Bazy prostopadłe i dopełnienie ortogonalne

Badanie iloczynów skalarnych na przestrzeniach liniowych jest ciekawe, ponieważ wśród układów liniowo niezależnych szczególne miejsce mają układy wektorów, które nazwiemy prostopadłymi lub ortogonalnymi. Bazy złożone z takich układów są kluczem do całej dalszej teorii.

Definicja 51. *Niech* $\langle\,,\rangle$ *będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni* V. *Mówimy, że wektory* $\alpha, \beta \in V$ *są* PROSTOPADŁE, *ozn.* $\alpha \perp \beta$, *jeśli* $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. *Dla podzbioru* $X \subseteq V$ *definiujemy jego* DOPEŁNIENIE ORTOGONALNE

$$X^{\perp} = \{\alpha \in V : \alpha \perp \beta, \ \textit{dla każdego } \beta \in X\}.$$

Widzimy zatem, że różnym iloczynom skalarnym odpowiadają różne pojęcia prostopadłości. Wektory bazy standardowej $(1,0,0), (0,1,0)$ są prostopadłe przy standardowym iloczynie skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^3$, ale $\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 2$, gdzie $\langle\,,\rangle$ jest określony wzorem $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2 + 4x_3y_3$.

Łatwo widzieć, że dla każdego podzbioru $X \subseteq V$ zbiór $X^{\perp}$ jest podprzestrzenią V. Rzeczywiście, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in X^{\perp}$ oraz dla dowolnego $x \in X$ mamy:

$$\langle x, a\alpha + b\beta \rangle = a\langle x, \alpha \rangle + b\langle x, \beta \rangle = 0.$$

Odnotujmy też, że wyznaczanie podprzestrzeni $X^{\perp}$ ma wiele wspólnego z rozwiązywaniem układów równań liniowych. Jeśli na przykład $X = \{(1,1,2), (1,2,0)\}$ i szukamy w $\mathbb{R}^3$ zbioru $X^{\perp}$ przy standardowym iloczynie skalarnym, to każdy wektor (x_1, x_2, x_3) należący do tego zbioru spełniać musi układ równań:

$$\begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3), (1,1,2) \rangle & = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3), (1,2,0) \rangle & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_2 & = 0 \end{cases}.$$

Definicja 52. *Niech* V *będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym* $\langle\,,\rangle$. *Układ wektorów* $X \subseteq V$ *nazwiemy* PROSTOPADŁYM *(albo* ORTOGONALNYM*), jeśli* $\alpha \perp \beta$, *dla każdych* $\alpha, \beta \in X$. *Układ prostopadły będący bazą przestrzeni* V *nazywamy* BAZĄ PROSTOPADŁĄ *(albo ortogonalną) przestrzeni* V *względem* $\langle\,,\rangle$.

Zobaczmy kilka przykładów.

- Jeśli $\langle\, , \rangle_{st}$ jest standardowym iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to baza standardowa tej przestrzeni jest bazą prostopadłą.
- Układ $(1,1,2), (2,2,-2), (1,-1,0)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.
- Niech $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$. Na przestrzeni V rozważyć możemy ograniczenie standardowego iloczynu skalarnego z przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wówczas układ $(0,1,1), (4,-1,1)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni $(V, \langle\, , \rangle|_V)$.
- Funkcja $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2 + 4x_3y_3$ jest, jak już wiemy, iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$. Układ $(1,0,0)$, $(2,-1,0)$, $(0,0,1)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z tym iloczynem skalarnym.

Jeśli $\langle\, , \rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V oraz $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to ograniczenie $\langle\, , \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\langle w_1, w_2 \rangle|_W = \langle w_1, w_2 \rangle$$

jest iloczynem skalarnym na W.

Układy i bazy prostopadłe można teoretycznie rozważać zarówno w przestrzeniach skończonego, jak i nieskończonego wymiaru, ale tylko pierwsza z możliwości daje ciekawe matematycznie wyniki. W przestrzeniach nieskończonego wymiaru problem istnienia bazy ortogonalnej nie jest taki prosty, jak się wydaje. Rozważmy przykład:

W analizie funkcjonalnej wprowadza się pojęcie bazy ortogonalnej, ale nie jest to *zwykle* baza w sensie algebry liniowej.

