Miara i orientacja

Na ostatnim wykładzie poznaliśmy ważne narzędzie do badania układów wektorów w przestrzeni euklidesowej – macierz Grama. Zawiera ona jednocześnie informację o ortogonalności i liniowej niezależności danego układu wektorów. Umożliwia ona przetłumaczenie wyznaczania iloczynu skalarnego wektorów zapisanych w danej bazie na język mnożenia macierzy. Za jej pomocą możemy również stwierdzać które funkcje (liniowe ze względu na każdą zmienną) $f : V \times V \to \mathbb{R}$ są iloczynami skalarnymi w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$.

Dziś poznamy geometryczną interpretację wyznacznika macierzy Grama. Będzie to również okazja, by opowiedzieć o intuicjach dwóch fundamentalnych pojęć matematycznych: objętości i orientacji.

Zacznijmy od obserwacji mówiącej o zmianie wyznacznika Grama przy elementarnych modyfikacjach układu wektorów. Istotne jej elementy wykorzystaliśmy poprzednio przy dowodzie kryterium Sylvestera.

Fakt 81. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$. Wówczas jeśli układ $\beta_1, \ldots, \beta_k$ powstaje z $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ za pomocą dowolnej z trzech poniższych operacji:*

(a) przez dodanie do któregoś z wektorów α_i kombinacji liniowej pozostałych wektorów układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$,

(b) przez zmianę wektora z układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ na wektor przeciwny,

(c) przez zamianę kolejności wektorów z układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, to

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\beta_1, \ldots, \beta_k).$$

Jeśli zaś $\beta_1, \ldots, \beta_k$ powstaje z $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przez przemnożenie jednego z wektorów α_i przez $a \in \mathbb{R}$, to $a^2 \cdot W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\beta_1, \ldots, \beta_k)$.

A więc, mówiąc nieformalnie, modyfikacja układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest modyfikacją jednocześnie wierszy i kolumn. Dowód uwagi pozostawiam jako ćwiczenie (patrz rozumowania z poprzedniego wykładu).

Wiemy, że wyznacznik Grama jest liczbą nieujemną (dodatnią, gdy układ jest liniowo niezależny). Chcielibyśmy myśleć o jego pierwiastku kwadratowym jako o liczbie przypisującej układowi wektorów „miarę" ich wzajemnego położenia w przestrzeni euklidesowej. Prowadzi to (ponownie) do definicji równoległościanu.

Definicja 58. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie dowolnym układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle , \rangle)$. Zbiór $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ złożony ze wszystkich wektorów postaci:*

$$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_k\alpha_k, \text{ gdzie } t_1, \ldots, t_k \in [0, 1]$$

nazywany RÓWNOLEGŁOŚCIANEM ROZPIĘTYM NA UKŁADZIE WEKTORÓW $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. *Równoległościan nazwiemy* ZDEGENEROWANYM, *gdy wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo zależne. Niezdegenerowany równoległościan rozpięty na układzie k wektorów nazywamy* RÓWNOLEGŁOŚCIANEM k-WYMIAROWYM.

Intuicja ze skryptu prof. Toruńczyka: `https://www.mimuw.edu.pl/~torunczy/GAL/011-12/Wyk/V-UNI.pdf` ze strony 31: „Zauważmy, że zdegenerowane równoległościany rozpięte na 3 wektorach są na ogół sześciobokami o bokach parami równoległych; odrobina wyobraźni pozwala jednak spostrzec je jako *spłaszczone* równoległościany".

Gdy wrócimy do geometrii afinicznej, wówczas niektóre obiekty występujące w szkolnym kursie geometrii płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z kartezjańskimi układami współrzędnych zinterpretujemy jako k-wymiarowe równoległościany. Odcinkiem nazywać będziemy równoległościan 1-wymiarowy, równoległobokiem – równoległościan 2-wymiarowy itd. Chcemy teraz określić objętość równoległościanu.

Definicja 59. *Niech $R = R(p_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie k-wymiarowym równoległościanem w afinicznej przestrzeni euklidesowej. Przez $\mu_l(R)$ określać będziemy liczbę rzeczywistą zwaną* L-WYMIAROWĄ MIARĄ) *(albo l-wymiarową objętością) równoległościanu R, przy czym*

$$\mu_k(R) = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

Ponadto przyjmujemy $\mu_l(R) = 0$, dla $l > k$ oraz $\mu_l(R) = \infty$, dla $l < k$.

