Endomorfizmy

W pierwszym semestrze poznaliśmy podstawowe własności przestrzeni liniowych oraz przekształceń liniowych między tymi przestrzeniami. Wątek geometryczny naszego wykładu sprowadzał się w zasadniczej mierze do budowania intuicji związanych z pojęciem wymiaru przestrzeni liniowej i badaniem jego własności. Punktem wyjścia obecnych rozważań będzie przeformułowanie twierdzenia charakteryzującego rozwiązywalność układów równań liniowych w języku macierzy odwracalnych, zastosowanego do układów jednorodnych.

Fakt 1. *Niech $A \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:*

Przez $r(A)$ rozumiemy rząd macierzy A, a przez $\det(A)$ – wyznacznik A.

Wektor v traktujemy jako macierz rozmiarów $n \times 1$.

(a) *układ równań $Ax = 0$ ma* NIEZEROWE *rozwiązanie $v \in K^n$,*

(b) $r(A) < n$,

(c) *macierz A jest nieodwracalna,*

(d) $\det(A) = 0$.

Drugi semestr rozpoczniemy od pytania o geometryczną interpretację przekształceń liniowych. Brzmi ono w sposób następujący.

> Jakie własności geometryczne przekształcenia liniowego możemy odczytać z macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ przekształcenia liniowego $\phi : V \to W$ pomiędzy przestrzeniami skończonego wymiaru, poza informacją dotyczącą wymiarów obrazu i jądra tego przekształcenia?

Jak się okazuje, niezwykle precyzyjne informacje otrzymać możemy w przypadku, gdy $V = W$ oraz $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Omówienie jak wygląda sytuacja, gdy $V = W$, ale $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ dokonane zostanie w uzupełnieniu do tego wykładu.

Definicja 1. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.*

- *Przekształcenie liniowe $\phi \in V \to V$ nazywamy* ENDOMORFIZMEM PRZESTRZENI *V. Zbiór endomorfizmów przestrzeni V oznaczamy* $\mathrm{End}(V)$.
- MACIERZĄ ENDOMORFIZMU *ϕ* W BAZIE *$\mathcal{A}$ nazywamy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.*

Innymi słowy $\mathrm{End}(V) = L(V, V)$.

A zatem: zamiast rozważania przekształceń liniowych $\phi : V \to W$ i odpowiadających im macierzy prostokątnych rozważać będziemy przekształcenia $\phi : V \to V$ opisane macierzami kwadratowymi.

Centralne pytanie na najbliższe kilka wykładów brzmi: jak „najprościej" wyglądać mogą macierze endomorfizmów przestrzeni skończonego wymiaru? Zacznijmy od następującej obserwacji.

Fakt 2. *Niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$ oraz niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni V. Przyjmijmy też $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Wówczas*

$$B = C^{-1}AC,$$

gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, tzn. C jest macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.

Przypomnienie: I_n (lub I, o ile nie prowadzi to do nieporozumień) oznaczamy macierz identycznościową w $M_n(K)$.

Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje $B \in M_n(K)$ taka, że $AB = BA = I$.

Dowód. Zgodnie z formułą opisującą macierz złożenia przekształceń liniowych mamy:

$$B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id} \circ \phi \circ \mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C^{-1}AC.$$

□

Stwierdzenie to wyraźnie wskazuje na różnicę pomiędzy macierzami endomorfizmów w różnych bazach i macierzami w ustalonej bazie. Motywuje też wprowadzenie następującego pojęcia.

Definicja 2. *Macierze $A, B \in M_n(K)$ nazywamy* PODOBNYMI, *jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(K)$ taka, że:*

$$B = C^{-1}AC.$$

Przykład 4. *Macierze*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

są podobne nad dowolnym ciałem K, bowiem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym w tym przypadku mamy dodatkowo

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Odnotujmy, że jeśli dane są dwie bazy przestrzeni K^2:

$$\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathcal{B} = (\alpha_2, \alpha_1),$$

przy czym $\mathcal{B}$ jest bazą powstałą przez zamianę kolejności wektorów w bazie $\mathcal{A}$, to dla $\phi \in \operatorname{End}(K^2)$ mamy:

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \iff B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Dla dowolnej macierzy permutacyjnej $P \in P_n(K)$, powstałej (jak pamiętamy) z macierzy identycznościowej $I \in M_n(K)$ przez permutację kolumn mamy

$$P^{-1} = P^T.$$

Dlaczego tak jest? Zauważmy też, że dla macierzy permutacyjnej P macierz $P^{-1}AP$ powstaje z A przez odpowiednią permutację wierszy, a następnie odpowiednią permutację kolumn. Fakt ten ma znaczenie w tzw. algebraicznej teorii grafów, ponieważ mówi, że macierze sąsiedztwa dwóch izomorficznych grafów są podobne. Wspomnę o tym w dodatku.

Fakt 3. *Niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) macierze A, B są podobne,

(b) istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Dowód. Implikacja (b) $\Rightarrow$ (a) wynika oczywiście z poprzedniej uwagi. Dowodzimy zatem (a) $\Rightarrow$ (b). Przypuśćmy, że $B = C^{-1}AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej C. Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ będzie zadany warunkiem $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni K^n złożoną z kolumn macierzy C. Wówczas $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{st}$, więc $C^{-1} = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{B}}$. Stąd:

$$B = C^{-1}AC = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{st} = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

Otrzymaliśmy zatem $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. □

Relacja podobieństwa w zbiorze $M_n(K)$ jest relacją równoważności. Sprawdźmy to korzystając z definicji.

Czasem podobieństwo macierzy nad ciałem K oznacza się symbolem $A \sim_K B$, lub nawet $A \sim B$. Oznaczenie to nie jest jednak oficjalnie używane w naszych skryptach, więc tylko je tu sygnalizuję.

