co najczęściej nazywa się w potocznym matematycznym języku odległością euklidesową punktów  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , to norma wektora  $\|\vec{ab}\|$  przy standardowym iloczynie skalarnym dana wzorem:

$$\rho(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Na przykład w  $\mathbb{R}^2$  ze standardowym iloczynie skalarnym odległość punktów  $(6, 1, 4), (2, 3, 1)$  to

$$\rho((6, 1, 4), (2, 3, 1)) = \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{29}.$$

W części „liniowej” też nie dotykamy algebry wieloliniowej, co wymagałoby osobnego semestralnego wykładu.

Niestandardowe odległości euklidesowe wyrażają się „jakościowo” identycznymi wzorami. Dla nas umiejętność liczenia niestandardowej odległości w  $\mathbb{R}^n$  jest istotna, natomiast z szerszego punktu widzenia stosuje się jednolite nazewnictwo.

**Fakt 89.** Dla punktów  $p, q, r$  przestrzeni euklidesowej afinicznej mamy:

(a)  $\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ ,

(b)  $\rho(p, q) = \rho(q, p)$ ,

(c)  $\rho(p, q) + \rho(q, r) \geq \rho(p, r)$ .

*Dowód.* Dówód (a):  $\|\vec{p\dot{q}}\| = 0 \iff \vec{p\dot{q}} = 0 \iff p = q$ . Punkt (b) wynika z formuły:  $\|\vec{p\dot{q}}\| = \|-\vec{q\dot{p}}\|$ , a punkt (c) z nierówności trójkąta dla przestrzeni euklidesowych liniowych, czyli:  $\|\alpha\| + \|\beta\| \geq \|\alpha + \beta\|$ . Mamy zaś:  $\vec{p\dot{r}} = \vec{p\dot{q}} + \vec{q\dot{r}}$ , więc  $\|\vec{p\dot{q}}\| + \|\vec{q\dot{r}}\| \geq \|\vec{p\dot{r}}\|$ .  $\square$

Na kolejnych latach studiów dowiedzie się Państwo, że wiele innych rzeczywistych funkcji (niż zdefiniowana wyżej norma różnicy wektorów zadająca „odległość euklidesową”) na zbiorze  $X \times X$  spełnia warunki (a)-(c) podane wyżej. Funkcje te nazywane są ogólnie METRYKAMI. Wiele z nich można określić w  $\mathbb{R}^n$ . Przykładem jest „metryka miejska” – dla punktów  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$  w  $\mathbb{R}^n$  określamy:  $\mu(a, b) = |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n|$ . Można liczyć „odległości” obiektów niekoniecznie przypominających geometryczne, na przykład definiując

- METRYKĘ RZĘDU: dla  $A, B \in M_n(K)$  określamy  $d(A, B) = r(A - B)$ ,
- ODLEGŁOŚĆ HAMMINGA dwóch słów długości  $n$  nad alfabetem  $\Sigma$ : liczba pozycji, na których słowa się różnią. Na przykład odległość między ZAGRABIĆ i ZATRABIĆ wynosi 3,
- ODLEGŁOŚĆ GEODEZYJNĄ wierzchołków grafu: długość najkrótszej ścieżki (geodezyjnej) między wierzchołkami grafu (jeśli dwa wierzchołki nie są połączone to za ich odległość przyjmuje się  $\infty$ ).

Kluczowym narzędziem w przestrzeniach euklidesowych liniowych są bazy prostopadłe i bazy ortonormalne. Podobnie jest w przestrzeniach afinicznych. Chcemy bowiem (choćby) wyznaczać odległości nie tylko pomiędzy punktami, ale też pomiędzy podzbiarami, a zwłaszcza podprzestrzeniami afinicznymi – na przykład odległość punktu od prostej, odległość dwóch prostych równoległych itd.

**Definicja 69.** Mówimy, że układ  $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$  jest UKŁADEM BAZOWYM PROSTOPADŁYM (odpowiednio: UKŁADEM BAZOWYM ORTONORMALNYM) przestrzeni euklidesowej afinicznej  $(H, \langle, \rangle)$ , jeśli  $p_0$  jest punktem przestrzeni  $H$  oraz  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jest bazą prostopadłą (odpowiednio: bazą ortonormalną) przestrzeni euklidesowej liniowej  $(T(H), \langle, \rangle)$ .

Z istnienia baz prostopadłych i baz ortonormalnych przestrzeni euklidesowych liniowych wynika oczywiście istnienie układów bazowych prostopadłych i układów bazowych ortonormalnych przestrzeni euklidesowych afinicznych.

**Przykład.** Niech  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4\}$  i niech  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  będzie standardowym iloczynem skalarnym w  $\mathbb{R}^3$ . Wówczas

$$(1, 2, 0); (1, 1, 1), (4, -5, 1)$$

jest prostopadłym układem bazowym przestrzeni afinicznej  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle|_H)$ , a układ

$$(1, 2, 0); \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{42}}(4, -5, 1)$$

jest ortonormalnym układem bazowym tej przestrzeni.

**Definicja 70.** Niech  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech  $M \subseteq H$  będzie podprzestrzenią przestrzeni  $H$ . **RZUTEM PROSTOPADŁYM** na  $M$  nazywamy przekształcenie afiniczne  $f : H \rightarrow H$  będące rzutem na  $M$  wzdłuż  $q + T(M)^\perp$ , dla pewnego  $q \in H$ . **SYMETRIĄ PROSTOPADŁĄ** względem  $M$  nazywamy przekształcenie afiniczne  $g : H \rightarrow H$  będące symetrią względem  $M$  wzdłuż  $q + T(M)^\perp$ , dla pewnego  $q \in H$ .