Stwierdzenie z początku wykładu podaje szereg intuicji uzasadniających przyjętą przez nas definicję. Objętość nie zależy od kolejności wektorów ani zmiany zwrotu jednego z nich. Zmienia się ona proporcjonalnie do zmiany normy każdego z wektorów rozpinających równoległościan. W przypadku, gdy układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wektorów rozpinających równoległościan równy jest wymiarowi n przestrzeni, w której się on znajduje, wówczas miara n-wymiarowa tego równoległościanu równa jest wyznacznikowi macierzy zawierającej w kolumnach współrzędne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w dowolnej bazie ortonormalnej (zgodnie z twierdzeniem z poprzedniego wykładu). Jest to też pojęcie intuicyjne z punktu widzenia szkolnego wzoru na pole jako „iloczynu podstawy i wysokości", o czym mowa w kolejnym stwierdzeniu.

Fakt 82. *Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle , \rangle)$ i niech γ będzie rzutem prostopadłym α_k na* $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^{\perp}$.

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot \|\gamma\|^2.$$

Dowód. Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$. Wiemy z poprzednich wykładów, że $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $\alpha_k = \beta + \gamma$, dla pewnego $\beta \in W$. A zatem:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta + \gamma \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \beta + \gamma, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \beta + \gamma, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \beta + \gamma, \beta + \gamma \rangle \end{vmatrix}$$

Skoro $\gamma \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^{\perp}$ oraz $\beta \perp \gamma$, to mamy:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta \rangle \\ \langle \beta, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \beta, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \beta, \beta \rangle + \langle \gamma, \gamma \rangle \end{vmatrix}$$

Niech $\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_{k-1}\alpha_{k-1}$. Wtedy po odjęciu od n tego wiersza i-tego wiersza przemnożonego przez a_i, dla wszystkich $1 \leq i \leq k-1$, wyznacznik się nie zmienia i dostajemy:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta \rangle \\ \langle 0, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle 0, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \gamma, \gamma \rangle \end{vmatrix}.$$

Po odjęciu od n tej kolumny i-tej kolumny przemnożonej przez a_i, dla wszystkich $1 \leq i \leq k-1$, wyznacznik się nie zmienia i **ostatni wiersz się nie zmienia**, zaś ostatnia kolumna staje się *transpozycją* ostatniego wiersza, co oznacza, że:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) & 0 \\ 0 & \|\gamma\|^2 \end{vmatrix}.$$

□

Zanim przejdziemy dalej powiemy o jeszcze jednym fundamentalnym dla naszej intuicji fakcie mającym olbrzymie znaczenie w interpretacji analitycznej: objętość równoległościanu zmienia przy endomorfizmie liniowym się tak, jak moduł wyznacznika tego endomorfizmu.

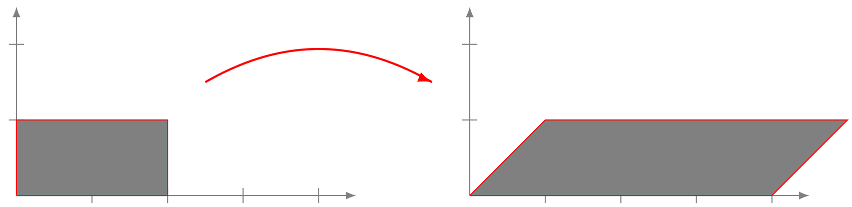
Fakt 83. *Niech $\phi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej $(V, \langle , \rangle)$. Dla dowolnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ w V zachodzi równość:*

$$\mu_n(R(\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \ldots, \phi(\alpha_n))) = |\det(\phi)| \cdot \mu_n(R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Przykład. Bierzemy $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\phi(x, y) = (2x + y, y).$$

Równoległościan $R((2, 0), (0, 1))$ przechodzi na $R((4, 0), (1, 1))$.



Wyznacznik rozważanego przekształcenia liniowego to 2.

Dowód. Zakładamy, że $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $(V, \langle , \rangle)$. Wiemy, że:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
$$G(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n)) = (M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Mamy też: $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, czyli

$$\det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \det(\phi) \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}).$$

Zatem

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det((M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^T \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = (\det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^2$$
$$W(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n)) = (\det(\phi) \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^2.$$

Stąd rzeczywiście:

$$\mu_n(R(\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n))) = |\det(\phi)| \cdot \mu_n(R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

□

Zauważmy, że dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym zachodzi $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\det A)^2$, bo możemy traktować macierz A jako macierz $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$. A zatem $|\det A|$ jest w takim przypadku n-wymiarową objętością równoległościanu rozpiętego przez rozważany układ wektorów. Warto powiedzieć na koniec o dwóch pojęciach związanych ze znakiem wyznacznika. Pierwsze z nich – orientacja, pozwala na rozważanie „n-wymiarowej miary ze znakiem".

