GAL I (JSIM), 26 października 2021 r.

Zadanie 1. *Rozwiąż równania w liczbach zespolonych:*

(a) $z^7 + 8z^4 + 4z^3 + 32 = 0$,

(b) $z^{12} - z^{10} + 4z^8 + 60z^6 - 64z^4 + 256z^2 - 256 = 0$,

(c) $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25 = 0$.

Uwaga. Pierwiastek zespolony wielomianu (c) można znaleźć stosując (na poziomie intuicji) analog twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych, dotyczący nie wielomianów nad $\mathbb{Z}$, ale nad pierścieniem liczb całkowitych Gaussa $\mathbb{Z}[i]$ postaci: $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Nie będziemy wyjaśniać tu tego wyniku, ani go nawet formułować. Więcej o tym pierścieniu można przeczytać w tekście: K. Conrada: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf`. Jest to szczególny przypadek pierścienia postaci $\mathbb{Z}[\omega]$, gdzie ω jest zespolonym pierwiastkiem z jedynki. Drugim znanym pierścieniem tego typu jest pierścień Eisensteina, gdzie ω jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia 3 z 1. O tym pierścieniu i jego zastosowaniach w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata dla $n = 3$ (autorstwa Eulera) można przeczytać w tekście dr. M. Krycha: „Skąd się wzięła liczba i” (`https://smp.uph.edu.pl/msn/34/krych.pdf`).

Zadanie 2. *Przypuśćmy, że istnieją niezerowe liczby zespolone a, b, c, d, z, że $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ oraz $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości z.*

Zadanie 3. *Wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma współczynniki rzeczywiste oraz pierwiastki nierzeczywiste z_1, z_2, z_3, z_4. Wiadomo, że $z_1z_2 = 13 + i$ oraz $z_3 + z_4 = 3 + 4i$. Wyznacz a, b, c, d.*

Zadanie 4. *Niech $\{1, z_1, \ldots, z_{2016}\}$ będzie zbiorem zespolonych pierwiastków stopnia 2017 z liczby 1. Pokaż, że*

$$\prod_{k=1}^{2016} (1 - z_k) = 2017.$$

Zadanie 5. *Dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej n znajdź wszystkie liczby z takie, że z^n oraz $(1+z)^n$ są liczbami rzeczywistymi.*

Zadanie 6. *Wyznacz wszystkie pary (n, r) takie, że $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ oraz wielomian $(x-2)^n - r$ dzieli się przez $x^2 - 2x + 2$.*

Zadanie 7. *Znajdź rozwiązania równania*

$$z^n = (iz + 2i)^n,$$

dla $z \in \mathbb{C}$ wiedząc, że można je zapisać w formie $-1 + \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. *Niech n, k będą liczbami całkowitymi dodatnimi i przypuśćmy, że wielomian $x^{2k} - x^k + 1$ dzieli się przez $x^{2n} + x^n + 1$. Udowodnij, że $x^{2k} + x^k + 1$ dzieli się przez $x^{2n} + x^n + 1$.*

Zadanie 9. *Równanie $x^{10} + (13x-1)^{10} = 0$ ma 10 pierwiastków zespolonych postaci $r_1, \overline{r_1}, r_2, \overline{r_2}, r_3, \overline{r_3}, r_4, \overline{r_4}, r_5, \overline{r_5}$. Znajdź wartość wyrażenia:*

$$\frac{1}{|r_1|^2} + \frac{1}{|r_2|^2} + \frac{1}{|r_3|^2} + \frac{1}{|r_4|^2} + \frac{1}{|r_5|^2}.$$

Zadanie 10. *(*) Niech G_n będzie zbiorem pierwiastków równania $z^n = 1$. Udowodnij, że*

$$\prod_{w \in G_n} \left(w + \frac{1}{w} \right) \in \{-4, 0, 2\}.$$

Zadanie 11. *(*) Niech α będzie liczbą rzeczywistą taką, że $|\alpha| < 1$ oraz niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że $z^{n+1} - \alpha z^n - \alpha z + 1 = 0 \Rightarrow |z| = 1$.*