Zgodnie z definicją afinicznych rzutów i symetrii równoległych wybór punktu  $q \in H$  jest tu dowolny; wynik jest ten sam dla wszystkich  $q$ . Zauważmy też, że jeśli  $f : H \rightarrow H$  jest afinicznym rzutem prostopadłym na  $M$ , to jego pochodna  $f' : T(H) \rightarrow T(H)$  jest rzutem prostopadłym na  $T(M)$ , podobnie dla symetrii.

**Fakt 90.** Niech  $M \subseteq H$  będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej afinicznej  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Niech  $p_0$  będzie punktem przestrzeni  $M$ , niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  będzie bazą prostopadłą przestrzeni  $T(M)$  i niech  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$  będzie bazą przestrzeni  $T(M)^\perp$ . Wówczas dla każdego wektora  $\alpha \in T(H)$  rzut prostopadły punktu  $p_0 + \alpha$  na  $M$  wynosi:

$$p_0 + \frac{\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_1 + \dots + \frac{\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} \alpha_k,$$

a obraz punktu  $p_0 + \alpha$  w symetrii prostopadłej względem  $M$  wynosi:

$$p_0 + \left( \frac{\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_1 + \dots + \frac{\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} \alpha_k \right) - \left( \frac{\langle \alpha, \alpha_{k+1} \rangle}{\langle \alpha_{k+1}, \alpha_{k+1} \rangle} \alpha_{k+1} + \dots + \frac{\langle \alpha, \alpha_n \rangle}{\langle \alpha_n, \alpha_n \rangle} \alpha_n \right).$$

Jeśli powyższy układ bazowy jest ortonormalny, to rzut prostopadły punktu  $p_0 + \alpha$  na  $M$  wynosi:

$$p_0 + \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle \alpha, \alpha_k \rangle \alpha_k,$$

zaś obraz punktu  $p_0 + \alpha$  w symetrii prostopadłej względem  $M$  wynosi:

$$p_0 + (\langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle \alpha, \alpha_k \rangle \alpha_k) - (\langle \alpha, \alpha_{k+1} \rangle \alpha_{k+1} + \dots + \langle \alpha, \alpha_n \rangle \alpha_n).$$

**Definicja 71.** Niech  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. **ODLEGŁOŚCIĄ PUNKTU**  $p \in H$  DO PODPRZESTRZENI  $M \subseteq H$  nazywamy odległość punktu  $p$  od jego rzutu prostopadłego na  $M$ . Odległość tę oznaczamy  $\rho(p, M)$ .

**Fakt 91.** Jeśli  $M$  jest podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej afinicznej  $H$  i  $p$  jest punktem przestrzeni  $H$ , to dla każdego punktu  $q \in M$  zachodzi  $\rho(p, q) \geq \rho(p, M)$ .

*Dowód.* Niech  $p_0$  będzie rzutem prostopadłym punktu  $p$  na  $M$ . Mamy zatem  $\rho(p, M) = \rho(p, p_0)$ . Przy tym  $\overrightarrow{pp_0} \perp \overrightarrow{p_0q}$ , dla każdego  $q \in M$ . Zatem z twierdzenia Pitagorasa  $\|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp_0}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0q}\|^2$ , a stąd

$$\rho(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\| \geq \|\overrightarrow{pp_0}\| = \rho(p, p_0).$$

□

**Przykład.** W przestrzeni afinicznej  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_{st})$  rozpatrzmy:

$$M = (2, 3, 1) + \text{lin}((1, 2, -1)) \quad \text{i punkt} \quad p = (5, 4, 7) \notin M.$$

Mamy  $p = (2, 3, 1) + (3, 1, 6)$ , a więc rzut prostopadły  $p$  na  $M$  to

$$(2, 3, 1) + \frac{\langle (3, 1, 6), (1, 2, -1) \rangle}{\langle (1, 2, -1), (1, 2, -1) \rangle} (1, 2, -1) = (2, 3, 1) - \frac{1}{6} (1, 2, -1) = \left( \frac{11}{6}, \frac{16}{6}, \frac{7}{6} \right).$$

A zatem odległość punktu  $p$  od prostej  $M$  równa jest

$$\rho \left( (5, 4, 7), \left( \frac{11}{6}, \frac{16}{6}, \frac{7}{6} \right) \right) = \left\| \frac{1}{6} (19, 8, 35) \right\| = \frac{\sqrt{1650}}{6} = \sqrt{\frac{275}{6}}$$

Udowodnijmy teraz wynikający z powyższych obserwacji wzór na odległość punktu od podprzestrzeni wymiaru o 1 mniejszego niż cała przestrzeń afiniczna. Uogólnia on znany ze szkoły wzór na odległość punktu od prostej na płaszczyźnie.

**Fakt 92.** W przestrzeni euklidesowej afinicznej  $\mathbb{R}^n$  ze standardowym iloczynem skalarnym niech  $M$  będzie podprzestrzenią opisaną równaniem  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ , gdzie  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ . Wówczas odległość punktu  $p = (y_1, \dots, y_n)$  od  $M$  wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \dots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Wzór ten uogólnia się bez zmian na dowolną przestrzeń euklidesową afiniczną  $(H, \langle, \rangle)$  i jej podprzestrzeń  $M$  wymiaru  $\dim H - 1$  pod warunkiem, że

$$M = \{p_0 + x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\},$$

$$p = p_0 + y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$$

dla pewnego ortonormalnego układu bazowego  $p_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  w  $H$ .

