Rzut prostopadły i ortogonalizacja

Na poprzednim wykładzie wprowadziliśmy pojęcie prostopadłości pary wektorów, a także pojęcie dopełnienia ortogonalnego. W kontekście przestrzeni euklidesowych pojęcia te mają szczególnie przejrzysty opis. Wykazaliśmy, że każda taka przestrzeń posiada bazę prostopadłą oraz pokazaliśmy, dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni euklidesowej V ma miejsce rozkład $V = W \oplus W^{\perp}$. Dziś kontynuujemy te rozważania, przyglądając się szczególnie rozmaitym skutkom następującego faktu.

Fakt 68. *Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą prostopadłą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\rangle)$. Wówczas dla każdego wektora $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in V$ jego współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ wynoszą:*

$$a_1 = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle\, \alpha_1, \alpha_1 \rangle}, \quad a_2 = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_2 \rangle}{\langle\, \alpha_2, \alpha_2 \rangle}, \quad \ldots \quad , a_n = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_n \rangle}{\langle\, \alpha_n, \alpha_n \rangle}.$$

Dowód. Dla każdego $i = 1, \ldots, n$ mamy:

$$\begin{aligned}\langle\, \alpha, \alpha_i \rangle &= \langle\, a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = \\ &= a_1\langle\, \alpha_1, \alpha_i \rangle + \ldots + a_i\langle\, \alpha_i, \alpha_i \rangle + \ldots + a_n\langle\, \alpha_n, \alpha_i \rangle = a_i\langle\, \alpha_i, \alpha_i \rangle.\end{aligned}$$

Stąd $a_i = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle\, \alpha_i, \alpha_i \rangle}$. □

Współczynniki występujące w powyższym rozkładzie pojawiły się już kilkukrotnie w dowodach twierdzeń na poprzednim wykładzie. Mianowicie stwierdziliśmy, że:

- jeśli α jest niezerowym wektorem w przestrzeni liniowej V oraz $\beta \in V$, to mamy rozkład, w którym drugi składnik należy do $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$:

$$\beta = \frac{\langle\, \beta, \alpha \rangle}{\langle\, \alpha, \alpha \rangle} \cdot \alpha + \left(\beta - \frac{\langle\, \beta, \alpha \rangle}{\langle\, \alpha, \alpha \rangle} \cdot \alpha\right),$$

- jeśli $0 \neq W$ jest podprzestrzenią V o bazie $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, to dla dowolnego $\beta \in V$ mamy rozkład, w którym drugi składnik należy do $W^{\perp}$

$$\beta = \left(\frac{\langle\, \beta, \alpha_1 \rangle}{\langle\, \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \cdot \alpha_1 + \ldots + \frac{\langle\, \beta, \alpha_k \rangle}{\langle\, \alpha_k, \alpha_k \rangle} \cdot \alpha_k\right) + \left(\beta - \frac{\langle\, \beta, \alpha_1 \rangle}{\langle\, \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \cdot \alpha_1 - \ldots - \frac{\langle\, \beta, \alpha_k \rangle}{\langle\, \alpha_k, \alpha_k \rangle} \cdot \alpha_k\right).$$

Powyższe rozważania prowadzą do następującej definicji.

Fakt 69. *Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\rangle)$, niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie bazą prostopadłą przestrzeni W oraz niech $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ niech będzie bazą prostopadłą przestrzeni $W^\perp$. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in V$:*

- *rzut prostopadły $\phi(\alpha)$ wektora α na W wynosi:*

$$\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i,$$

- *symetria prostopadła $\psi(\alpha)$ wektora α względem W wynosi:*

$$\psi(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle \alpha, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \alpha_j.$$

Rzut prostopadły ma interpretację geometryczną dotyczącą szacowania norm.

Fakt 70. *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V oraz niech $v \in V$ rozkłada się (jednoznacznie) na sumę $v' + v''$, gdzie $v' \in W$ oraz $v'' \in W^\perp$. Wówczas*

$$\|v - v'\| = \min_{w \in W} \|v - w\|.$$

Dowód. Dowód wynika z definicji normy i twierdzenia Pitagorasa. Dla każdego $w \in W$ mamy:

$$\begin{aligned}\|v - v'\|^2 &\leq \|v - v'\|^2 + \|v' - w\|^2 \\ &= \|(v - v') + (v' - w)\|^2 = \|v - w\|^2.\end{aligned}$$

□

Definicja 54. *Niech $(V, \langle\,,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową i niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią. Przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ będące rzutem na W wzdłuż $W^\perp$ nazywamy* RZUTEM PROSTOPADŁYM *na W. Przekształcenie liniowe $\psi : V \to V$ będące symetrią względem W wzdłuż $W^\perp$ nazywamy* SYMETRIĄ PROSTOPADŁĄ *względem W.*

Definicja 55. *Mówimy, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\rangle)$ jest* PROSTOPADŁY UNORMOWANY *(albo* ORTONORMALNY*), jesli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest układem prostopadłym oraz $\|\alpha_i\| = 1$, dla każdego $i = 1, \ldots, n$. Układ prostopadły unormowany będący bazą przestrzeni V nazywamy* BAZĄ ORTONORMALNĄ *przestrzeni $(V, \langle\,,\rangle)$.*

Przykłady.