- Zwrotność relacji podobieństwa. Dla każdej $A \in M_n(K)$ mamy $A = I_n \cdot A \cdot I_n = (I_n)^{-1} \cdot A \cdot I_n$, a zatem A jest macierzą podobną do samej siebie.

- Symetryczność relacji podobieństwa. Jeśli dla macierzy $A, B \in M_n(K)$ macierz A jest podobna do macierzy B, to istnieje macierz odwracalna C, że $B = C^{-1}AC$. A zatem $A = CBC^{-1} = (C^{-1})^{-1}BC^{-1}$, czyli także B jest podobna do A.

- Przechodniość relacji podobieństwa. Jeśli dla $A, B, C \in M_n(K)$ mamy macierze odwracalne $X, Y \in M_n(K)$, spełniające $A = X^{-1}BX$ oraz $B = Y^{-1}CY$, to $A = X^{-1}Y^{-1}CYX = (YX)^{-1}C(YX)$.

Przykłady:

- Zbiór macierzy podobnych do macierzy $I_n \in M_n(K)$, składa się jedynie z macierzy identycznościowej. Rzeczywiście, dla dowolnej macierzy odwracalnej $C \in M_n(K)$ mamy: $C^{-1} \cdot I \cdot C = C^{-1}C = I$.

- Zauważmy, że zbiór macierzy podobnych do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(K)$$

  zależy od ciała K. Proszę sprawdzić, że dla $K = \mathbb{C}$ do zbioru macierzy podobnych do macierzy A należy:

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

W języku endomorfizmów oznacza to, że dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n mamy $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I_n$. Można tu "zobaczyć" różnicę między macierzą "w bazie", a macierzą "w bazach". Istotnie, dla dowolnej macierzy odwracalnej $C \in M_n(K)$ mamy $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{st}$, gdzie $\mathcal{C}$ jest bazą K^n złożoną z kolumn C. Mówiąc inaczej, wśród wszystkich macierzy w $M_n(K)$ będącymi macierzami różnych endomorfizmów "w pewnej bazie" tylko I_n jest macierzą identyczności. Można więc "rozpoznać"' id spośród innych przekształceń liniowych za pomocą macierzy "w bazie".

- Niech $V = W \oplus U$ i niech $\phi : V \to V$ będzie **rzutem** na podprzestrzeń W wzdłuż U. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie taką bazą przestrzeni V, że
  - $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ (dla pewnego $1 \leq k < n$) jest bazą przestrzeni W,
  - $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni U.

  Wówczas macierz $R_k = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma w pierwszych k kolumnach pierwsze k wektorów bazy standardowej K^n, zaś dalej kolumny zerowe:

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

  Zbiór macierzy podobnych do macierzy R to zbiór macierzy rzutu ϕ postaci $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathcal{B}$ przebiega wszystkie bazy V.

Zauważmy jednak odwrotną własność – macierz $A \in M_n(K)$ jest macierzą rzutu wtedy i tylko wtedy, gdy jest podobna do macierzy R_k, dla pewnego k. Dokładniej mówiąc: wszystkie macierze **wszystkich** rzutów na k-wymiarowe podprzestrzenie V są podobne. Podobnie jest z symetriami – wszystkie macierze wszystkich symetrii względem k-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni V są podobne do macierzy S_k postaci:

Widzimy zatem, że R_K oraz S_k są reprezentantami klas abstrakcji relacji podobieństwa na $M_n(K)$, z których jedna zawiera tylko rzuty o obrazie wymiaru k, zaś druga – tylko symetrie względem k-wymiarowej przestrzeni. Oczywiście są to rozłączne klasy, dla $k < n$.

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}.$$

Problem rozstrzygnięcia kiedy dane dwie macierze kwadratowe są podobne nad K jest skomplikowany. Zacznijmy od wskazania kilku niezmienników podobieństwa.

Definicja 3. Śladem macierzy *$A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy sumę wyrazów stojących na przekątnej macierzy A, to znaczy element*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K.$$

Ślad jest niezwykle istotnym obiektem i niezmiennikiem wielu ważnych konstrukcji, pomimo swojej pozornej prostoty. Oczywiście kluczowe jest stwierdzenie, że jest to element ciała. Gdy $A = I_n \in M_n(K)$ jest macierzą identyczności, to w zależności od K może mieć ona zupełnie inny ślad. Oto kluczowa własność w kontekście podobieństwa macierzy, której dowód pozostawiam jako ćwiczenie.

Fakt 4 (Ćwiczenie)**.** *Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_n(K)$ zachodzi*

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Zwracam przy tym uwagę, że iloczyn śladów nie musi być śladem iloczynu. Jeśli weźmiemy na przykład

$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

to $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) = 0$, ale $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(I_2) = \ldots$ zależy od ciała K. Jeśli bylibyśmy nad ciałem liczb rzeczywistych to $\mathrm{tr}(I_2) = 2$, ale nad $\mathbb{Z}_2$ ślad I_2 równy jest 0.

Fakt 5. *Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne, to:*

- $r(A) = r(B)$,
- $\det(A) = \det(B)$,
- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Dowód. Jeśli A i B są macierzami podobnymi, to na mocy Uwagi 3 istnieje $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, \quad B = M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}.$$

A zatem $r(A) = r(B)$ (co pokazywaliśmy już w poprzednim semestrze).

Skoro macierze A, B są podobne, to istnieje macierz odwracalna C, że $B = C^{-1}AC$. Zatem z wzoru Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(C^{-1}AC) = \\ &= \det(C^{-1})\det(A)\det(C) = \\ &= \frac{\det(A)\det C}{\det(C)} = \det(A). \end{aligned}$$

Wreszcie, korzystając z uwagi wyżej mamy:

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(ACC^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

□

Fakt 6. *Jeśli A, B są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach przestrzeni V, to*

$$r(A) = r(b), \quad \det(A) = \det(B), \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B).$$

Definicja 4. *Niech* $\dim V < \infty$ *oraz niech* $\phi \in \mathrm{End}(V)$.