*Dowód.* Niech  $q$  będzie rzutem prostopadłym punktu  $p$  na  $M$ . Wówczas, jak wiemy z wcześniejszych wykładów  $\rho(p, M) = \|p - q\|$ . Jak wiadomo  $p - q \in T(M)^\perp$ . Przestrzeń  $T(M)$  jest opisana równaniem  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ , a zatem wektor z  $T(M)$  należy do  $T(M)$  wtedy i tylko wtedy gdy jest on prostopadły do wektora  $(a_1, \dots, a_n)$  (bo mamy standardowy iloczyn skalarny). Stąd

$$\begin{aligned} T(M) &= \text{lin}((a_1, \dots, a_n))^\perp, \\ T(M)^\perp &= (\text{lin}((a_1, \dots, a_n))^\perp)^\perp = \text{lin}((a_1, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

Niech  $q = (z_1, \dots, z_n)$ . Skoro  $p - q \in T(M)^\perp$ , to istnieje takie  $t \in \mathbb{R}$ , że  $p - q = t(a_1, \dots, a_n) = (y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n)$ . A zatem

$$\rho(p, M) = \|p - q\| = |t| \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (\spadesuit)$$

Wyliczmy teraz wartość  $t$ :

$$\begin{aligned} t(a_1^2 + \dots + a_n^2) &= \langle t(a_1, \dots, a_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \\ &= \langle (y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = \\ &= a_1y_1 + \dots + a_ny_n - a_1z_1 - \dots - a_nz_n = \\ &= a_1y_1 + \dots + a_ny_n - b, \end{aligned}$$

przy czym równość  $a_1z_1 - \dots - a_nz_n = b$  wynika stąd, że  $q \in M$ . A więc

$$t = \frac{a_1y_1 + \dots + a_ny_n - b}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Wstawiamy wyliczone  $|t|$  do  $(\spadesuit)$  dostajemy:

$$\rho(p, M) = \left| \frac{a_1y_1 + \dots + a_ny_n - b}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right| \cdot \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \frac{|a_1y_1 + \dots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

□

Jako ćwiczenie pozostawiam Czytelnikowi pokazanie formuł związanych z odległością prostych, opartych o pojęcie iloczynu wektorowego.

**Fakt 93.** *Przypuśćmy, że  $L_1 = p_1 + \text{lin}(v_1)$  oraz  $L_2 = p_2 + \text{lin}(v_2)$  są prostymi w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Wykaż, że:*

1. *gdy proste  $L_1$  oraz  $L_2$  są równoległe, to*

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\|v_1 \times \overrightarrow{p_1p_2}\|}{\|v_1\|} = \frac{\|v_2 \times \overrightarrow{p_1p_2}\|}{\|v_2\|}.$$

2. *gdy proste  $L_1$  oraz  $L_2$  nie są równoległe, to*

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\langle v_1 \times v_2, \overrightarrow{p_1p_2} \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Na koniec przedstawimy, zgodnie z obietnicą, pewne rozważania dotyczące objętości w kontekście przestrzeni afinicznych. Wspominaliśmy już o równoległościanach, a w uzupełnieniu ostatniego wykładu mówiliśmy o ich objętości. Powiedzmy teraz coś o wielowymiarowych odpowiednikach trójkątów.

**Definicja 72.** Niech  $p_0, \dots, p_n$  będzie afinicznie niezależnym układem punktów. Zbiór kombinacji afinicznych punktów  $p_0, \dots, p_n$  o nieujemnych wagach oznaczamy przez  $S(p_0, \dots, p_n)$  i nazywamy  **$n$ -WYMIAROWYM SYMPLEKSEM ROZPIĘTYM NA PUNKTACH (LUB: O WIERZCHOŁKACH)  $p_0, \dots, p_n$ .**

- Sympleks 1-miarowy nazywamy ODCINKIEM.
- Sympleks 2-wymiarowy nazywamy TRÓJKĄTEM.
- Sympleks 3-wymiarowy nazywamy CZWOROŚCIANEM.

Zarówno dla sympleksów, jak i dla równoległościanów można (także w kontekście afinicznym) mówić  $k$ -wymiarowej mierze (objętości) opartej o pojęcie wyznacznika Grama.

**Definicja 73.** Niech  $S = S(p_0, \dots, p_k)$  będzie  $k$ -wymiarowym sympleksem w  $(H, \langle, \rangle)$ . Przez  $k$ -wymiarową miarę (lub  $k$ -wymiarową objętość) sympleksu  $S$  rozumiemy liczbę:

$$\mu_k(S) = \frac{1}{k!} \sqrt{W(\vec{p_0 p_1}, \dots, \vec{p_0 p_k})}.$$

Czytelnik powinien rozpoznać w powyższej formule wzory na pole trójkąta i objętość ostrosłupa trójkątnego. Sama definicja stawia jednak nowe pytania: czy „miara”, o której mówimy to jest „prawdziwe pole”? Albo pytając inaczej: czy miary określone osobno dla równoległościanów i sympleksów można rozszerzyć do miar obejmujących ogólniejsze rodziny zbiorów? A jeśli tak, to jakie to zbiory? To pytanie jest zaskakująco trudne, ale i niezwykle ważne.

Skąd czynnik  $1/k!$  w definicji miary  $k$ -wymiarowej sympleksu? Rozumować można na wiele sposobów. W dodatku przedstawimy szkic podejścia wywodzącego się z analizy. Na poziomie intuicyjnym wyjaśnienie jest następujące. Mając równoległościan  $R(p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  możemy rozważyć wszystkie sympleksy rozpięte przez pewne  $k$  wierzchołków tego równoległościanu, w tym  $p_0$  oraz przeciwległy, czyli  $p_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . Zgodnie z naszą definicją wszystkie te sympleksy mają tę samą objętość. A jest ich przecież  $k!$  Czy Czytelnik wie jak to pokazać? Wskazówka: wybierając taki sympleks trzeba określić w jakiej kolejności poruszamy się po wierzchołkach równoległościanu w kierunku  $k$  wektorów  $\alpha_i$ , które go rozpinają. Zatem sympleksy te są w bijekcji ze zbiorem permutacji zbioru  $k$ -elementowego...