Definicja 60. *Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią nad ciałem $\mathbb{R}$. Mówimy, że bazy $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots \beta_n\}$ przestrzeni V są:*

- ZGODNIE ZORIENTOWANE, *jeśli* $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0$,
- PRZECIWNIE ZORIENTOWANE, *jeśli* $\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} < 0$.

Przykład. Bazy

$$\mathcal{A} = \{(3,2),(7,4)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,2),(1,0)\}$$

są zgodnie zorientowane, bo:

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Zauważmy, że zgodne zorientowanie jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Aby się o tym przekonać sprawdzamy trzy własności relacji równoważności:

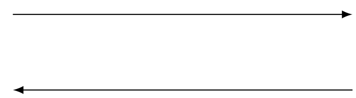
- **Zwrotność**. Jeśli $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathbb{R}^n$ to
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I \Rightarrow \det I = 1,$$
czyli bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}$ są zgodnie zorientowane.
- **Symetryczność**. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1},$$
czyli
$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} > 0.$$
- **Przechodniość**. Jeśli $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ są bazami $\mathbb{R}^n$ to
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
czyli
$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} > 0, \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} > 0 \Rightarrow \det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} > 0.$$

Uwaga: dla każdej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz bazy $\mathcal{A}' = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ powstałej przez zamianę kolejności wektorów na pierwszych dwóch współrzędnych mamy:

- bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}'$ są przeciwnie zorientowane,
- każda baza $\mathbb{R}^n$ jest zgodnie zorientowana z $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{A}'$.

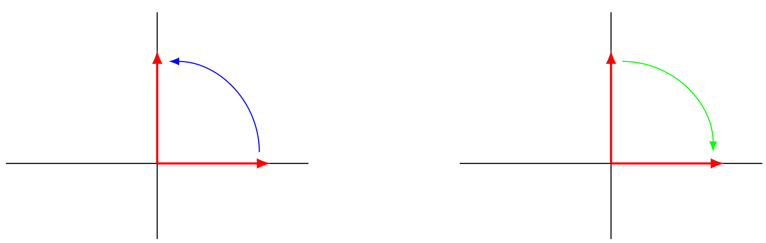
Definicja 61. *Rodzinę wszystkich baz zgodnie zorientowanych z pewną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy* ORIENTACJĄ *przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest* ZORIENTOWANA, *jeśli wybrana jest jedna z jej (dwóch) orientacji. W przestrzeni zorientowanej mówimy, że jej baza $\mathcal{A}$ jest* DODATNIO (UJEMNIE) ZORIENTOWANA, *jeśli jest zorientowana zgodnie (przeciwnie) z wybraną orientacją przestrzeni V.*

Zauważmy, że dokonanie wyboru jednej z dwóch dostępnych orientacji przestrzeni liniowej (czy afinicznej) nie jest w żaden sposób uzasadnione matematycznie. Mimo wszystko wyborów tych często dokonujemy w oparciu o czynniki pozamatematyczne (np. biorąc pod uwagę ruch Ziemi czy ludzką anatomię).

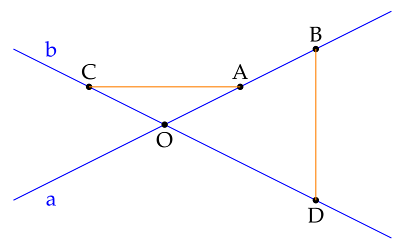


Dla przykładu, rysując linię prostą możemy to robić „od lewej do prawej" i w ten sposób ustalamy „kierunek prostej". Jest to zjawisko na tyle powszechne, że prostą tą nazywamy osią i bardzo często po prawej stronie osi rysujemy strzałkę. Po prawej stronie od zera umieszczamy na prostej liczby dodatnie, ale jest to zupełnie umowne działanie, bez czysto matematycznego uzasadnienia. Podobnie mówimy o kierunkach „w górę" i „w dół" w odniesieniu do kierunku wertykalnego, mając na przykład na myśli oś liczbową na płaszczyźnie.

Ustalając orientację na płaszczyźnie mówimy o kierunku zgodnym lub przeciwnym ze wskazówkami zegara ustalamy tak naprawdę kolejność wektorów obranej bazy.



Bez pojęcia leżenia po określonej stronie nie sposób sformułować poprawnie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, co pokazuje poniższy przykład:



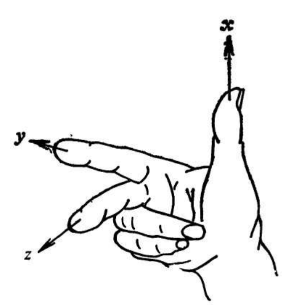
Jeśli przyjmiemy $OA = OC = 1$ oraz $OB = OD = 2$, to proste AC oraz BD nie są równoległe, a jednak

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{2}.$$

Konieczne jest założenie, że kolejności punktów O, A, B oraz O, C, D są takie same. Można ten problem rozwiązać także poprzez wektorowe sformułowanie.