- WYZNACZNIKIEM ENDOMORFIZMU ϕ, *ozn.* $\det \phi$, *nazywamy element* $\det(A) \in K$, *gdzie* $A = M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$, *dla pewnej bazy* $\mathcal{A}$ *przestrzeni* V.
- ŚLADEM ENDOMORFIZMU, *ozn.* $\mathrm{tr}\, \phi$, *nazywamy element* $\mathrm{tr}(A) \in K$, *gdzie* $A = M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$, *dla pewnej bazy* $\mathcal{A}$ *przestrzeni* V.

Oczywiście łatwo wskazać prosty przykład macierzy, które mają takie same rzędy, wyznaczniki i ślady, a które nie są podobne nad żadnym ciałem. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz B jest macierzą identyczności, a wiemy już, że żadna macierz różna od macierzy identyczności nie jest do niej podobna. Aby zrozumieć, że wybór macierzy A nie był zupełnie przypadkowy oraz, że endomorfizmy K^2 o macierzach w bazach standardowych równych A oraz B mają pewne geometryczne związki, wprowadzamy następującą fundamentalną w całej matematyce definicję.

Definicja 5. *Niech* V *będzie przestrzenią liniową nad ciałem* K *oraz niech* $\phi : V \to V$ *będzie endomorfizmem przestrzeni* V.

- *Wektor* $\alpha \in V$ *nazywamy* WEKTOREM WŁASNYM *endomorfizmu* ϕ *jeśli:*
  - $\alpha \neq 0$,
  - *istnieje* $\lambda \in K$ *takie, ze* $\phi(\alpha) = \lambda\alpha$.
- *Element* $\lambda \in K$ *spełniający powyższe warunki nazywamy* WARTOŚCIĄ WŁASNĄ *endomorfizmu* ϕ, *zaś o wektorze* α *mówimy, że jest* WEKTOREM WŁASNYM ϕ *o* WARTOŚCI WŁASNEJ λ.
- *Jeśli* a *jest wartością własną endomorfizmu* $\phi \in \mathrm{End}(V)$, *to zbiór*

$$V_{(a)} = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = a\alpha\}$$

  nazywamy PODPRZESTRZENIĄ WŁASNĄ ENDOMORFIZMU ϕ *odpowiadającą wartości własnej* a.

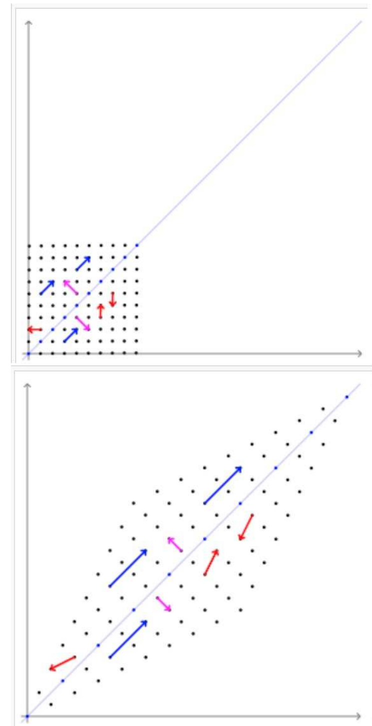
Podprzestrzeń ta składa się z wektorów własnych endomorfizmu ϕ o wartości własnej a oraz z wektora zerowego.

Określamy również pojęcie wektora własnego i wartości własnej macierzy kwadratowej o wyrazach w ciele.

Definicja 6. *Niech* $A \in M_n(K)$. *Mówimy, że* $\lambda \in K$ *jest* ***wartością własną macierzy*** A, *jeśli* λ *jest wartością własną endomorfizmu* $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ *zadanego wzorem* $M(\phi)^{st}_{st} = A$. *Niezerowy wektor* $v \in K^n$ *nazwiemy* ***wektorem własnym macierzy*** A *o wartości własnej* λ, *jeśli*

$$A \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Z geometrycznego punktu widzenia powyższe definicje są bardzo czytelne. Wektor własny endomorfizmu to taki niezerowy wektor, który w wyniku działania endomorfizmu zostaje jedynie przeskalowany.



Na $\mathbb{R}^2$ działamy przekształceniem zadanym w bazie standardowej macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wektorami własnymi tego przekształcenia są $(1, -1)$ oraz $(1, 1)$, przy czym odpowiadające im wartości własne to $1, 3$. Źródło: Wikipedia.

Uwaga — obiekty na rysunkach ilustrują tzw. wektory zaczepione w (tzw.) punktach. Formalną definicję poznamy za kilka wykładów, ale raczej nikt nie powinien mieć problemu z interpretacją.

Oto przykłady.

- Jeśli $\phi : K^n \to K^n$ jest jednokładnością o skali a, to każdy niezerowy wektor K^n jest wektorem własnym o wartości własnej a. Zatem $V_{(a)} = K^n$.
- Endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci

  $$\phi(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

  nie ma wartości własnych rzeczywistych, bo jest obrotem o kąt $\pi/2$.
- Endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ o macierzy postaci:

  $$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  ma dwie wartości własne: $1, 2$ oraz $V_{(1)} = \mathrm{lin}((1, 0)), V_{(2)} = \mathrm{lin}((0, 1))$, co można sprawdzić wypisując wzór na ϕ lub sprawdzając, że wektory $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$ są wektorami własnymi macierzy $M(\phi)_{st}^{st}$:

  $$\phi((1,0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
  $$\phi((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
- Endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ zadany wzorem

  $$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + 4x_3, 3x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + 6x_2)$$

  ma wektor własny $(1, 1, 1)$ o wartości własnej 7.
- Choć na tym wykładzie interesować nas będą jedynie endomorfizmy przestrzeni skończenie wymiarowych, warto wspomnieć przykłady nieskończenie wymiarowe: weźmy $T \in \mathrm{End}(K^\infty)$ postaci:

  $$T(v_1, v_2, v_3, \ldots) = (v_2, v_3, v_4, \ldots).$$

  Nietrudno sprawdzić, że dowolny element ciała K jest wartością własną tego endomorfizmu. Czy potraficie Państwo wskazać odpowiednie wektory własne?
- Branie pochodnej to endomorfizm przestrzeni $K[x]$. Łatwo widzieć, że jego jedyną wartością własną jest 0. A gdy zamiast $K[x]$ weźmiemy podprzestrzeń funkcji różniczkowalnych w $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Pozostałą część wykładu poświęcimy problemowi znajdowania wartości własnych endomorfizmu. Zacznijmy od poniższego przykładu.