Rozważmy podprzestrzeń $X \subseteq \mathbb{R}^\infty$ złożoną z ciągów ograniczonych $(a_1, a_2, \ldots)$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$ danym wzorem:

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^2}.$$

Niech U będzie podprzestrzenią X złożoną z ciągów o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Wówczas ciągi $(\epsilon_i)_n$ dane wzorami

$$(\epsilon_i)_n = \begin{cases} n, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases}$$

tworzą bazę ortogonalną U. Jednak $U^\perp = \{0\}$ (sprawdź!) To pokazuje, że układ $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest maksymalnym układem ortogonalnym w X, ale nie jest bazą X. Okazuje się, że X takiej bazy nie ma!

Dostaliśmy przykład tzw. **zupełnego układu wektorów** w przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej, tzn. układu wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ takiego, że dla każdego $\beta \in V$ zachodzi

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \langle \beta, \alpha_i \rangle = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Umawiamy się od tego momentu, że rozważamy jedynie przestrzenie skończonego wymiaru. Przypomnijmy definicję.

Definicja 53. *Parę $(V, \langle\, , \rangle)$ gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, zaś $\langle\, , \rangle$ jest iloczynem skalarnym na V nazywamy* PRZESTRZENIĄ EUKLIDESOWĄ LINIOWĄ.

Zacznijmy od obserwacji wskazującej na to, że (dowolne) układy ortogonalne są zwykle liniowo niezależne.

Fakt 65. *Niech $X \subseteq V$ będzie prostopadłym układem niezerowych wektorów przestrzeni V z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$. Wówczas układ X jest liniowo niezależny.*

Dowód. Weźmy dowolny skończony podukład X, np. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Wystarczy pokazać, że jest on liniowo niezależny. Przypuśćmy, że $\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = 0$, dla pewnych $a_1, \ldots, a_n$. Wówczas dla każdego j:

$$0 = \langle 0, \alpha_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \alpha_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = a_j \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle,$$

bo $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, dla $i \neq j$. Wobec $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle > 0$ dostajemy $a_j = 0$, dla każdego $j = 1, \ldots, n$. □

Fakt 66. *Każda przestrzeń euklidesowa ma bazę prostopadłą.*

Dowód. Stosujemy indukcję ze względu na wymiar przestrzeni liniowej. Dla przestrzeni wymiaru 1 twierdzenie jest oczywiste, bo każdy jej niezerowy wektor stanowi bazę prostopadłą. Załóżmy, że wykazaliśmy twierdzenie dla przestrzeni wymiaru mniejszego od n. Niech $(V, \langle\, , \rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową. Wybierzmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in V$. Pokażemy najpierw, że zachodzi rozkład:

$$V = \mathrm{lin}(\alpha) \oplus \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}.$$

W tym celu trzeba uzasadnić kolejno równości $\mathrm{lin}(\alpha) \cap \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp} = \{0\}$ oraz $\mathrm{lin}(\alpha) + \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp} = V$.

Załóżmy zatem, że jakiś niezerowy wektor v należy zarówno do $\mathrm{lin}(\alpha)$ jak i do podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$ ortogonalnej do $\mathrm{lin}(\alpha)$. Zatem $v = a\alpha$, dla pewnego $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Skoro wektor $a\alpha$ należy także do $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$ to $\langle a\alpha, \alpha \rangle = 0$. Wobec tego, że $\langle a\alpha, \alpha \rangle = a\langle \alpha, \alpha \rangle$ oraz, że $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, dla każdego $0 \neq \alpha$, dostajemy sprzeczność z wyborem a, bo iloczyn dwóch niezerowych z założenia wartości $a\langle \alpha, \alpha \rangle$ daje zero. Pokazaliśmy zatem, że żaden niezerowy wektor nie może należeć do $\mathrm{lin}(\alpha) \cap \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.