Jeśli płaszczyzna zorientowana jest zgodnie z bazą standardową, wówczas mówimy o orientacji przeciwnej do wskazówek zegara. Szereg innych pojęć matematycznych można określać w oparciu o orientację, na przykład „leżenie po stronie" prostej czy płaszczyzny (w przestrzeni). Jest to jednak pojęcie delikatne, w zależności od rozważanego obiektu, ale przydatne choćby w geometrii elementarnej.

Szczególnie ważna jest znana z fizyki intepretacja wyboru orientacji w oparciu o układ palców prawej ręki (a która to ręka?), gdzie mówimy o orientacji prawoskrętnej w oparciu o bazę utworzoną przez kierunki kciuka, palca wskazującego oraz środkowego. Również w przestrzeni czterowymiarowej można w sposób naiwny mówić o orientacji, choćby powołując się na interpretację czwartego wymiaru jako czasu. W ten sposób możemy mówić, że jakieś wydarzenia były wcześniej lub później niż inne. Sprawa jest oczywiście dalece bardziej skomplikowana.



Po ustaleniu orientacji w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\rangle)$ możemy mówić o zorientowanej mierze n-wymiarowej. Po prostu mówimy, że objętość równoległościanu rozpiętego na bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ równa jest $\pm\sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$, przy czym znak przed pierwiastkiem zależy od tego, czy baza $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest dodatnio, czy ujemnie zorientowana.

Możliwość rozważania przestrzeni o zadanej (przez pewną bazę) orientacji jest istotną pomocą w rozmaitych rozważaniach geometrycznych, między innymi w czekających nas klasyfikacjach izometrii. Pojęcie orientacji nie wymaga, jak widzieliśmy, wprowadzania iloczynu skalarnego (mówimy też o orientowalności innych zbiorów, o czym wspominam w dodatku), ale ich wspólne stosowanie jest bardzo wygodne.

Aby zilustrować to zjawisko wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie, istotne z punktu widzenia rachunkowego i dla wielu zastosowań. Mówi ono o tym, że wybór iloczynu skalarnego i orientacji w n-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ pozwala podać geometryczną metodę dopełniania liniowo niezależnego układu $n-1$ wektorów z V do dodatnio zorientowanej bazy V.

Definicja ta ma również ważne motywacje fizyczne; wiele momentów fizycznych za pomocą iloczynu wektorowego definiuje się moment siły lub moment pędu. Jest ono szczególnie przydatne w geometrii rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej, stanowiąc swego rodzaju namiastkę „operacji mnożenia wektorów".

Definicja 62. *Niech $(V, \langle,\rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową liniową, zorientowaną (przez pewną bazę). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ będzie układem wektorów przestrzeni V.* ILOCZYNEM WEKTOROWYM *układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ nazywamy wektor β, oznaczany dalej: $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_{n-1}$ taki, że:*

(i) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo zależny, to $\beta = 0$,

(ii) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo niezależny, to:

- $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^\perp$,
- $\|\beta\| = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}$,
- *baza $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ jest dodatnio zorientowana.*

Przykład. W $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle)$ mamy orientację wyznaczoną przez (przeciwnie zorientowaną do st) bazę:

$$((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)).$$

Niech $\alpha_1 = (1,0,2)$ oraz $\alpha_2 = (3,2,1)$. Wówczas:

- $\operatorname{lin}((1,0,2),(3,2,1))^\perp = \operatorname{lin}((4,-5,-2))$.
- $\sqrt{W(\alpha_1, \alpha_2)} = \sqrt{45}$.

Wektor $(4,-5,-2)$ jest prostopadły do α_1, α_2, ma długość $\sqrt{45}$ i baza

$$\alpha_1, \alpha_2, (4,-5,-2)$$

jest przeciwnie zorientowana z bazą standardową, a więc zgodna z wybraną orientacją. Mamy więc:

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = (4,-5,-2).$$

Fakt 84. *Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi*

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Dowód. Niech γ będzie wektorem zdefiniowanym w tezie naszej obserwacji (po prawej stronie ostatniej równości). Mamy

$$\langle \alpha, \gamma \rangle = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Analogicznie $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Stąd $\gamma \in \operatorname{lin}(\alpha, \beta)^{\perp}$. Mamy dalej:

$$\begin{aligned} \|\gamma\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, \beta \rangle - \langle \alpha, \beta \rangle^2 = W(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Gdy α, β są liniowo niezależne, to dla $\mathcal{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$ oraz $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

co po rozwinięciu względem trzeciej kolumny daje:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0,$$

bo inaczej $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ będą liniowo zależne. Zatem układ α, β, γ tworzy bazę dodatnio zorientowaną (zorientowaną zgodnie z bazą $\beta_1, \beta_2, \beta_3$). Stąd $\alpha \times \beta$ jest równy γ.