Od tej pory zakładamy aż do odwołania, że rozważane przestrzenie liniowe są skończonego wymiaru.

Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znalezienie wektorów i wartości własnych endomorfizmu ϕ (lub macierzy $M(\phi)_{st}^{st}$) sprowadza się do dyskusji rozwiązywalności układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix},$$

czyli równoważnie do rozstrzygnięcia dla jakich wartości parametru λ jednorodny układ o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I$ postaci:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ma niezerowe rozwiązanie. Jesteśmy zatem w sytuacji Twierdzenia 1. Macierz $M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I$ musi być nieodwracalna, zatem szukamy λ takich, że $\det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) = 0$. Mamy:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda+1)^2.$$

Stąd wartościami własnymi ϕ są -1 oraz 5, a po rozwiązaniu układów o macierzach $M(\phi)_{st}^{st} + I$ oraz $M(\phi)_{st}^{st} - 5I$ dostajemy podprzestrzenie własne: $V_{(-1)} = \mathrm{lin}((-1,1,0),(-1,0,1)), \quad V_{(5)} = \mathrm{lin}((1,1,1))$.

Powyższy przykład prowadzi do następującej definicji.

Definicja 7. *Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest przestrzenią sk. wymiarową nad ciałem K.* Wielomianem charakterystycznym *ϕ nazywamy*

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{st}^{st} - \lambda I) \in K[\lambda].$$

Dla macierzy $A \in M_n(K)$ wielomianem charakterystycznym *A nazywamy: $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in K[\lambda]$.*

Fakt 7. *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Zachodzi równość:*

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Same fakt, że w_A jest wielomianem stopnia n można dowodzić indukcyjnie na przykład za pomocą wzoru Laplace'a. Proponuję jednak przeprowadzić dowód za pomocą wzoru permutacyjnego.

Dowód. Niech $A - \lambda I$ ma wyrazy x_{ij}, dla $1 \leq i, j \leq n$. Wówczas:

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{, dla } i \neq j, \\ a_{ij} - \lambda & \text{, dla } i = j. \end{cases}$$

Innymi słowy, macierz $A - \lambda I$ ma poza przekątną te same wyrazy, co macierz A. Na mocy wzoru permutacyjnego wiemy, że $\det(A - \lambda I)$ jest sumą $n!$ elementów postaci:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdot x_{\sigma(n)n}, \qquad (\heartsuit)$$

indeksowanych permutacjami $\sigma \in S_n$. Każdy z nich jest iloczynem wyrazów macierzy A oraz tylu elementów postaci $(a_{kk} - \lambda)$, ile jest punktów stałych permutacji σ, czyli takich k, że $\sigma(k) = k$. Zauważmy, że każda permutacja zbioru n elementowego ma albo n punktów stałych, czyli jest identycznością, albo ma nie więcej niż $n - 2$ punkty stałe. W szczególności mamy:

$$w_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) + w'_A(\lambda),$$

gdzie w'_A jest sumą wielomianów stopnia nie większego niż $n - 2$.

Aby więc znaleźć współczynniki wielomianu $w_A(\lambda)$ stojące przy λ^n oraz λ^{n-1} wystarczy znaleźć analogiczne współczynniki wielomianu $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$. Łatwo widzieć, że współczynniki te są równe $(-1)^n$ oraz $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} tr(A)$.

Oczywiście dla $\lambda = 0$ wartość wielomianu $\det(A - \lambda I)$ równa jest $\det(A)$. □

Fakt 8. *Wielomian charakterystyczny endomorfizmu $\phi \in \operatorname{End}(V)$ nie zależy od wyboru bazy, tzn. dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V mamy:*

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I).$$

Równoważnie, jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad ciałem K oraz $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\psi)_{st}^{st}$, to $w_\phi(\lambda) = w_\psi(\lambda)$.

Dowód. Niech C będzie macierzą odwracalną taką, że $C^{-1}AC = B$. Wówczas także

$$C^{-1}(A - \lambda I)C = C^{-1}AC - C^{-1}\lambda I \cdot C = B - \lambda I.$$

Teza wynika zatem ze wzoru Cauchy'ego:

$$\det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}) \det(A - \lambda I) \det C = \det(A - \lambda I).$$

□

Wielomian charakterystyczny jest więc niezmiennikiem podobieństwa. Jednocześnie macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mają identyczne wielomiany charakterystyczne $(1-\lambda)^2$, ale nie są podobne. Naszym celem jest pokazanie, że wartościami własnymi endomorfizmu przestrzeni skończenie wymiarowej są dokładnie pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego.

Fakt 9. *Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V i niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *λ jest wartością własną ϕ,*

(ii) *macierz $A - \lambda I$ jest nieodwracalna,*

(iii) $\det(A - \lambda I) = 0$.