*Uzupełnienie. Odległość podzbiorów przestrzeni afinicznych*

Na wykładzie wspomnieliśmy o odległości punktu od podprzestrzeni i w świetle Faktu 91 narzuca się następująca definicja.

**Definicja 74.** Niech  $X, Y$  będą niepustymi podzbiorem przestrzeni afinicznej euklidesowej  $(H, \langle, \rangle)$ . Odległością podzbiorów  $X, Y$  nazywamy liczbę:

$$\rho(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} \|x - y\|.$$

Ta definicja jest bardzo ogólna i dopuszcza sytuację, gdy rozłączne podzbiory mają odległość zero. Wystarczy na prostej  $\mathbb{R}$  ze standardową odległością zadana przez wartość bezwzględną przyjąć  $X = \{0\}$  oraz  $Y = (0, 1)$ . W przypadku jednak, gdy  $X, Y$  są przestrzeniami afinicznymi taka sytuacja nie może mieć miejsca. Zachodzi następujący fakt.

**Fakt 94.** Załóżmy, że  $A, B \neq \emptyset$  są podprzestrzeniami afinicznej przestrzeni euklidesowej  $X$ . Udowodnij, że jeżeli  $A \cap B = \emptyset$ , to istnieje prosta  $L \subseteq X$  prostopadła do  $A$  i  $B$ , spełniająca  $L \cap A \neq \emptyset, L \cap B \neq \emptyset$ . Dla dowolnych punktów  $p \in L \cap A$  oraz  $q \in L \cap B$  mamy  $\rho(A, B) = \|\vec{pq}\|$ .

*Dowód.* Twierdzimy, że skoro  $A \cap B = \emptyset$ , to  $T(A) + T(B) \neq T(X)$ . Inaczej bowiem biorąc dowolne punkty  $a \in A$  oraz  $b \in B$  mielibyśmy, że  $\vec{ab} \in T(A) + T(B)$ , czyli  $\vec{ab} = v_a + v_b$ , gdzie  $v_a \in T(A)$  oraz  $v_b \in T(B)$ . Wtedy jednak  $a + v_a = b - v_b$ . Lewa strona należy do  $A$ , a prawa do  $B$ , co jest niemożliwe. A zatem  $(T(A) + T(B))^\perp \neq \emptyset$ .

Weźmy  $a \in A$  oraz  $b \in B$  oraz zrzućmy wektor  $\vec{ab}$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$ . Twierdzimy, że ten rzut nie zależy od wyboru  $a, b$ . Weźmy bowiem  $c \in A$  oraz  $d \in B$  i również zrzućmy  $\vec{cd}$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$ . Dokładniej, niech  $b - a = v_1 + v_2$  oraz  $d - c = v'_1 + v'_2$ , gdzie  $v_1, v'_1 \in T(A) + T(B)$  oraz  $v_2, v'_2 \in (T(A) + T(B))^\perp$ . Wówczas:

$$b - a - (d - c) = (b - d) + (c - a) \in T(A) + T(B)$$

Jednak powyższa suma równa jest  $v_1 + v_2 - v'_1 - v'_2$ . Oznacza to, że  $v_2 - v'_2 \in T(A) + T(B)$ , a w konsekwencji:  $v_2 - v'_2 = 0$ , bo przecież  $v_2 - v'_2 \in (T(A) + T(B))^\perp$ . Dostaliśmy więc  $v_2 = v'_2$ . Ale  $v_2$  to rzut  $\vec{ab}$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$ , zaś  $v'_2$  to rzut  $\vec{cd}$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$ , czyli mamy to, co chcieliśmy: rzut nie zależy od wyboru  $a \in A, b \in B$ .

Wniosek jest taki, że jeśli  $A \cap B = \emptyset$ , to odległość pomiędzy podprzestrzeniami  $A$  oraz  $B$  jest długością rzutu wektora łączącego dowolny punkt z  $A$  z dowolnym punktem z  $B$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$ . Dlaczego? Co z szukaną prostą? Wśród wszystkich możliwych wektorów łączących  $\vec{ab}$ , dla  $a \in A, b \in B$ , któryś jest w  $(T(A) + T(B))^\perp$ . Punkty, które łączy rozpinają szukaną prostą. Ich odległość to odległość  $A$  od  $B$ .  $\square$

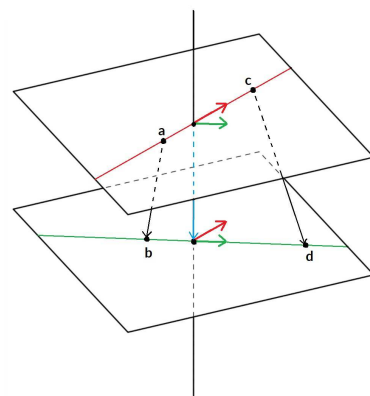
Czy widać, że rzutować mogliśmy wzdłuż dowolnej podprzestrzeni  $C$  takiej, że  $T(X) = (T(A) + T(B)) \oplus C$ ? Co to znaczy geometrycznie?

Geometrycznie sprawa jest prosta i można ją sobie zobrazować próbując wyznaczyć odległość dwóch nieprzecinających się prostych  $A$  oraz  $B$  w przestrzeni trójwymiarowej afinicznej. Proste te mogą być równoległe, czyli  $T(A) = T(B)$  lub skośne, czyli  $T(A) \cap T(B) = \{0\}$ .