- Baza standardowa w $\mathbb{R}^n$ jest bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\rangle_{st})$.
- Poniższy układ jest bazą ortonormalną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_{st})$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}. \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}. -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Fakt 71. *Każda przestrzeń euklidesowa $(V, \langle\,,\rangle)$ ma bazę ortonormalną.*

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą prostopadłą przestrzeni $(V, \langle\,,\rangle)$. Wówczas układ $\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{\|\alpha_n\|}\alpha_n$ jest w sposób oczywisty ortonormalny, bo z definicji iloczynu skalarnego mamy $\|a\alpha\| = |a| \cdot \|\alpha\|$, dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in V$. □

Dysponując bazami ortonormalnymi wiele rozważanych wcześniej wzorów i rozumowań jest czytelniejszych, bo nie ma konieczności wpisywania do mianowników wyrażeń typu $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$. I tak wzory na współrzędne wektora α w bazie ortonormalnej $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to po prostu

$$\langle \alpha, \alpha_1 \rangle, \ldots, \langle \alpha, \alpha_n \rangle.$$

Wynikają stąd również bardziej przejrzyste wzory na rzut i symetrię prostopadłą. Proszę je wypisać. Przykłady będziecie Państwo oglądać w ramach ćwiczeń.

Bazę prostopadłą przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,,\rangle)$ można też otrzymać przez odpowiednią modyfikację dowolnej bazy zadanej przestrzeni V. Metoda ta nazywa się ortogonalizacją Grama-Schmidta. Geometrycznie polega ona na zastąpieniu bazy $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ bazą $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, w której dla $i = 2, \ldots, n$ wektor α_i jest rzutem prostopadłym wektora γ_i na podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1})^\perp$.

Fakt 72 (Ortogonalizacja Grama-Schmidta)**.** *Jeśli $(V, \langle\,,\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ jest bazą przestrzeni V, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zadany indukcyjnie wzorami $\alpha_1 = \gamma_1$ oraz dla $j > 1$:*

$$\alpha_j = \gamma_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i$$

jest bazą prostopadłą przestrzeni V. Ponadto dla każdego $j = 1, \ldots, n$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_j).$$

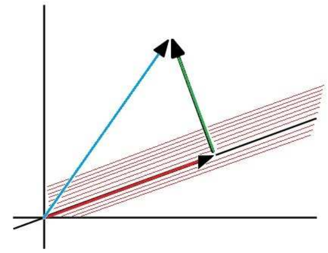
Dowód. Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że wykazaliśmy twierdzenie dla $n - 1$ i dowodzimy dla n. Niech $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego wzory określone w tezie określają bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ przestrzeni W. Stąd mamy rozkład wektora γ_n na sumę wektorów z W oraz $W^\perp$, której składnikami są

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W \quad \text{oraz} \quad \gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W^\perp.$$

Drugi z tych wektorów jest niezerowy, bo $\gamma_n \notin \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (tu wykorzystujemy ponownie założenie indukcyjne, tym razem wobec do drugiej części tezy). A zatem układ:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i$$

składa się z n niezerowych wektorów. Jest to więc baza prostopadła V. $\square$

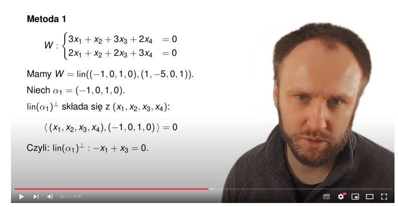


Bardzo istotne jest założenie

$$V_s = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s),$$

które mówi, że w $s+1$-wszym kroku algorytmu, gdy udało nam się już zamienić bazę $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ przestrzeni V_s na bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ – rzutujemy γ_{s+1} na $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)^\perp$ i w ten sposób dostajemy α_{s+1}, uzupełniający $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ do bazy prostopadłej V_{s+1}.

Przy okazji, można obejrzeć:



https://youtu.be/sh0Ck6nQFGE.