(iv) *λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $w_A(\lambda)$.*

Dowód. Następujące warunki są równoważne dla endomorfizmu przestrzeni liniowej V nad ciałem K, wektora $v \in V$ oraz $\lambda \in K$

$$\phi(v) = \lambda \cdot v \iff \phi(v) - \lambda v = 0 \iff (\phi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(v) = 0 \iff v \in \ker(\phi - \lambda\, \mathrm{id}_V).$$

A zatem λ jest wartością własną endomorfizmu ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\phi - \lambda\, \mathrm{id}) \neq 0$, bowiem wektor własny musi być niezerowy. Niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Wówczas dla każdego $a \in K$ mamy:

$$M(\phi - a \cdot \mathrm{id}_V)_{st}^{st} = A - aI.$$

Zatem $\ker(\phi - \lambda\, \mathrm{id}) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jednorodny układ równań liniowych o macierzy $A - aI$ ma niezerowe rozwiązanie. Na mocy Twierdzenia 1 widzimy zatem, że warunek (i) jest równoważny warunkom $(ii) - (iv)$. ☐

Fakt 10. *Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ oraz niech $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest dowolną bazą K^n. Wówczas dla każdego $a \in K$:*

$$V_{(a)} = \ker(\phi - a \cdot \mathrm{id}_{K^n}),$$

czyli $V_{(a)}$ jest przestrzenią rozwiązań układu zadanego macierzą $A - aI$.

Z powyższych rozważań powinno być jasne, że istnienie wartości własnych zależy w niemałym stopniu od ciała, w którym się znajdujemy. Jeśli wielomian charakterystyczny macierzy A ma na przykład postać $\lambda^2 + 1$, to jeśli byłaby to macierz rzeczywista – wówczas nie będzie ona miała żadnych wartości własnych. Z drugiej strony, gdyby macierz A była zespolona – wówczas wartości własne to i oraz $-i$. Wrócimy do tego problemu na wykładzie trzecim. Wcześniej przyjrzymy się ważnej klasie macierzy, która są podobne do macierzy diagonalnych.

Na trzecim wykładzie pokażemy, że każdy wielomian jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy/endomorfizmu. Dla wielomianu $\lambda^2 + 1$ jest to $\phi((x_1, x_2)) = (-x_2, x_1)$

Uzupełnienie. Macierze przekształcenia w różnych bazach

Przyglądając się izomorfizmom przestrzeni liniowych łatwo stwierdzimy, że macierze ich przekształceń w dowolnych bazach są niemal dowolnej możliwej postaci (powinny to być macierze odwracalne).

Fakt 11. *Niech $\phi : K^n \to K^n$ będzie izomorfizmem. Istnieją takie bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ przestrzeni K^n, że:*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

Dowód. Niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą K^n. Wówczas $(\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_n))$ jest również bazą K^n, bo ϕ to izomorfizm. A zatem biorąc pierwszą z tych baz jako $\mathcal{A}$, a drugą jako $\mathcal{B}$ dostajemy, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = I_n$. □

Geometrycznie obserwacja ta może być interpretowana tak, że izomorfizm przestrzeni liniowych jest jedynie swego rodzaju przejściem z jednego układu współrzędnych do drugiego.

Fakt 12. *Każda macierz odwracalna w $M_n(K)$ jest macierzą izomorfizmu $\phi : K^n \to K^n$ w pewnych bazach.*

Dowód. Niech $G \in M_n(K)$ będzie macierzą odwracalną. Wystarczy pokazać, że istnieje baza $\mathcal{C}$ przestrzeni K^n, że $G = M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$, bo wówczas

$$M(\phi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = I_n G = G.$$

Otóż szukaną bazę $\mathcal{C}$ można odczytać z kolumn macierzy AG, gdzie $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$. Wówczas mamy

$$G = A^{-1}(AG) = M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}.$$

□

A zatem dowolna macierz odwracalna rozmiaru n nad ciałem K jest macierzą dowolnego izomorfizmu przestrzeni wymiaru n nad ciałem K. Zachodzi ogólne nietrudne twierdzenie, którego dowód pomijam.

Fakt 13. *Dla macierzy $A, B \in M_{m \times n}(K)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *B może być otrzymana z A ciągiem operacji elementarnych na wierszach i kolumnach,*

(ii) *istnieje przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$,*

(iii) *$r(A) = r(B)$.*

Fakt 14. *Dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : K^n \to K^m$ rzędu r istnieją bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ przestrzeni K^n, K^m takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$, przy czym $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz $A = [a_{ij}]$, gdzie*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j = 1, ..., r, \\ 0, & \text{dla pozostałych } i, j. \end{cases}.$$

Definicja 8. *Macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy* RÓWNOWAŻNYMI, *jeśli istnieją macierze odwracalne $C \in M_{m\times m}(K)$ oraz $D \in M_{n\times n}(K)$ takie, że $B = CAD$.*

W świetle przytoczonego twierdzenia powyższa definicja mówi, że macierze są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tego samego przekształcenia liniowego. Równoważność macierzy nie jest, jak widać, pojęciem mówiącym za wiele o geometrii przekształcenia, choć jest ono przydatne z punktu widzenia samej teorii macierzy (zwłaszcza tak zwana wierszowa i kolumnowa równoważność tzn. gdy $B = CA$ lub $B = AD$, dla pewnych C, D odwracalnych).

Aby dać sobie pewne wyobrażenie jak można naprawić ową niemoc w geometrycznej rozróżnialności jednych przekształceń liniowych od innych za pomocą ich macierzy zastanówmy się, czy umielibyśmy odróżnić rzuty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ od innych przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. W pierwszym semestrze mogła pojawić się na ćwiczeniach następująca charakteryzacja.

Fakt 15. *Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas ϕ jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \circ \phi = \phi$.*

W języku macierzowym chciałoby się powiedzieć, że musi istnieć macierz A przekształcenia ϕ taka, że $A^2 = A$. To jest jednak błąd. Stwierdziliśmy przecież przed chwilą, że macierz przekształcenia rzędu r (na przykład rzutu na przestrzeń wymiaru r) może być (przy ustalonych rozmiarach) dowolną macierzą rzędu r. Czy to znaczy, że każde przekształcenie $\phi : V \to V$ jest rzutem? Oczywiście nie. O co tu chodzi?