Mamy  $A = a + T(A)$  oraz  $B = b + T(B)$  i te przestrzenie afiniczne możemy zawrzeć w dwóch równoległych przestrzeniach:

$$A' = a + T(A) + T(B), \quad B' = b + T(A) + T(B).$$

W przypadku prostych skośnych podprzestrzenie  $A'$  oraz  $B'$  to płaszczyzny równoległe zawierające proste  $A$  oraz  $B$ . Odległość tych płaszczyzn wyznaczamy zgodnie z dowodem twierdzenia: rzutujemy dowolny wektor łączący  $a \in A$  oraz  $b \in B$  na  $(T(A) + T(B))^\perp$  i bierzemy normę uzyskanego rzutu. Wynik nie zależy od wyboru  $a, b$ .



Warto zwrócić uwagę również na inny aspekt, mianowicie na problem wyznaczania odległości punktu  $p$  od podprzestrzeni afinicznej  $X$ . Można to robić na kilka sposobów.

1. Wyznaczyć rzut prostopadły  $q$  punktu  $p$  na  $X$  i wyznaczyć  $\|\vec{pq}\|$ .
2. Mając parametryzację  $X$  postaci

$$\mathbb{R}^k \ni (s_1, s_2, \dots, s_k) \mapsto f(s_1, s_2, \dots, s_k) \in X$$

minimalizować wartość funkcji

$$\|f(s_1, s_2, \dots, s_k) - p\|$$

po wszystkich  $k$ -tkach  $(s_1, s_2, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^n$ .

3. Można wreszcie rozważyć bazę przestrzeni stycznej  $T(X)$  złożoną z wektorów  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  oraz wziąć dowolny punkt  $r \in X$ . Wówczas odległość  $p$  od  $X$  jest jednocześnie wysokością równoległoscianu rozpiętego na wektorach  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \vec{pr}$  opuszczoną z punktu  $p$  na  $X$ . A tę wysokość możemy wyznaczyć za pomocą Faktu 82. Mamy stąd:

$$\rho(p, X) = \sqrt{\frac{W(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \vec{pr})}{W(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}}.$$

Zachęcam Czytelnika do dowodu tych obserwacji. Każda z nich może być wygodna w zależności od opisu przestrzeni afinicznej  $X$ .



### Dodatek. Miara Jordana i zasada Cavalieriego

Materiał przedstawiony w tym dłuższym niż zwykle dodatku, ma na celu wprowadzenie Państwa (bez szczegółów) w jedną z kluczowych obserwacji analitycznych prowadzących do wyznaczania objętości zbiorów... no właśnie, jakich? Zbiory te nazwiemy w tym dodatku mierzalnymi w sensie Jordana. Chciałbym pokazać jak wprowadzona przez nas definicja miary równoległoscianu wiąże się z definicją miary sympleksu, oraz innych obiektów. Wyjaśnienie podane na końcu wykładu zyska w ten sposób znacznie szerszy kontekst.

Naszym celem jest określenie miary Jordana. Jest to sposób wyznaczania miary  $n$ -wymiarowej  $\mu_n$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , którą przypisujemy coraz bardziej skomplikowanym podzbiорom przestrzeni afinicznej, począwszy od równoległoscianów. Robimy to w trzech krokach.

- **Krok 1.** Bierzemy przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  i ustalamy w niej bazę  $\mathcal{A}$ . Niech  $P_1, \dots, P_s$  będzie zbiorem równoległoscianów rozpiętych przez skalarne wielokrotności wektorów z  $\mathcal{A}$  o rozłącznych wnętrzach. Wówczas określamy  $\mu_n(P_1 \cup \dots \cup P_s) = \mu_n(P_1) + \dots + \mu_n(P_s)$ .

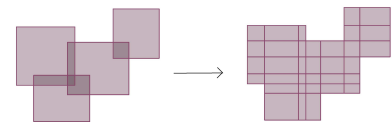
- **Krok 2.** Rozważamy zbiór równoległoscianów  $P_1, \dots, P_s$  rozpiętych przez skalarne wielokrotności wektorów z  $\mathcal{A}$ , ale nie zakładamy, że ich wnętrza są rozłączne.

Nietrudno widzieć, że można dokonać ich dekompozycji na sumę prostokątów  $Q_1, \dots, Q_r$  o rozłącznych wnętrzach, jak w poprzednim kroku. Okazuje się (to trzeba udowodnić), że niezależnie od wybranej dekompozycji wartość  $\mu_n(Q_1 \cup \dots \cup Q_r)$  jest taka sama, co pozwala rozszerzyć definicję funkcji  $\mu_n$  na zbiory  $P_1 \cup \dots \cup P_s$ .

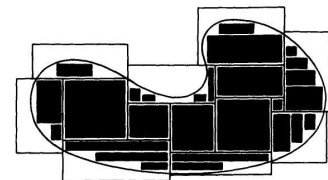
Uzyskaliśmy zatem nową klasę zbiorów, na której mamy miarę  $\mu_n$  – są to zbiory równoległoscianów równoległych do ustalonej bazy  $\mathbb{R}^n$ . Czas na argument analityczny.

- **Krok 3.** Bierzemy podzbiór **ograniczony**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , to znaczy:  $\Omega$  jest zawarty w pewnym równoległoscianie.
  - Przez **miarę zewnętrzną** zbioru  $\Omega$ , ozn.  $\overline{\mu_n(\Omega)}$ , określamy infimum po wszystkich sumach skończonych  $\mu_n(P_1) + \dots + \mu_n(P_s)$ , gdzie  $P_1, \dots, P_s$  są równoległoscianami (jak w poprzednich krokach) takimi, że  $\Omega \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$ .
  - Przez **miarę wewnętrzną** zbioru  $\Omega$ , ozn.  $\mu_n(\Omega)$ , określamy supremum po wszystkich sumach skończonych  $\mu_n(Q_1) + \dots + \mu_n(Q_r)$ , gdzie  $Q_1, \dots, Q_r$  są równoległoscianami (jak w poprzednich krokach) takimi, że:  $\Omega \supseteq Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ .

W trakcie studiów poznają Państwo różne klasy zbiorów mierzalnych, zarówno w ramach kursu analizy, jak i teorii miary czy rachunku prawdopodobieństwa (najważniejszym będzie miara Lebesgue'a).



Przykład dekompozycji zbioru prostokątów o bokach równoległych do ustalonej bazy  $\mathbb{R}^2$ . Źródło: Wikipedia.



Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Chapman & Hall.

**Definicja 75.** Mówimy, że zbiór ograniczony  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  jest *mierzalny w sensie Jordana*, jeśli

$$\overline{\mu_n(\Omega)} = \underline{\mu_n(\Omega)}.$$

Liczbę powyżej nazywamy *miarą Jordana* zbioru  $\Omega$ , ozn.  $\mu_n(\Omega)$ .

Mówiąc równoważnie: ograniczony zbiór  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  jest mierzalny w sensie Jordana jeśli dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieją równoległosciany  $P_1, \dots, P_m$  oraz  $R_1, \dots, R_n$  o rozłącznych wnętrzach rozpięte przez skalarne wielokrotności wektorów z bazy  $\mathcal{A}$ , że

$$P_1 \cup \dots \cup P_r \subseteq \Omega \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_s$$

oraz

$$0 \leq \sum_{j=1}^s \mu_n(R_j) - \sum_{i=1}^r \mu_n(P_i) < \epsilon.$$

Czytelnika zainteresowanego szczegółami tej konstrukcji oraz większą liczbą przykładów odsyłam do świetnego tekstu dr. Michała Krycha: Elementy teorii całkowania, [https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt27-calcki\\_D.pdf](https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt27-calcki_D.pdf).

Wymieńmy kilka własności miary, którą określiliśmy jako rozszerzenie zdefiniowanej na wykładzie miary równoległoscianu.

- Suma skończenie wielu mierzalnych podzbiorów  $\mathbb{R}^n$  w sensie Jordana jest mierzalna w sensie Jordana, ale suma nieskończenie wielu – już niekoniecznie.
- Można pokazać, że dla zbiorów mierzalnych  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$  mamy  $\mu_n(\Omega_1) \leq \mu_n(\Omega_2)$ .

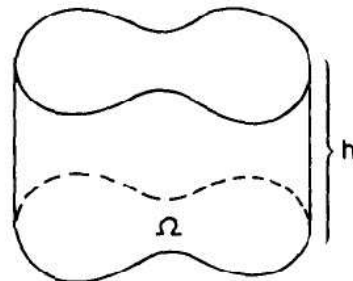
Uogólnienia poznanych przez nas rezultatów, w tym niezwykle istotna zasada Cavalieriego (odsyłam też do cytowanego tekstu) wypisuję niżej.

- **Twierdzenie.** Niech  $U \subseteq (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$  będzie podprzestrzenią afiniczną wymiaru  $n - 1$ , czyli tzw. hiperpłaszczyzną, oraz niech  $v \in U^\perp$ , gdzie  $\|v\| = 1$ . Niech  $\mu_n$  oraz  $\mu_{n-1}$  będą miarami Jordana na  $\mathbb{R}^n$  oraz na  $U$ . Dla dowolnego podzbioru  $\Omega \subseteq U$  mierzalnego w sensie Jordana oraz dodatniej liczby  $h > 0$  określamy **cylinder nad  $\Omega$  wysokości  $h$**  jako zbiór:

$$\text{Cyl}(\Omega, h) := \{x + tv \in \mathbb{R}^n \mid x \in \Omega, 0 \leq t \leq h\}.$$

Wówczas:

$$\mu_n(\text{Cyl}(\Omega, h)) = h \cdot \mu_{n-1}(\Omega).$$



$\text{Cyl}(\Omega, h)$

Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Chapman & Hall.

- **Twierdzenie (Zasada Cavalieriego (1635)).** Niech  $\Omega$  będzie mierzalnym (w s. J.) podzbiorem  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ , niech  $U$  będzie hiperpłaszczyzną i niech  $n_0 \in U^\perp$  ma długość 1. Dla  $t \in \mathbb{R}$  niech

$$\Omega_t := \Omega \cap (tn_0 + U).$$

Jeśli  $\Omega_t$  jest mierzalny (w sensie Jordana) dla  $a \leq t \leq b$  oraz pusty dla pozostałych  $t$ , to:

$$\mu_n(\Omega) = \int_a^b \mu_{n-1}(\Omega_t) dt.$$

Czytelnik zechce wpisać w dowolną wyszukiwarke hasło „zasada Cavalieriego”, a przekona się o jej licznych i pięknych zastosowaniach. Można też obejrzeć wiele przyjemnych filmów, np. <https://youtu.be/0xCe6LGWwJU>. Oczywiście cytowany wyżej tekst da Państwu ścisły pogląd na te zagadnienia.

- **Wniosek.** Niech  $U$  będzie hiperpłaszczyzną w  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$  i niech  $\Omega$  będzie mierzalnym (w s. J.) podzbiorem  $U$ . Dla każdego elementu  $p \in V \setminus U$  przez **stożek nad  $\Omega$**  określamy zbiór:

$$Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \in \mathbb{R}^n \mid x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\},$$

czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy  $\Omega$  z  $p$ . Jeśli  $h$  jest odległością  $p$  od  $U$ , to  $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n} \mu_{n-1}(\Omega)$ .