Kwestia wyznaczania iloczynu wektorowego w przestrzeni trójwymiarowej ma naprawdę daleko idące konwekwencje. Uznał to nawet świat finansów, umieszczając swego czasu słynną regułę prawej ręki na banknocie dwustufrankowym.

Warto odnotować następujący wniosek dotyczący równoległościanu 2-wymiarowego rozpiętego przez układ dwóch wektorów u, v w przestrzeni trójwymiarowej. W tym przypadku długość wektora $u \times v$ to po prostu pierwiastek z wyznacznika macierzy

$$\begin{bmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{bmatrix},$$

czyli $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$. A zatem dostaliśmy następującą równość:

$$\|u\|^2 \|v\|^2 = \langle u, v \rangle^2 + \|u \times v\|^2.$$

Czy widzą Państwo, że wzór ten można interpretować jako znaną nam ze szkoły jedynkę trygonometryczną?

Zachęcam Czytelnika, by wykazał jeszcze następującą obserwację (korzystając z faktów z tego wykładu).

Fakt 85. *Jeśli $\alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3), \gamma = (c_1, c_2, c_3)$ są wektorami w $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_{st})$. to miara 3-wymiarowa równoległościanu $R(\alpha, \beta, \gamma)$ równa jest*

$$|\langle \alpha \times \beta, \gamma \rangle| = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Więcej zastosowań stricte geometrycznych iloczynu wektorowego poznamy podczas zajmowania się przestrzeniami afinicznymi.

Iloczyn wektorowy posiada także szereg ciekawych własności algebraicznych, które warto omówić na ćwiczeniach lub sprawdzić samodzielnie.

Fakt 86. *Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy:*

- $u \times v = -v \times u$,
- $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.
- $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

Inne zastosowania iloczynu wektorowego poznamy w geometrii afinicznej, zwłaszcza związanej z przestrzenią $\mathbb{R}^3$. W tym miejscu kończymy wstępny przegląd pojęć związanych ze strukturą euklidesową. Na kolejnym wykładzie przyjrzymy się jej ponownie z perspektywy przestrzeni afinicznych, szczególnie rozważając pojęcie odległości punktów.

Uzupełnienie. Równoległościany w przestrzeniach afinicznych

Do przestrzeni afinicznych przejdziemy na kolejnym wykładzie, ale dla pełnego obrazu rezultatów podanych na wykładzie zastosujemy tu jeden wyjątek i powiemy (podobnie jak na wykładzie) o odpowiednikach rozważanych wyżej faktów w przestrzeni afinicznej H z przestrzenią styczną $T(H)$ oraz zadaną na niej strukturą przestrzeni euklidesowej.

Definicja 63. *Niech H będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. Podzbiór $R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subset H$ postaci*

$$\{p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \mid a_1, \ldots, a_k \in [0,1]\}$$

gdzie $p_0 \in H$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne w $T(H)$ nazywamy K-WYMIAROWYM RÓWNOLEGŁOŚCIANEM *w H* ROZPIĘTYM NA WEKTORACH $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ZACZEPIONYCH W PUNKCIE p_0.

Wprowadzamy szczególne nazewnictwo dla równoległościanów w przestrzeniach niskich wymiarów.

- Równoległościan $R(p_0; \alpha)$ nazywamy ODCINKIEM o końcach w punktach $p_0, p_0 + \alpha$.
- Równoległościan $R(p_0; \alpha, \beta)$ nazywamy RÓWNOLEGŁOBOKIEM.

Definicja 64. *Niech $R = R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie k-wymiarowym równoległościanem w afinicznej przestrzeni euklidesowej. Przez $\mu_l(R)$ określać będzie liczbę rzeczywistą zwaną* L-WYMIAROWĄ MIARĄ) *(albo l-wymiarową objętością) równoległościanu R, przy czym*

$$\mu_k(R) = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

Ponadto przyjmujemy $\mu_l(R) = 0$, dla $l > k$ oraz $\mu_l(R) = \infty$, dla $l < k$.

Jednowymiarową miarę nazywamy długością odcinka, dwuwymiarową – polem, a trójwymiarową – objętością.