Jeśli $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to przecież macierz A^2 to macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Nie ma powodu by sądzić, że jest to ponownie macierz ϕ w pewnych bazach, bo nie znamy relacji pomiędzy bazą $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Dopiero, gdyby te bazy były jedną bazą, wówczas $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A^2$. To jest dobry kierunek, ale pojawia się kolejny problem do rozwiązania. Możliwe postaci macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ są zupełnie inne niż te wypisane w twierdzeniach wyżej. Z całą pewnością nie dla każdego izomorfizmu $\phi : V \to V$ znajdziemy bazę $\mathcal{A}$ taką, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = I$.

Twierdzenie to mówi, że każdą macierz prostokątną można sprowadzić, za pomocą operacji elementarnych na wierszach i kolumnach do jednej z $n+1$ macierzy zero-jedynkowych o postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = 0, 1, \ldots, n.$$

Oczywiście rozważano bardziej skomplikowane problemy. Załóżmy, że mamy macierz rozmiaru $m \times (r+s)$ o postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

Załóżmy też, że możemy wykonywać wszystkie operacje wierszowe (na całą macierz blokową), ale operacje kolumnowe mogą być wykonywane „w obrębie" bloku kolumn: od 1 do r lub „w obrębie" bloku koumn od $r+1$ do $r+s$ (tzn. nie można np. dodać do kolumny r kolumny $r+s$, albo ich zamienić, ale można zamienić kolumny $r+1, r+2$).

Czy za pomocą takich operacji elementarnych można uzyskać **skończenie wiele macierzy** (zerojedynkowych)? Jaką mają postać? Mnożeniu przez jakie macierze odpowiada ten problem?

A jeśli mielibyśmy macierz o blokach

$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}$$

i analogiczne założenia? A gdybyśmy mieli dowolną macierz blokową i dopuszczalne by było tylko „działanie w obrębie bloków wierszy" i „działanie w obrębie bloków kolumn" (oczywiście na całą macierz, nie tylko na bloki)?

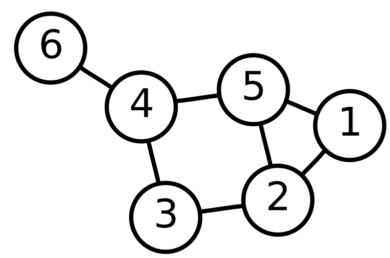
Te pytania prowadzą do tzw. problemów macierzowych i były rozważane od początku XX wieku. W drugiej jego połowie były jednym z nurtów rozwoju ważnej gałęzi algebry: teorii reprezentacji algebr skończenie wymiarowych. Więcej (z przykładami) można przeczytać w rozdziale pierwszym tekstu: `https://www.matem.unam.mx/~christof/cursos/12_SAB/1111_RepThBook.pdf`.

Dodatek. Grafy i ich macierze sąsiedztwa

Algebra liniowa niewątpliwie pozwoli nam zrozumieć wiele obiektów geometrycznych i fenomenów w analizie. Chciałbym raz na jakiś czas zasygnalizować inny piękny kierunek jej zastosowań – kombinatorykę (czy mądrzej: matematykę dyskretną). Jednym z podstawowym narzędzi kombinatorycznych są grafy, a do badania ich własności przydają się, jak się okazuje, rozmaite związane z nimi macierze. Badanie własności tych macierzy, między innymi ich wektorów i wartości własnych, może służyć dowodzeniu pięknych twierdzeń, Interpretacja grafowa rozmaitych sytuacji kombinatorycznych jest taka: n osób i ich układ znajomości reprezentuje graficznie graf (nie)zorientowany o n wierzchołkach. Znajomość reprezentowana jest przez krawędź pomiędzy wierzchołkami. Nie ma krawędzi z wierzchołka do niego samego i nie ma krawędzi wielokrotnych pomiędzy dwoma wierzchołkami. Taki graf nazywamy czasem w kombinatoryce GRAFEM PROSTYM. Najpierw pokażmy jak związać z takim grafem pewną (jedną z wielu) macierz.

Definicja 9. *Dla (niezorientowanego) grafu prostego G o wierzchołkach postaci $1, 2, \ldots, n$ definiujemy* MACIERZ SĄSIEDZTWA $A(G) = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *warunkami:*

- $a_{ij} = 1$, *jeśli wierzchołki i oraz j są połączone w G,*
- $a_{ij} = 0$, *jeśli $i = j$ lub wierzchołki i, j nie są połączone w G.*



Macierz sąsiedztwa powyższego grafu to:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Źródło `wikipedia.org`.

Macierz $A(G)$ (ang. *adjacency matrix*) jest dla grafów niezorientowanych macierzą symetryczną, to znaczy $a_{ij} = a_{ji}$. Jak się okazuje, rozmaite własności grafu G odczytać można z typowo algebraicznych własności $A(G)$. Osobom mającym doświadczenie w metodach teorii grafów polecam wykład *Metody algebraiczne w teorii grafów* zamieszczony na portalu `wazniak.mimuw.edu.pl`.

Kluczowym powodem badania macierzy sąsiedztwa jest następująca, prosta obserwacja, której dowód pozostawiam Czytelnikowi.

Fakt 16. *Wyraz znajdujący się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy $A(G)^n$ opisuje liczbę ścieżek długości n od wierzchołka i do wierzchołka j.*

Przypomnijmy, ścieżka długości n to ciąg n krawędzi postaci $a_1 - a_2 - \ldots - a_{n+1}$, gdzie $a - b$ reprezentuje połączenie wierzchołków a oraz b. Wierzchołki mogą występować w ścieżce wiele razy. Jest jasne, ze jeśli w grafie istniałby cykl zamknięty, to żadna z potęg macierzy incydencji nie będzie zerowa. Jak zobaczymy na kolejnych wykładach, znajomość wartości własnych macierzy kwadratowej A, pozwala również na wysnuwanie wniosków o macierzach A^k, niezwykle istotnych z kombinatorycznego punktu widzenia.