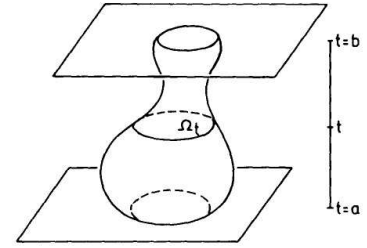
Wykażmy ostatni wniosek. Zgodnie z zasadą Cavalieriego rozważamy zbiór  $\Omega_t = \Omega \cap (tn_0 + U)$ , gdzie  $0 \leq t \leq h$ . Jest to obraz  $\Omega$  przy jednoładności o środku w  $p$  o skali  $\frac{h-t}{h} \Omega$ . Zgodnie z twierdzeniem o zmianie miary przy przekształceniu afinicznym,  $\mu_{n-1}(\Omega_t) = \left(\frac{h-t}{h}\right)^{n-1} \mu_{n-1}(\Omega)$  (zobacz macierz tej jednoładności). Zgodnie z zasadą Cavalieriego mamy zatem  $\mu_n(Cone(\Omega, p))$  równe jest:

$$\int_0^h \left(\frac{h-t}{h}\right)^{n-1} \mu_{n-1}(\Omega) dt = h \cdot \mu_{n-1}(\Omega) \int_0^1 \tau^{n-1} d\tau = \frac{h}{n} \cdot \mu_{n-1}(\Omega).$$

**Fakt 95 (Wniosek – pole, wzór 1.).** Niech  $p_0, \dots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$  i niech  $S = S(p_0, \dots, p_n)$ . Niech też  $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ , dla  $i = 1, \dots, n$ . Wówczas:

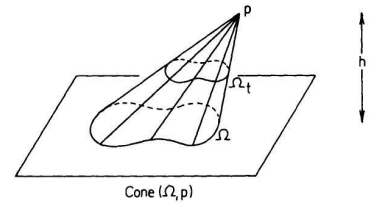
$$\mu_n(S) = \frac{1}{n!} \sqrt{W(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

przy czym w kolumnach macierzy z prawej strony (\*) są współrzędne  $p_0, \dots, p_n$  w pewnym układzie bazowym  $p_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .



Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Chapman & Hall.

Te zastosowania to chociażby znane ze szkoły wzory na objętości ostrosłupa, stożka, kuli itd.



Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Chapman & Hall.

**Szczególny przypadek.** Dla standardowego układu bazowego w  $\mathbb{R}^2$  dostajemy wzór na pole  $S$  trójkąta o wierzchołkach w punktach  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  oraz warunek konieczny i wystarczający do współliniowości tych punktów. Dostajemy także równanie prostej przechodzącej przez dwa zadane punkty.

*Dowód.* Odejmując pierwszą kolumnę od wszystkich pozostałych dostajemy stosunkowo łatwo jedną z równości:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}^2 &= \det \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ p_0 & \overrightarrow{p_0 p_1} & \dots & \overrightarrow{p_0 p_n} \\ | & | & & | \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}^2 = \\ &= \det \begin{bmatrix} | & & & | \\ \alpha_1 & \dots & & \alpha_n \\ | & & & | \end{bmatrix}^T \cdot \det \begin{bmatrix} | & & & | \\ \alpha_1 & \dots & & \alpha_n \\ | & & & | \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{bmatrix} = \\ &= W(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2. \end{aligned}$$

Dowód jest indukcyjny ze względu na  $n$ . Dla  $n = 1$  mamy z definicji (równoległoscianu)  $\mu_1(S(p_0, p_1)) = \sqrt{W(\alpha_1)}$ .

Rozważmy zatem sympleks rozpięty na afinicznie niezależnym układzie  $p_0, \dots, p_{n+1}$  punktów w  $\mathbb{R}^n$ . Wiemy też (poprzedni fakt o mierze  $n$ -wymiarowej stożka), że

$$\mu_{n+1}(S(p_0, \dots, p_{n+1})) = \frac{h}{n+1} \mu_n(S(p_0, \dots, p_n)).$$

A zatem możemy wstawić uzyskaną wyżej formułę na  $\mu_n(S(p_0, \dots, p_n))$  i dostajemy dwa przedstawienia szukanej objętości  $\mu_{n+1}(S(p_0, \dots, p_{n+1}))$ :

$$\frac{h}{(n+1)!} \left| \det \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{(n+1)!} \left| \det \begin{bmatrix} | & | & \dots & | & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & * \\ | & | & & | & | \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

Powyższa równość wynika z rozwinięcia Laplace'a. Twierdzimy, że macierz (której wyznacznik liczymy) po prawej jest macierzą współrzędnych punktów  $p_0, \dots, p_n, p_{n+1}$  w pierwotnej bazie punktowej  $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$  uzupełnionej o wektor  $\frac{1}{h} \overrightarrow{p_{n+1} p_0}$ . Mamy wtedy

$$p_{n+1} = p_0 + h \overrightarrow{\frac{1}{h} p_{n+1} p_0}$$

zaś punkty  $p_0, \dots, p_n$  mają w rozszerzonym układzie identyczne  $n$  współrzędnych, jak w pierwotnym (i ostatnie równe 0).  $\square$

Widzicie zatem Państwo, że od dość ogólnych abstrakcyjnych rozważań przeszliśmy do bardzo konkretnych zastosowań. Jest ich więcej.

**Fakt 96** (Wniosek – pole, wzór 2.). Niech  $p_0, \dots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$  i niech  $S = S(p_0, \dots, p_n)$ . Niech też  $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ , dla  $i = 1, \dots, n$  oraz przyjmijmy  $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$ , dla  $0 \leq i, j \leq n$ . Wówczas:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \dots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right|^2.$$

**Przypadek szczególny.** Wzór Herona. Niech  $\triangle$  będzie trójkątem o bokach długości  $a, b, c$  i niech  $V$  będzie polem  $\triangle$ . Dla  $p = (a + b + c)/2$  mamy:

$$V^2 = \frac{1}{2^2 \cdot (2!)^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & a^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & b^2 & 1 \\ c^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{|-16p(p-a)(p-b)(p-c)|}{16}.$$

gdzie  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

Dowód. Już wiemy, że

$$n! \cdot \mu_n(S) = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \right|.$$