Aby pokazać równość $\mathrm{lin}(\alpha) + \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp} = V$ musimy rozłożyć dowolny wektor $\beta \in V$ na sumę wektorów, z których pierwszy należy do $\mathrm{lin}(\alpha)$, a drugi do $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$. Oto ten rozkład:

$$\beta = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha + \left(\beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha\right).$$

Pokażemy, że drugi składnik powyższej sumy jest prostopadły do α. Mamy:

$$\langle \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle - \langle \beta, \alpha \rangle = 0.$$

Pokazaliśmy, że $V = \operatorname{lin}(\alpha) \oplus \operatorname{lin}(\alpha)^\perp$. Z twierdzenia o wymiarze sumy prostej widzimy, że $\dim \operatorname{lin}(\alpha)^\perp = n-1$. Przyjmijmy $W = \operatorname{lin}(\alpha)^\perp$ i rozważmy przekształcenie $\langle\,,\rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\langle w, w'\rangle|_W = \langle w, w'\rangle$, dla dowolnych $w, w' \in W$. Jest to obcięcie przekształcenia $\langle\,,\rangle$ do zbioru $W \times W$, będące oczywiście iloczynem skalarnym. A zatem z założenia indukcyjnego $(W, \langle\,,\rangle|_W)$ ma bazę prostopadłą, powiedzmy $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Zgodnie z definicją $\langle\,,\rangle|_W$ jest to również układ ortogonalny w V. Co więcej każdy z jego elementów jest prostopadły do α. Zatem układ ortogonalny $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ jest liniowo niezależny i tworzy bazę ortogonalną V. □

Kluczowa dla powyższego dowodu obserwacja o tym, że mamy rozkład $V = \operatorname{lin}(\alpha) \oplus \operatorname{lin}(\alpha)^\perp$ znajduje swoje uogólnienie w następującym fakcie.

Fakt 67. *Niech $(V, \langle\,,\rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas:*

(a) $V = W \oplus W^\perp$,

(b) jeśli $\dim(W) = k$, *to* $\dim(W^\perp) = n - k$,

(c) $(W^\perp)^\perp = W$.

Dowód. Dowodzimy (a). Podobnie jak w dowodzie twierdzenia o istnieniu bazy prostopadłej musimy wykazać, że $W \cap W^\perp = \{0\}$ oraz, że $W + W^\perp = V$. Pierwszy punkt jest oczywisty. Jeśli $w \in W \cap W^\perp$, to $\langle w, w\rangle = 0$, czyli $w = 0$. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie bazą prostopadłą W, czyli $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle = 0$, dla $i \neq j$ (już wiemy, że taka baza istnieje). Dla każdego wektora $\alpha \in V$ definiujemy:

$$\alpha' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i.$$

Wówczas oczywiście $\alpha' \in W$. Co więcej, okazuje się, że $\alpha - \alpha' \in W^\perp$. Sprawdzimy to pokazując, że $\alpha - \alpha'$ jest prostopadły do każdego wektora bazowego w W. Istotnie, dla każdego $j = 1, \ldots, k$ mamy:

$$\langle \alpha - \alpha', \alpha_j\rangle = \langle \alpha - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\alpha_i, \alpha_j\rangle = \langle \alpha, \alpha_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle =$$
$$= \langle \alpha, \alpha_j\rangle - \frac{\langle \alpha, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle = \langle \alpha, \alpha_j\rangle - \langle \alpha, \alpha_j\rangle = 0.$$

A zatem każdy wektor $\alpha \in W$ ma rozkład $\alpha = \alpha' + (\alpha - \alpha') \in W + W^\perp$. Stąd wynika punkt (a). Oczywiście (b) jest natychmiastową konsekwencją (a). Jeśli chodzi o (c) zauważmy, że mamy $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, bo każdy wektor z W jest prostopadły do każdego wektora z $W^\perp$. Zauważmy jednak, że stosując (b) mamy $\dim(W^\perp)^\perp = n - \dim(W^\perp) = n - (n - \dim W) = \dim W$. Zatem $W = (W^\perp)^\perp$. □

Ważna jest ponownie interpretacja w języku układów równań. Zauważmy, że jeśli $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz jeśli $\langle\,,\rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, to $\operatorname{lin}(\alpha)^\perp$ złożona jest z wektorów $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniających

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

W tym sensie twierdzenie formułowane obok jest po prostu innym sformułowaniem twierdzenia Kroneckera-Capellego. Dla pełnego obrazu należałoby powiedzieć, że dla dowolnej bazy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ istnieje iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$, względem którego jest to baza prostopadła. Czy Państwo widzą, że wyznaczenie tego iloczynu skalarnego ma jakiś związek z szukaniem bazy dualnej do powyższej bazy?

