GAL I (JSIM), 29 października 2021 r.

Zadanie 1. *Niech* $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. *Zdefiniujmy dodawanie* $\oplus$ *elementów zbioru* X *oraz mnożenie* $\odot$ *elementów zbioru* X *przez liczby rzeczywiste wzorami*

$$x \oplus y = xy \quad \text{oraz} \quad \lambda \odot x = x^{\lambda}.$$

Wykaż, że trójka $(X, \oplus, \odot)$ *jest przestrzenią liniową nad ciałem* $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. *Niech* $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. *Zdefiniujmy dodawanie* $\oplus$ *w* V *wzorem*

$$z_1 \oplus z_2 = z_1 z_2.$$

Wykaż, że jeżeli K *jest (dowolnym) ciałem, to nie istnieje takie mnożenie* $\odot$ *elementów zbioru* V *przez skalary z* K, *aby trójka* $(V, \oplus, \odot)$ *była przestrzenią liniową nad* K.

Zadanie 3. *Dla jakich wartości parametru* $t \in \mathbb{C}$ *zbiór rozwiązań układu równań*

$$\begin{cases} 3x + (1-t^2)y^3 - z = 0 \\ x - 5y + (2t+2)|z| = t^3 - t \end{cases}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{C}^3$*?*

Zadanie 4. *Załóżmy, że* U *oraz* V *są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej* X *spełniającymi* $X = U \cup V$. *Udowodnij, że wtedy* $U = X$ *lub* $V = X$.

Zadanie 5. *Niech* $K = \mathbb{Z}_2$. *Ile podprzestrzeni ma przestrzeń liniowa* K^3*? Opisz każdą z nich układem równań liniowych.*

Zadanie 6. *Czy wektor* $v = (1,1,1) \in \mathbb{Q}^3$ *należy do przestrzeni liniowej nad* $\mathbb{Q}$ *rozpinanej przez wektory* $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (1,2,1)$ *oraz* $v_3 = (2,5,3)$*? To samo pytanie dla wektora* $w = (1,4,3) \in \mathbb{Q}^3$.

Zadanie 7. *Dla jakich* $t \in \mathbb{R}$ *wektor* $v = (-2, t, -1, 7) \in \mathbb{R}^4$ *jest kombinacją liniową wektorów*

$$v_1 = (1,2,-1,3), \quad v_2 = (1,0,2,2) \quad \text{oraz} \quad v_3 = (-1,3,1,1)?$$

Zadanie 8. *Niech przestrzeń liniowa* $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ *nad ciałem* K *będzie sumą mnogościową podprzestrzeni właściwych, dla* $n \geqslant 3$. *Wykaż, że ciało* K *ma mniej niż* n *elementów. Dla* $n = p^k + 1$, *gdzie* p *jest pierwszą oraz* $k \geqslant 1$ *pokazać przykład przestrzeni* V *o tej własności.*

Warto poszukać on-line: Białynicki-Birula A., Browkin J., Shinzel A.: On the representation of fields as finite union of subfields. Coll. Math. 7 (1959), pp.31–32.

Zadanie 9. *Niech* $G = (V, E)$ *będzie grafem nieskierowanym. Rozważmy przestrzeń krawędziową* $P(E)$ *grafu* E *nad ciałem* $\mathbb{Z}_2$. *Niech*

- $\mathcal{C}$ *– maksymalny podzbiór* $P(E)$ *(względem inkluzji) złożony z rozłącznych sum* ***cykli****, tzn. zamkniętych dróg w grafie* G *przechodzących przez każdy wierzchołek dokładnie raz,*
- $\mathcal{C}'$ *– maksymalny podzbiór* $P(E)$ *(względem inkluzji) złożony z rozłącznych sum* ***podzbiorów rozcinających*** G, *tzn. minimalnych (względem inkluzji) zbiorów krawędzi, których usunięcie rozspójnia graf* G.

Pokaż, że $\mathcal{C}$ *oraz* $\mathcal{C}'$ *są podprzestrzeniami liniowymi w* $P(E)$. *Znajdź* $\mathcal{C} \cup \mathbb{C}'$ *oraz* $\mathcal{C} \cap \mathbb{C}'$.