W dodatku do kolejnego wykładu opowiemy nieco o objętościach innych podzbiorów przestrzeni afinicznej. Pretekstem będzie pojęcie sympleksu i „wzór" na miarę k-wymiarową tego obiektu.

Kluczowy jest analog twierdzenia o zachowywaniu objętości przy przekształceniach afinicznych. Jego dowód jest łatwym przeformułowaniem argumentu z wykładu.

Fakt 87. *Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni euklidesowej afinicznej $(V, \langle , \rangle)$ w siebie. Dla dowolnego układu bazowego $(p_0; \mathcal{A}) = (p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ w V zachodzi równość:*

$$\mu_n(R(f(p_0); f'(\alpha_1), \ldots, f'(\alpha_n))) = |\det(f')| \cdot \mu_n(R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Przykład. Bierzemy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$f(x, y) = (2x + y - 1, y).$$

Równoległobok $R((1,1); (2,0), (0,1))$ przechodzi na $R((2,1); (4,0), (1,1))$, a jego pole zmienia się z 2 na 4, zgodnie z modułem wyznacznika pochodnej przekształcenia f.

Dodatek. Orientowalność i transformacje ciągłe

Badanie macierzy nie ogranicza się jedynie do algebry liniowej. W dalszych etapach studiów poznacie Państwo także ich „grupową" i „pierścieniową" naturę. Tak się składa, że podejście „grupowe" pojawiło się na naszym wykładzie. Warto więc dodać kilka komentarzy.

Definicja 65. *Niech K będzie ciałem oraz niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przez $GL(n, K)$ oznaczamy podzbiór $M_n(K)$ złożony z macierzy odwracalnych.*

Oznaczenie wprowadzone wyżej nie pojawia się na kursie, bowiem macierze $GL(n, K)$ nie tworzą podprzestrzeni. Tworzą one jednak grupę ze względu na mnożenie, co oznacza, że

- złożenie macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną,
- każda macierz z $GL(n, K)$ ma macierz odwrotną,
- macierz $I \in GL(n, K)$ ma tę własność, że $AI = IA = A$, czyli jest to element neutralny mnożenia w grupie $GL(n, K)$.

Zauważmy jeszcze, że zbiór $GL(n, K)$ utożsamić można ze zbiorem izomorfizmów przestrzeni K^n.

W kontekście naszych geometrycznych rozważań, a więc w kontekście przestrzeni nad $\mathbb{R}$, warto wyróżnić macierze odwracalne o dodatnim wyznaczniku i macierze o ujemnym wyznaczniku. Pierwsze oznaczamy przez $GL_+(n, \mathbb{R})$, a drugie przez $GL_-(n, \mathbb{R})$. Mamy:

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL_+(n, \mathbb{R}) \cup GL_-(n, \mathbb{R}).$$

Kluczowe obserwacje to algebraiczne sformułowania obserwacji poczynionych w trakcie wykładu:

- Iloczyn dowolnych macierzy o dodatnim wyznaczniku jest kolejną macierzą o dodatnim wyznaczniku. Również odwrotność macierzy z $GL_+(n, \mathbb{R})$ należy do tego zbioru. Jest w nim również I, co oznacza, że $GL_+(n, \mathbb{R})$ jest tak zwaną podgrupą $GL(n, \mathbb{R})$.
- Iloczyn macierzy z $GL_+(n, \mathbb{R})$ oraz $GL_-(n, \mathbb{R})$ należy do $GL_-(n, \mathbb{R})$.
- Iloczyn macierzy z $GL_-(n, \mathbb{R})$ to macierz z $GL_+(n, \mathbb{R})$.

Te obserwacje łączą się w jeden wniosek. Istnieje funkcja

$$f : GL(n, \mathbb{R}) \to \{-1, 1\},$$

która spełnia następujący warunek:

$$f(AB) = f(A)f(B).$$

Funkcje spełniające równość obok nazywamy homomorfizmami grup. Zbiór $\{-1, 1\}$ z naturalną definicją mnożenia jest grupą.

Dlaczego to jest takie ważne? Ta dwuelementowa grupa $\{-1, 1\}$ reprezentuje dwie różne orientacje, jakie mogą pojawić się w przestrzeni euklidesowej. Gdyby miał istnieć jakiś inny sposób definicji orientacji, to mimo wszystko oczekiwalibyśmy, że relacja baz wspólnie zorientowanych będzie relacją równoważności oraz, że będzie miała jakiś związek z mnożeniem macierzy. Nawet więcej – chcielibyśmy, aby klasy równoważności relacji wspólnego zorientowania tworzyły grupę.