Możemy też zmodyfikować te macierze, nie zmieniając wyznaczników, i dostać:

$$n! \cdot \mu_n(S) = \left| \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & p_n^T & - & 1 & 0 \\ - & 0^T & - & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | & | \\ p_0 & \dots & p_n & 0 \\ | & \dots & | & | \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right|.$$

Mnożymy dwie macierze i na chwilę przypominamy sobie, że  $p_i$  to wektory. Zatem  $(n! \cdot \mu_n(S))^2$  jest równe:

$$\left| \det \begin{bmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \dots & \langle p_0, p_n \rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle p_n, p_0 \rangle & \dots & \langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = 2^n \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 2\langle p_0, p_0 \rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n \rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0 \rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right|.$$

Dostaliśmy tę równość mnożąc pierwsze  $n + 1$  wierszy przez 2 i jednocześnie dzieląc ostatnią kolumnę przez  $\frac{1}{2}$ . Teraz upraszczamy ten

wyznacznik. Dla każdego  $k$ , gdzie  $0 \leq k \leq n$  odejmujemy  $\|p_k\|^2$ -razy ostatni wiersz od  $k + 1$ -wszego wiersza, a jednocześnie odejmujemy  $\|p_k\|^2$ -razy ostatnią kolumnę od kolumny  $k + 1$ -wszej. Aby ogarnąć to, co powstanie wprowadzamy oznaczenia:

$$a_{ij} := 2\langle p_i, p_j \rangle - \|p_i\|^2$$

$$b_{ij} := 2\langle p_i, p_j \rangle - \|p_i\|^2 - \|p_j\|^2 = -\|p_i - p_j\|^2 = -d_{ij}^2.$$

Dostajemy (pamiętając, że  $d_{ii} = \|p_i - p_i\| = 0$ ):

$$2^n \cdot (n!)^2 \mu_n(S)^2 = \left| \det \begin{bmatrix} 2\langle p_0, p_0 \rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n \rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0 \rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} b_{00} & \dots & b_{0n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & \dots & b_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} d_{00}^2 & \dots & d_{0n}^2 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & \dots & d_{nn}^2 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 0 & \dots & d_{0n}^2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right|.$$

**Fakt 97** (Wniosek – pole, wzór 3.). Niech  $p_0, \dots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$  są równej długości:  $\|p_i\| = r$  tzn. jeśli wszystkie wierzchołki  $p_i$  leżą na sferze o promieniu  $r$  o środku (gdzieś, czyli) w punkcie  $0$ , to dla  $S = S(p_0, \dots, p_n)$  mamy:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2 r^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \dots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & \dots & d_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right|.$$

**Ilustracja.** Niech  $\triangle$  będzie trójkątem o bokach długości  $a, b, c$  i niech  $V$  będzie polem  $\triangle$ . Jeśli  $r$  jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie  $\triangle$ , to  $4Vr = abc$ .

$$V^2 = \frac{1}{2^{2+1} \cdot (2!)^2 \cdot r^2} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & a^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & b^2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^{2+1} \cdot (2!)^2 \cdot r^2} \cdot 2a^2 b^2 c^2.$$

Dowód. Wiemy, że  $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$  to (także):

$$r \cdot \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ -p_0 & \dots & -p_n \\ | & & | \\ r & & r \end{bmatrix} \right|.$$

A zatem  $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$  równe jest:

$$r \cdot \left| \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & r \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & r \end{bmatrix} \right|.$$

$$r \cdot \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ p_0 & \cdots & p_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & & | \\ -p_0 & \cdots & -p_n \\ | & & | \\ r & & r \end{bmatrix} \right|.$$

A zatem wymnażając:

$$(n!)^2 \cdot \mu_n(S)^2 \cdot r^2 = \left| \det \begin{bmatrix} r^2 - \|p_0\|^2 & r - \langle p_0, p_1 \rangle & \cdots & r^2 - \langle p_0, p_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r^2 - \langle p_0, p_n \rangle & r^2 - \langle p_1, p_n \rangle & \cdots & r^2 - \|p_n\|^2 \end{bmatrix} \right|.$$

Stąd już wynika teza, bowiem mamy:

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= \|p_i - p_j\|^2 = \|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - 2\langle p_i, p_j \rangle \\ &= r^2 + r^2 - 2\langle p_i, p_j \rangle \\ &= 2(r^2 - \langle p_i, p_j \rangle). \end{aligned}$$

**Fakt 98** (Wniosek - jeszcze jeden (ćwiczenie)). Niech  $p_0, \dots, p_{n+1}$  będą w  $\mathbb{R}^n$ . Wówczas dla  $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$  mamy:

$$-(-2)^n \det \underbrace{\begin{bmatrix} \|p_0\|^2 & p_0^T & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|p_{n+1}\|^2 & p_{n+1}^T & 1 \end{bmatrix}}_A = \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \cdots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \cdots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Co więcej, następujące warunki są równoważne.

- (1) Punkty  $v_0, \dots, v_{n+1}$  leżą na hiperpłaszczyźnie lub na sferze w  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Istnieją  $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$  (nie wszystkie równe 0) takie, że  $v = (v_0, \dots, v_{n+1})$  spełniają  $a\|v\|^2 + 2\langle b, v \rangle + c = 0$ ;
- (3)  $\det A = 0$ .

Przykładowe zastosowanie: twierdzenie Ptolemeusza o czworokącie.

Jak Państwo widzicie, także z poziomu algebry liniowej (nie tylko analizy) dowodzić można szereg elementarnych rezultatów, także elementarnych. Można je traktować jako elementy geometrii analitycznej w  $n$ -wymiarach. Nie są one zasadniczą częścią wykładu, ponieważ zajmujemy się w nim strukturami i pojęciami przydatnymi nie tylko w geometrii, ale w i całej matematyce.