Dla zilustrowania pewnych ciekawych własności macierzy sąsiedztwa zostawiam poniżej kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

Więcej zadań będziemy mogli zrobić w połowie semestru, gdy wykażemy tzw. rzeczywiste twierdzenie spektralne

Zadanie 1. Wektor stopni wierzchołków (niezorientowanego) grafu prostego G równy jest iloczynowi macierzy $A(G)$ przez wektor v postaci....?

Zadanie 2. Jeśli G_1, G_2 są parą izomorficznych grafów skończonych o macierzach sąsiedztwa $A(G_1)$, $A(G_2)$, to istnieje macierz permutacyjna P taka, że:

$$A(G_2) = P^{-1}A(G_1)P.$$

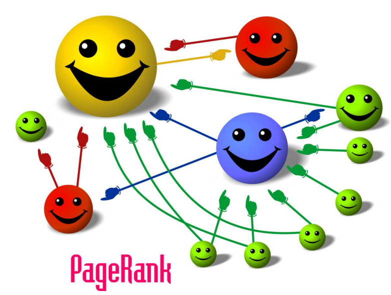
To znaczy: G_1, G_2 mają po n wierzchołków, dla pewnego n, i istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że (i, j) jest krawędzią G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $(\sigma(i), \sigma(j))$ jest krawędzią w G_2

W szczególności macierze $A(G_1), A(G_2)$ mają ten sam zbiór wartości własnych (z krotnościami).

Zadanie 3. Jeśli graf G jest prosty, ale nie jest spójny, wówczas można tak ponumerować jego wierzchołki, aby $A(G)$ było macierzą blokowo-diagonalną o liczbie bloków diagonalnych równej liczbie składowych spójności G.

Zadanie 4. Załóżmy, że graf G jest dwudzielny. Wówczas jeśli λ jest wartością własną $A(G)$, to $-\lambda$ również jest wartością własną $A(G)$. Czy zachodzi fakt odwrotny?

Zadanie 5. Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $A(G)$ grafu G, to $|\lambda| \leq \Delta(G)$, gdzie $\Delta(G)$ to maksymalny stopień wierzchołka w grafie G.



A jeśli macierz sąsiedztwa nazwiemy tzw. „hyperlink matrix" to może mówić o ciekawym zastosowaniu „praktycznym" – jedno z przybliżonych wyjaśnień działania tajemniczego algorytmu Page Rank. Źródło grafiki `wikipedia.org`. Więcej o temacie: `https://www.amsi.org.au/teacher_modules/pdfs/Maths_delivers/Pagerank5.pdf`.

To oczywiście jedynie bardzo proste własności $A(G)$ związane z wartościami własnymi. Jest ich znacznie więcej, a w zasadzie są całe podręczniki związane z badaniem metod algebraicznych w teorii grafów. Jednym z niezwykle pięknych wyników w tej tematyce jest następujące twierdzenie.

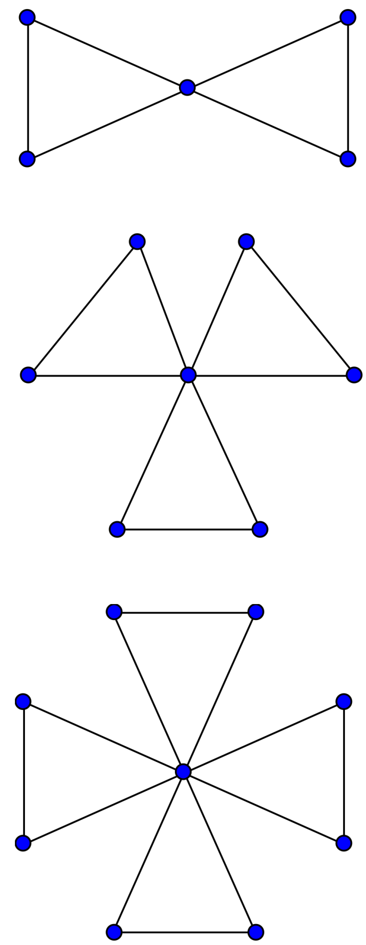
Fakt 17 (Twierdzenie o przyjaźni (Erdos, Renyi, Sos))**.** *Załóżmy, że w gronie $n > 1$ osób każde dwie osoby mają dokładnie jednego wspólnego znajomego (A jest znajomym B $\iff$ B jest znajomym A). Wówczas istnieje w tym gronie osoba, która jest znajomym wszystkich pozostałych.*

To dość zaskakujące twierdzenie jest jednym z wielu pięknych zastosowań tzw. spektralnej teorii grafów. Istnieje też trudny czysto kombinatoryczny dowód tego rezultatu. Poniżej przedstawiam dowód algebraiczny. W tym momencie może on nie być do końca zrozumiały, ale proszę wrócić w to miejsce za jakieś 2 wykłady i na pewno wszystko stanie się jasne.

Dowód twierdzenia o przyjaźni opiera się kroku kombinatorycznym i kroku algebraicznym. Pierwszy krok zostawiam Państwu jako (całkiem ciekawe) ćwiczenie, drugi zostanie szkicowo przedstawiony.

Załóżmy, że sytuacja opisana w twierdzeniu opisana jest przez pewien graf prosty G (dla każdych dwóch wierzchołków G istnieje trzeci, z którym te dwa są połączone), ale wbrew tezie nie istnieje jeden wierzchołek G, który byłby połączony ze wszystkimi. Krok kombinatoryczny polega na pokazaniu, że w opisanej sytuacji G musi być regularny, to znaczy: wszyscy muszą mieć tyle samo przyjaciół. Z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi, powiedzmy k. A zatem jeśli G spełnia warunki twierdzenia, ale nie ma w nim wierzchołka połączonego ze wszystkimi, to każdy wierzchołek jest połączony z dokładnie k innymi.