To nie są argumenty brzmiące bardzo precyzyjnie, ale można powiedzieć jedno: nie da się wprowadzić nietrywialnej (nie jednoelementowej) orientacji w oparciu o homomorfizm z $GL(n, \mathbb{R})$ do pewnej skończonej grupy innej niż $\{-1, 1\}$. Dowiecie się Państwo tego na Algebrze I. Można jednak nieco zamarkować intuicje, odwołując się do niezwykle istotnego pojęcia – tzw. `drogi`.

Definicja 66. *Niech $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ będą odwracalne. Przyporządkowanie: $f : [0, 1] \to M_n(K)$ nazwiemy* DROGĄ NIEOSOBLIWĄ *w $M_n(\mathbb{R})$ łączącą A, B, jeśli*

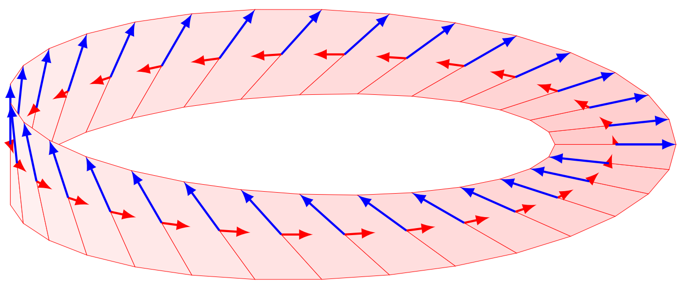
- $f(0) = A, f(1) = B$,
- *dla $t \in [0, 1]$ macierz $f(t)$ jest odwracalna,*
- *jeśli $f(t) = [a_{ij}(t)]$, to funkcje $t \mapsto a_{ij}(t)$ są ciągłe.*

Przykład. Funkcja
$$[0, 1] \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1+t & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
jest drogą nieosobliwą łączącą
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Zachodzi następujące twierdzenie.

Fakt 88. *Baza $(A_1, \ldots, A_n)$ jest zorientowana zgodnie z bazą standardową $(E_1, \ldots, E_n)$ (w $\mathbb{R}^n$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieosobliwa droga pomiędzy macierzami $[A_1, \ldots, A_n]$ oraz $[E_1, \ldots, E_n]$,*

A zatem widzimy, że zgodność orientacji dwóch baz ma charakter wybitnie geometryczny. Dowód tego wyniku znaleźć można na przykład w skrypcie prof. Chabera i Pola w punkcie 14.3. Rozumowanie wymaga zastosowania macierzy ortogonalnych, o których dowiemy się za kilka wykładów. Warto odnotować, że w matematyce mówi się również o orientowalności rozmaitych obiektów, nie mających struktury przestrzeni liniowej. Jest to związane z pojęciem przestrzeni stycznej, które stosować można np. dla powierzchni lub rozmaitości gładkich.

W myśl takiego podejścia obiekt jest orientowalny jeśli można na zbiorze przestrzeni stycznych do wszystkich jego punktów wprowadzić orientacje, które będzie można w sposób ciągły deformować. Rozróżnienie kiedy powierzchnia jest orientowalna, a kiedy nie, będzie jednym z tematów, który rozważać będziecie Państwo w dalszych studiach.



Przykład powierzchni nieorientowalnej – wstęgi Möbiusa.
Czy Czytelnik widzi jaki jest związek z zacytowanym wynikiem?
Źródło: materiały prof. Jarosława Wiśniewskiego.

Z orientowalnością wiąże się wiele ważnych tematów. Oto prosty przykład: na płaszczyźnie litera L oraz jej symetryczne odwrócenie można traktować jako obiekty różne, bo nie można ich nałożyć na siebie (za pomocą izometrii) bez wyjścia poza płaszczyznę (dlaczego?).

Serdecznie polecam wydaną w Polsce XIX-wieczną klasykę popularyzacji matematyki: *Flatlandia, czyli Kraina Płaszczaków* autorstwa Edwina Abbotta.

Dla Płaszczaka – mieszkańca Flatlandii – niemogącego wyobrazić sobie ruchu w trzech wymiarach – powyższe obiekty mogą wydawać się być różnych kształtów. Jedną może nazwać lewą L, a drugą – prawą. Jeśli jednak znałby przestrzeń trójwymiarową i mógł w niej umieścić obydwie te figury – byłby w stanie za pomocą obrotu zamienić jedną w drugą. Dla mieszkańca Flatlandii byłby to szok – z jego punktu widzenia figura zmieniłaby kształt.