Przykład. Rozważmy $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_{st})$ z bazą $\gamma_1 = (1,-1,1)$, $\gamma_2 = (1,0,1)$, $\gamma_3 = (1,1,2)$. Zaprezentujmy algorytm ortogonalizacji.

$$\alpha_1 = (1,-1,1), \quad \alpha_2 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,0),(1,-1,1) \rangle}{\langle (1,-1,1),(1,-1,1) \rangle}(1,-1,1) = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}),$$

$$\alpha_3 = (1,1,2) - \frac{\langle (1,1,2),(1,-1,1) \rangle}{\langle (1,-1,1),(1,-1,1) \rangle}(1,-1,1) - \frac{\langle (1,1,2),(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \rangle}{\langle (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}) \rangle}(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = (\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}).$$

Dostaliśmy bazę prostopadłą $(1,-1,1),(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$.

Odnotujmy istotny wniosek.

Fakt 73. *Niech* $(V, \langle , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas każdy układ prostopadły (odp. ortonormalny) dopełnić można do bazy prostopadłej przestrzeni* V*.*

Dowód. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym w V. Na mocy tw. Steinitza możemy dopełnić ten układ do bazy V wektorami $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$. Stosujemy proces ortogonalizacji do rozszerzonego przez nas układu $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ i uzyskujemy bazę prostopadłą $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$. Rzeczywiście, w pierwszych k krokach dostaniemy po prostu układ prostopadły $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. □

A co się w zasadzie dzieje, gdy próbujemy wykonać proces ortogonalizacji na układzie liniowo zależnym? Otóż stanie się to, że w trakcie procesu dostaniemy wektor zerowy. Innymi słowy, proces ortogonalizacji można stosować do rozpoznawania układów liniowo zależnych. Proszę to sprawdzić na układzie wektorów w $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle_{st})$:

$$\gamma_1 = (1, -1, 1, -1)$$
$$\gamma_2 = (1, 1, 3, -1)$$
$$\gamma_3 = (-3, 7, 1, 3)$$

Pozostałą część wykładu poświęcimy nieobowiązkowemu, ale ważnemu komentarzowi do teorii endomorfizmów, której poświęciliśmy pierwszą część semestru. Przypomnijmy, że macierz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ nazywamy górnotrójkątną, jeśli $a_{ij} = 0$, dla $i < j$. Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Jednym z rozważanych przez nas problemów było pytanie czy istnieje baza V, w której ϕ ma macierz górnotrójkątną? O takiej sytuacji mówimy, że ϕ jest triangularyzowalny. W ramach teorii endomorfizmów wiemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym jego triangularyzowalności jest to, by wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ rozkładał się na czynniki liniowe.

Fakt 74. *Niech* $(V, \langle , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową oraz niech* $\phi \in \mathrm{End}(V)$ *będzie triangularyzowalny. Wówczas istnieje baza prostopadła przestrzeni* V*, w której macierz* ϕ *jest górnotrójkątna.*

Dowód. Niech $\mathcal{A} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ będzie bazą taką, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna. Wiemy, że dla każdego $1 \leq j \leq n$ przestrzeń $\mathrm{lin}(\gamma_1, \dots, \gamma_j)$ jest ϕ-niezmiennicza. Stosując procedurę Grama-Schmidta dostajemy bazę prostopadłą $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ przestrzeni V taką, że $\mathrm{lin}(\gamma_1, \dots, \gamma_j) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$. A zatem $\mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ jest również ϕ-niezmiennicza, dla każdego j. To oznacza, że ϕ ma w bazie $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ macierz górnotrójkątną. □

Uwaga: zauważmy, że powyższy fakt nie stosuje się koniecznie do macierzy diagonalizowalnych. Czy Czytelnik potrafi pokazać odpowiedni przykład? Kwestię diagonalizowalności pewnych endomorfizmów przestrzeni euklidesowych poruszymy później.

Innym ładnym wnioskiem jest następujący rezultat, mający bardzo wiele zastosowań, między innymi w obliczeniach numerycznych: przy szacowaniu wartości własnych, rozwiązywaniu układów równań, stosowaniu metody najmniejszych kwadratów itd.

Fakt 75 (Twierdzenie rozkładzie QR)**.** *Niech* $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$*. Wówczas istnieje macierz odwracalna* Q*, której kolumny tworzą bazę ortogonalną oraz macierz górnotrójkątna* R *takie, że* $A = QR$*.*

Wskazówka do dowodu: załóżmy, że macierz ma wiersze $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$. Zamieniamy wektor γ_{k+1} zgodnie z procedurą Grama-Schmidta. Jak to przetłumaczyć na mnożenie macierzy?