Zliczamy ścieżki długości 2 grafu G startujące z ustalonego wierzchołka x. Ich liczba to k^2, bo każdy ma k znajomych, a każdy z nich dokładnie k kolejnych. Między każdym wierzchołkiem $y \neq x$ istnieje dokładnie jedna ścieżka długości 2 zaczynająca się w x (ta obserwacja jest kluczowa do pokazania kroku kombinatorycznego). A zatem licząc ile jest wszystkich wierzchołków grafu za pomocą ścieżek długości 2 widzimy, że każdy wierzchołek G policzyliśmy raz, oczywiście poza x, który jest policzony k razy. A zatem odejmujemy nadmiarowe $k-1$ razy i widzimy, że $n = k^2 - k + 1$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu.



Przykłady tzw. grafów przyjaźni, czyli takich, które realizują tezę twierdzenia o przyjaźni. Źródło `wikipedia.org`.

Spójrzmy teraz na $A = A(G)$. Co o niej wiemy? Nie za wiele. Ale wiemy coś o A^2. Skoro każde dwa wierzchołki mają dokładnie jednego wspólnego sąsiada, to macierz A^2 ma k na przekątnej oraz 1 wszędzie indziej (dlaczego?). Proponuję sprawdzić każdemu, że A^2 ma dwie wartości własne (łatwe?). Jedna wynosi $n + k - 1 = k^2$ i ma krotność algebraiczną 1, a druga to $k-1$, która ma krotność algebraiczną $n-1$.

„Crux" polega na tym, że wartości własne A^2 to kwadraty wartości własnych A (tak jest zawsze, dlaczego?). A zatem wartości własne A mogą wynosić jedynie k lub $\pm\sqrt{k-1}$. Wartości własne macierzy A dodają się z krotnościami do zera, bo $tr(A) = 0$ (dlaczego?!), więc jeśli $\sqrt{k-1}$ ma krotność r, zaś $-\sqrt{k-1}$ ma krotność s, to

$$k + (r-s)\sqrt{k-1} = 0.$$

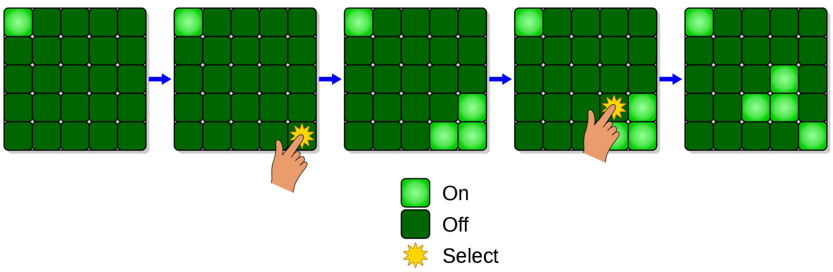
Analiza teorio-liczbowa tego warunku mówi, że $k-1$ dzieli k^2, czyli k musi być równe 1 lub 2. W tych przypadkach G jednak ma wspólnego „przyjaciela" innych wierzchołków. Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia o przyjaźni. To sprytny i piękny dowód, prawda?

Widzicie Państwo, że argumenty są tu mocno zagęszczone, ale chodziło mi o pewną ilustrację ciekawego wyniku.

Trivia. Lights Out

W 1995 roku Tiger Electronics wydało grę *Lights Out*. Gra składa się z tablicy rozmiaru 5 na 5 złożonej z 25 przycisków, z których każdy jest w jednym z dwóch stanów: włączony (wtedy przycisk jest podświetlony) lub wyłączony. Po rozpoczęciu gry włącza się losowa konfiguracja przycisków. Naciśnięcie dowolnego przycisku spowoduje przełączenie tego przycisku, a także jego sąsiadów (ale nie po przekątnej).

Gry tego typu powstały już w latach 70-tych, np. *Merlin*, na tablicy 3x3. Dziś jest wiele przeróżnych wariantów tego typu zabawek. Bardzo wiele znanych gier i łamigłówek można opisać za pomocą algebry, nie tylko liniowej. Odsyłam do wspaniałej książki podlinkowanej poniżej.



Ilustracja gry w Lights Out. Źródło: domena publiczna.

W podstawowej wersji gry zadaniem jest wyłączenie wszystkich świateł, najlepiej za pomocą jak najmniejszej liczby ruchów.

W 1998 roku Marlow Anderson oraz Todd Fell użyli metod algebry liniowej do pokazania, że nie wszystkie konfiguracje prowadzą do rozwiązania oraz, że dla każdej rozwiązywalnej konfiguracji istnieją dokładnie 4 strategie (nie mające zbędnych ruchów). Idea jest prosta: każdą z tablic reprezentować można jednoznacznie jako element przestrzeni $M_5(\mathbb{Z}_2)$. W ten sposób wciśnięcie odpowiedniego klawisza odpowiada dodawaniu pewnej macierzy modulo 2, na przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Załóżmy, że wyjściową konfigurację świateł opisuje macierz B. Problem wyłączenia świateł w B równoważny jest pytaniu: czy B należy do $\mathrm{lin}(T_{ij}, 1 \le i, j \le 5)$?

Moim celem nie jest dokładny (łatwy) opis rozwiązania. Wyjaśnienie powyższego szkicu i ładny opis problemu można znaleźć w rozdziale 24. pięknej książki „*Permutation puzzles*", dostępnej pod adresem `http://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/notes/permutation-puzzles-book.pdf` (strona autora). Jeśli zechcecie tam Państwo zajrzeć, dowiecie się czemu ten temat umieściłem w kontekście wektorów i wartości własnych.

Może tylko jedna uwaga i mała podpowiedź. Dla macierzy nad $\mathbb{Z}_2$ możliwe są tylko dwie wartości własne 0 oraz 1. Proszę zamiast wyłączania wszystkich świateł sprawić, by zapalone były jedynie światła na przekątnej. Proszę znaleźć wszystkie minimalne sposoby wyłączenia świateł na tablicy, w której podświetlona jest tylko cała przekątna.