Podobnie jest z rozróżnianiem lewej ręki od prawej – status lewej i prawej ręki w przestrzeni trójwymiarowej jest identyczny, jak owych liter w przykładzie wyżej. Poprzez odpowiednie przekształcenie w przestrzeni czterowymiarowej możemy nałożyć rękę lewą na prawą. Może to budzić pewne zdziwienie. Jak sobie wyobrazić taki ruch?

We Flatlandii nie jest możliwe przesunięcie dwóch płaskich odwróconych plecami L tak, by dostać jedną literę. Ale jest to możliwe na dwuwymiarowej, nieorientowalnej powierzchni – wstędze Möbiusa (patrz rysunek wyżej). Jest ona niezanurzalna w liniowej przestrzeni dwuwymiarowej (i dowód tego też Państwo poznacie).

Trivia. Nieprzystające odpowiedniki

Problemy związane z orientacją rozważane są także w filozofii. W pracy *O naczelnej podstawie różnicy kierunków w przestrzeni* z 1768 roku Immanuel Kant rozważa niezwykle ważny dla swojej filozofii argument dotyczący tzw. nieprzystających odpowiedników. Oto cytat z tej pracy.

Na podstawie artykułów: Kobiela F.: *Struktura i geneza świata w filozofii przedkrytycznej* I. Kanta, Diametros, no. 7, str. 2-36 (do znalezienia) oraz van Cleve J.: *Right, Left and the Fourth Dimension*, The Philosophical Review 96 (1987), str. 33-68.

> Lewoskrętnie nagwintowana śruba nigdy nie będzie pasowała do takiej nakrętki, której gwint biegnie odwrotnie, nawet wówczas, gdyby były one ze sobą w równym stopniu zgodne zarówno pod względem grubości trzpienia śruby, jak i skoku gwintu. Trójkąt sferyczny może być równy innemu oraz całkowicie do niego podobny, jednakże nie będzie z nim nigdy pokrywał. Lecz najpospolitszym, a zarazem najjaśniejszym przykładem są kończyny ludzkiego ciała, które ułożone są symetrycznie wokół pionowej płaszczyzny dzielącej nasze ciało na dwie równe części. Prawa ręka jest równa lewej i podobna do niej i jeśli patrzy się tylko na jedną z nich – [oceniając] proporcje i wzajemne ułożenie części oraz wielkość całości – to wyczerpujący opis jednej musi we wszystkich fragmentach dotyczyć także drugiej. Ciało równe innemu i całkowicie do niego podobne, jednakże nie dające się zamknąć dokładnie w tych samych granicach, nazywam jego nieprzystającym odpowiednikiem.

Dla Kanta wprowadzone pojęcie było potrzebne do rozważania problemu istnienia `pierwotnej` czy `absolutnej` przestrzeni, dzięki której możliwa by była relacja pomiędzy przedmiotami, także nieprzystającymi odpowiednikami.

> „jeśli wyobrazimy sobie, że pierwszą częścią stworzenia powinna być właśnie ludzka ręka, to z konieczności będzie to albo prawa, albo lewa, a w celu powołania do istnienia jednej z nich konieczne jest inne działanie przyczyny stwórczej, aniżeli to za pomocą którego mógł zostać stworzony jej odpowiednik. Jeżeli więc zgodzimy się z pojęciem wielu nowszych filozofów, zwłaszcza zaś niemieckich, [głoszących] iż przestrzeń polega jedynie na zewnętrznej relacji między istniejącymi obok siebie częściami materii, to wszelka rzeczywista przestrzeń we wprowadzonym [wyżej] przypadku byłaby jedynie tą, którą dłoń ta ogarnie. Ponieważ jednak [między dłońmi] nie istnieje absolutnie żadna różnica co do relacji części między sobą, to może to być dłoń prawa lub lewa, a zatem byłaby ona, ze względu na tę właściwość, zupełnie nieokreślona – tj. pasowałaby do każdej części ludzkiego ciała, co jest niemożliwe. Stąd jasnym jest, iż to nie określenia przestrzeni są następstwami wzajemnego ułożenia części materii, lecz odwrotnie, a także to, iż w budowie ciała napotkać można różnice i to najzupełniej prawdziwe, która odnoszą się jedynie do absolutnej oraz pierwotnej przestrzeni, ponieważ tylko dzięki niej możliwa jest relacja pomiędzy przedmiotami cielesnymi.

Kant wpisuje się tu w dyskusje Leibniza i Clarke'a na temat teorii substancjalistycznej – czymkolwiek są te teorie, możemy z nich wyczytać istotne zainteresowanie związkiem orientacji i rozróżniania obiektów oraz dostrzeganie ich uniwersalnego znaczenia w opisie rzeczywistości.