W dowodzie Faktu 66 korzystamy z następującej, oczywistej obserwacji: jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą podprzestrzeni W przestrzeni V, to następujące warunki są równoważne dla wektora $v \in V$:

(i) $v \in W^\perp$,

(ii) $\langle v, \alpha_i\rangle = 0$, dla każdego i.

Dowód $(i) \Rightarrow (ii)$ jest jasny. W drugą stronę: chcemy, by $v \in V$ był prostopadły do każdego wektora z W, a każdy taki wektor jest postaci $w = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. Zatem

$$\langle v, w\rangle = \sum_i a_i\langle v, \alpha_i\rangle = 0.$$

Twierdzenie to pozwala opisywać zbiory ortogonalne i jego teza jest szczególnie przejrzysta gdy weźmiemy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i w niej podprzestrzeń W opisaną układem równań jednorodnych o macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$. Jeśli przez $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ oznaczymy wiersze macierzy A, to $W^\perp = \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Oczywiście gdy iloczyn skalarny nie jest standardowy tak nie musi być.

Zobaczmy przykład wyznaczania bazy prostopadłej oparty o pokazany dowód. Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$ zadanym wzorem:

$$\langle\, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4 + x_5y_5$$

Niech $W \subseteq \mathbb{R}^5$ będzie opisana układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Nietrudno widzieć, że W jest trójwymiarowa. Weźmiemy dowolny niezerowy wektor α do niej należący, powiedzmy $(-1, 0, 1, 0, 1)$ i wyznaczmy przestrzeń $\operatorname{lin}(\alpha)^\perp$. Zawiera ona wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^5$ postaci $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ takie, że $\langle\, \alpha, v\rangle = 0$, czyli:

To nie jest standardowy iloczyn skalarny.

$$2 \cdot (-1) \cdot x_1 + 1 \cdot (-1) \cdot x_4 + 1 \cdot 0 \cdot x_2 + 2 \cdot 1 \cdot x_3 + 1 \cdot 0 \cdot x_1 + 2 \cdot 0 \cdot x_4 + 1 \cdot 1 \cdot x_5 = 0.$$

A zatem przestrzeń $\operatorname{lin}(\alpha)^\perp$ opisana jest równaniem: $-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0.$ Wektory β, γ, które mają dopełnić α do bazy ortogonalnej W pochodzą z $\operatorname{lin}(\alpha)^\perp$, oraz oczywiście są elementami W. A zatem β, γ należą do przestrzeni $W' = \operatorname{lin}(\alpha)^\perp \cap W$ opisanej układem:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 & = 0. \end{cases}.$$

Widzimy zatem, że dowolne dwa wektory prostopadłe z W' dopełnią α do bazy W. Jak je zatem znaleźć? Tak, jakbyśmy startowali od W'. Bierzemy dowolne niezerowe $\beta \in W'$ i szukamy wektora $\gamma \neq 0$ w podprzestrzeni $\operatorname{lin}(\beta)^\perp \cap W'$. Jest jasne, że

$$\operatorname{lin}(\beta)^\perp \cap W' = \operatorname{lin}(\alpha)^\perp \cap \operatorname{lin}(\beta)^\perp \cap W.$$

A zatem biorąc $\beta = (-1, 0, 1, 0, -4)$ widzimy, że $\operatorname{lin}(\beta)^\perp$ opisana jest równaniem $-x_1 + x_3 - x_5 = 0$. Stąd brakujący wektor γ szukanej bazy leży w przestrzeni $\operatorname{lin}(\beta)^\perp \cap W'$ opisanej układem:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 & = 0 \end{cases}.$$